Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2022

le mardi 5 avril 2022

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 6 avril 2022

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On a : $\dfrac{3^2-2^3}{2^3-3^2}=\dfrac{9-8}{8-9}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

   OU : puisque $2^3-3^2=-(3^2-2^3)$, alors $\dfrac{3^2-2^3}{2^3-3^2}=-1$.

   (b) On a : $\sqrt{\sqrt{81}+\sqrt{9}-\sqrt{64}}=\sqrt{9+3-8}=\sqrt{4}=2$.

   (c) Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+7}}=\dfrac{1}{4}$, alors $\sqrt{x^2+7}=4$.
   Donc, $x^2+7=4^2=16$, d'où $x^2=9$.
   Puisque $x^2=9$, alors $x=\pm 3$.
   On peut vérifier par substitution que ces deux valeurs satisfont à l'équation donnée.

2. (a) On écrit l'entier 2022 en factorisation première : $2022=2\cdot 1011=2\cdot 3\cdot 337$.
   Donc, $2022=2\cdot 1011$ et $2022=3\cdot 674$ et $2022=6\cdot 337$.
   Donc, les trois couples d'entiers sont $(a,b)=(2,1011),(3,674),(6,337)$.

   (b) On manipule l'équation donnée, tout en obtenant une suite d'équations équivalentes :

$$\begin{aligned}\frac{2c+1}{2d+1}&=\frac{1}{17}\\ 17(2c+1)&=2d+1\\ 34c+17&=2d+1\\ 34c+16&=2d\\ d&=17c+8\end{aligned}$$

   Puisque c est un entier tel que $c>0$, alors $c\geq 1$, d'où on a donc $17c+8\geq 25$.
   Donc, la plus petite valeur possible de d est $d=25$.
   Remarquons que lorsque $d=25$, alors $c=1$, d'où $\dfrac{2c+1}{2d+1}=\dfrac{3}{51}=\dfrac{1}{17}$.

   (c) *Solution 1*
   Lorsque $x=-5$, le membre de gauche de l'équation est égal à 0.
   Donc, lorsque $x=-5$, le membre de droite de l'équation est aussi égal à 0.
   Donc, $(-5)^2+3(-5)+t=0$, d'où $25-15+t=0$ ou $t=-10$.

   Solution 2
   On développe le membre de gauche de l'équation :

$$(px+r)(x+5)=px^2+rx+5px+5r$$

   Puisque cette expression est égale à x^2+3x+t pour tous les nombres réels, alors les coefficients des deux expressions quadratiques doivent être égaux.
   En comparant les coefficients de x^2, on a $p=1$.
   Cela signifie que

$$x^2+rx+5x+5r=x^2+3x+t$$

   En comparant les coefficients de x, on a $r+5=3$, d'où $r=-2$.
   Cela signifie que

$$x^2+3x-10=x^2+3x+t$$

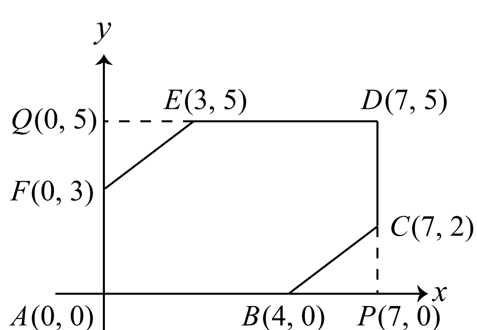
   En comparant les termes constants, on a $t=-10$.

3. (a) Supposons que le volume de la carafe est égal à V L.
Alors $\frac{1}{4}V + 24 = \frac{5}{8}V$.
On multiplie chaque membre par 8 pour obtenir $2V + 24 \cdot 8 = 5V$, d'où $3V = 192$ ou $V = 64$.
Donc, le volume de la carafe est égal à 64 L.

(b) Supposons que Stéphanie avait n ballons de soccer au début.
Puisque Stéphanie pouvait diviser les n ballons en cinquièmes et en onzièmes, alors n est un multiple de 5 et de 11.
Puisque 5 et 11 sont tous deux des nombres premiers, alors n doit être un multiple de $5 \cdot 11 = 55$.
Donc, $n = 55k$, k étant un entier strictement positif.
Dans ce cas, $\frac{2}{5}n = \frac{2}{5} \cdot 55k = 22k$ et $\frac{6}{11}n = \frac{6}{11} \cdot 55k = 30k$.
Après avoir donné ces ballons, il lui reste $55k - 22k - 30k = 3k$ ballons.
Puisque $3k$ est un multiple de 9, alors k est un multiple de 3.
Donc, on obtient le plus petit nombre de ballons de soccer lorsque $k = 3$. C'est-à-dire que le plus petit nombre de ballons que Stéphanie aurait pu avoir au début est égal à $n = 55 \cdot 3 = 165$.

(c) Supposons que le club de mathématiques comporte j élèves de la section junior et s élèves de la section senior.
Parmi les j élèves de la section junior, 60 % sont gauchers, soit $0{,}6j$.
Parmi les j élèves de la section junior, 40 % sont droitiers, soit $0{,}4j$.
Parmi les s élèves de la section senior, 10 % sont gauchers, soit $0{,}1s$.
Parmi les s élèves de la section senior, 90 % sont droitiers, soit $0{,}9s$.
Puisque le nombre total d'élèves gauchers est égal au nombre total d'élèves droitiers, alors on obtient l'équation $0{,}6j + 0{,}1s = 0{,}4j + 0{,}9s$, d'où $0{,}2j = 0{,}8s$ ou $j = 4s$.
Cela signifie qu'il y a 4 fois plus d'élèves de la section junior que d'élèves de la section senior. Donc, parmi les membres du club de mathématiques, $\frac{4}{5}$ des élèves font partie de la section junior tandis que $\frac{1}{5}$ font partie de la section senior.
Donc, 80 % des élèves du club de mathématiques font partie de la section junior.

4. (a) Soit P et Q les points ayant pour coordonnées respectives $(7, 0)$ et $(0, 5)$.



Donc, $APDQ$ est un rectangle de largeur 7, de hauteur 5 et a donc une aire de $7 \cdot 5 = 35$.
L'hexagone $ABCDEF$ est formé en retirant deux triangles du rectangle $APDQ$, soit les triangles BPC et EQF.
Les triangles BPC et EQF sont tous deux rectangles puisque chacun d'eux partage un angle avec le rectangle $APDQ$.
Chacun des triangles BPC et EQF a une base de 3 et une hauteur de 2.
Donc, les triangles ont des aires dont la somme est égale à $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 6$.
Donc, l'hexagone $ABCDEF$ a une aire de $35 - 6 = 29$.

(b) Puisque le triangle PQS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore,

$$SQ^2 = SP^2 + PQ^2 = (x+3)^2 + x^2$$

Puisque le triangle QRS est rectangle en Q, alors d'après le théorème de Pythagore, on obtient

$$\begin{aligned} RS^2 &= SQ^2 + QR^2 \\ (x+8)^2 &= ((x+3)^2 + x^2) + 8^2 \\ x^2 + 16x + 64 &= x^2 + 6x + 9 + x^2 + 64 \\ 0 &= x^2 - 10x + 9 \\ 0 &= (x-1)(x-9) \end{aligned}$$

d'où $x = 1$ ou $x = 9$.
(On peut vérifier que si $x = 1$, alors les deux triangles PQS et QRS sont tous deux rectangles car ayant respectivement des côtés de longueurs 4, 1 et $\sqrt{17}$; et $\sqrt{17}$, 8 et 9. De même, on peut vérifier que si $x = 9$, alors les deux triangles PQS et QRS sont tous deux rectangles car ayant respectivement des côtés de longueurs 12, 9 et 15 ; et 15, 8 et 17.)
En fonction de x, le périmètre de $PQRS$ est égal à $x + 8 + (x+8) + (x+3) = 3x + 19$.
Donc, le quadrilatère $PQRS$ peut avoir un périmètre de 22 (lorsque $x = 1$) ou un périmètre de 46 (lorsque $x = 9$).

5. (a) Si r et s sont deux termes consécutifs dans la suite, alors $s = 1 + \dfrac{1}{1+r}$.
Cela signifie que $s - 1 = \dfrac{1}{1+r}$ ou $\dfrac{1}{s-1} = 1 + r$, d'où $r = \dfrac{1}{s-1} - 1$.
Donc, puisque $a_3 = \dfrac{41}{29}$, alors

$$a_2 = \frac{1}{a_3 - 1} - 1 = \frac{1}{(41/29) - 1} - 1 = \frac{1}{12/29} - 1 = \frac{29}{12} - 1 = \frac{17}{12}$$

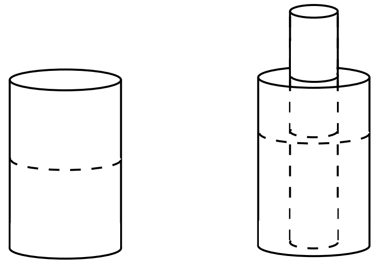
De plus, puisque $a_2 = \dfrac{17}{12}$, alors

$$a_1 = \frac{1}{a_2 - 1} - 1 = \frac{1}{(17/12) - 1} - 1 = \frac{1}{5/12} - 1 = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5}$$

(b) Au début, l'eau dans le tube creux forme un cylindre de rayon 10 mm et de hauteur h mm. Donc, l'eau a un volume de $\pi(10 \text{ mm})^2(h \text{ mm}) = 100\pi h \text{ mm}^3$.
Après que la tige est placée dans le tube, la profondeur de l'eau dans le tube est de 64 mm. Remarquons que cela ne fait pas déborder le tube, puisque la hauteur du tube est de 100 mm.
Jusqu'à la surface de l'eau, le tube est un cylindre de rayon 10 mm et de hauteur 64 mm. Donc, le volume du tube jusqu'à la surface de l'eau est égal à

$$\pi(10 \text{ mm})^2(64 \text{ mm}) = 6400\pi \text{ mm}^3$$

Ce volume est constitué de l'eau qui se trouve dans le tube (dont le volume, qui n'a pas changé, est de $100\pi h \text{ mm}^3$) et de la tige jusqu'à une hauteur de 64 mm.



Puisque la tige a un rayon de 2,5 mm, le volume de la tige jusqu'à une hauteur de 64 mm est égal à $\pi(2{,}5 \text{ mm})^2(64 \text{ mm}) = 400\pi \text{ mm}^3$.
On compare les volumes : $6400\pi \text{ mm}^3 = 100\pi h \text{ mm}^3 + 400\pi \text{ mm}^3$, d'où $100h = 6000$ ou $h = 60$.

6. (a) On remarque que $\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2x}{x} + \dfrac{1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$.
Donc, $\dfrac{2x+1}{x} = 4$ exactement lorsque $2 + \dfrac{1}{x} = 4$, d'où $\dfrac{1}{x} = 2$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.
On aurait également pu résoudre $\dfrac{2x+1}{x} = 4$ directement pour obtenir $2x + 1 = 4x$, d'où $2x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.
Donc, pour déterminer la valeur de $f(4)$, on reporte $x = \dfrac{1}{2}$ dans l'équation donnée $f\left(\dfrac{2x+1}{x}\right) = x + 6$ pour obtenir $f(4) = \dfrac{1}{2} + 6 = \dfrac{13}{2}$.

(b) Puisque la représentation graphique de la fonction $y = \log_a(x+b) + c$ passe aux points $(3,5)$, $(5,4)$ et $(11,3)$, on reporte les trois points dans l'équation pour obtenir les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5 &= \log_a(3+b) + c \\ 4 &= \log_a(5+b) + c \\ 3 &= \log_a(11+b) + c \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, et on soustrait la troisième équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} 1 &= \log_a(3+b) - \log_a(5+b) \\ 1 &= \log_a(5+b) - \log_a(11+b) \end{aligned}$$

Puisque les deux membres de droite sont égaux, on a :

$$\begin{aligned} \log_a(5+b) - \log_a(11+b) &= \log_a(3+b) - \log_a(5+b) \\ 2\log_a(5+b) &= \log_a(3+b) + \log_a(11+b) \\ \log_a\left((5+b)^2\right) &= \log_a\left((3+b)(11+b)\right) \qquad \text{(à l'aide des lois des logarithmes)} \\ (5+b)^2 &= (3+b)(11+b) \qquad \text{(on élève chaque membre à la puissance } a\text{)} \\ 25 + 10b + b^2 &= 33 + 14b + b^2 \\ -8 &= 4b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Puisque $b = -2$, l'équation $1 = \log_a(3+b) - \log_a(5+b)$ devient $1 = \log_a 1 - \log_a 3$.
Puisque $\log_a 1 = 0$ pour chaque valeur admissible de a, alors $\log_a 3 = -1$, d'où $a = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Finalement, l'équation $5 = \log_a(3+b)+c$ devient $5 = \log_{1/3}(1)+c$, d'où $c = 5$.
Donc, $a = \frac{1}{3}$, $b = -2$ et $c = 5$, d'où on a donc $y = \log_{1/3}(x-2)+5$.

On vérifie :
- Lorsque $x = 3$, on obtient $y = \log_{1/3}(3-2)+5 = \log_{1/3} 1 + 5 = 0+5 = 5$.
- Lorsque $x = 5$, on obtient $y = \log_{1/3}(5-2)+5 = \log_{1/3} 3 + 5 = -1+5 = 4$.
- Lorsque $x = 11$, on obtient $y = \log_{1/3}(11-2)+5 = \log_{1/3} 9 + 5 = -2+5 = 3$.

7. (a) La probabilité que l'entier n soit choisi est égale à $\log_{100}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

La probabilité qu'un entier de 81 à 99 soit choisi est égale à la somme des probabilités que les entiers 81, 82, …, 98, 99 soient choisis, ce qui est égale à

$$\log_{100}\left(1+\frac{1}{81}\right)+\log_{100}\left(1+\frac{1}{82}\right)+\cdots+\log_{100}\left(1+\frac{1}{98}\right)+\log_{100}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

Puisque la deuxième probabilité est égale au double de la première, alors les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}\log_{100}\left(1+\frac{1}{81}\right)+\log_{100}\left(1+\frac{1}{82}\right)+\cdots+\log_{100}\left(1+\frac{1}{98}\right)+\log_{100}\left(1+\frac{1}{99}\right) &= 2\log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ \log_{100}\left(\frac{82}{81}\right)+\log_{100}\left(\frac{83}{82}\right)+\cdots+\log_{100}\left(\frac{99}{98}\right)+\log_{100}\left(\frac{100}{99}\right) &= 2\log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

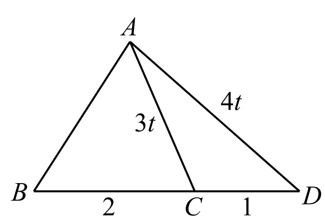
En utilisant les lois des logarithmes, ces équations sont équivalentes à

$$\begin{aligned}\log_{100}\left(\frac{82}{81}\cdot\frac{83}{82}\cdot\dots\cdot\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}\right) &= \log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\\ \log_{100}\left(\frac{100}{81}\right) &= \log_{100}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\end{aligned}$$

Puisque les fonctions logarithmiques sont inversibles, on obtient $\dfrac{100}{81} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$.

Puisque $n > 0$, alors $1+\dfrac{1}{n} = \sqrt{\dfrac{100}{81}} = \dfrac{10}{9}$, d'où $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{9}$, soit $n = 9$.

(b) Puisque $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{3}{4}$, alors soit $AC = 3t$ et $AD = 4t$, t étant un nombre réel tel que $t > 0$.



D'après la loi du cosinus dans le triangle ACD, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos(\angle ACD)\\ (4t)^2 &= (3t)^2 + 1^2 - 2(3t)(1)(-\tfrac{3}{5})\\ 16t^2 &= 9t^2 + 1 + \tfrac{18}{5}t\\ 80t^2 &= 45t^2 + 5 + 18t\\ 35t^2 - 18t - 5 &= 0\\ (7t-5)(5t+1) &= 0\end{aligned}$$

Puisque $t > 0$, alors $t = \frac{5}{7}$.
Donc, $AC = 3t = \frac{15}{7}$.
On utilise la loi du cosinus dans le triangle ACB, tout en notant que

$$\cos(\angle ACB) = \cos(180^\circ - \angle ACD) = -\cos(\angle ACD) = \tfrac{3}{5}$$

pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB) \\ &= \left(\tfrac{15}{7}\right)^2 + 2^2 - 2(\tfrac{15}{7})(2)(\tfrac{3}{5}) \\ &= \tfrac{225}{49} + 4 - \tfrac{36}{7} \\ &= \tfrac{225}{49} + \tfrac{196}{49} - \tfrac{252}{49} \\ &= \tfrac{169}{49} \end{aligned}$$

Puisque $AB > 0$, alors $AB = \frac{13}{7}$.

8. (a) La parabole d'équation $y = ax^2 + 2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Le sommet a donc pour abscisse $x = 0$ (d'où $y = a \cdot 0^2 + 2 = 2$). Donc, le sommet V a pour coordonnées $(0, 2)$.
Pour déterminer les coordonnées de B et C, on utilise les équations de la parabole et de la droite pour obtenir

$$\begin{aligned} ax^2 + 2 &= -x + 4a \\ ax^2 + x + (2 - 4a) &= 0 \end{aligned}$$

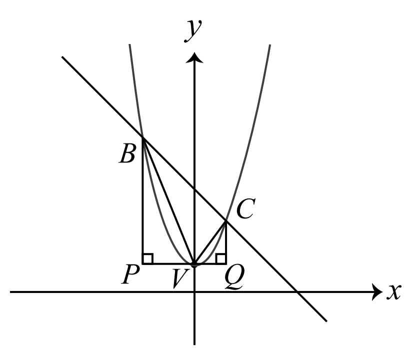
À l'aide de la formule quadratique,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4a(2-4a)}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8a + 16a^2}}{2a}$$

Puisque $1 - 8a + 16a^2 = (4a-1)^2$ et $4a - 1 > 0$ (car $a > \frac{1}{2}$), alors $\sqrt{1 - 8a + 16a^2} = 4a - 1$.
Donc,

$$x = \frac{-1 \pm (4a-1)}{2a}$$

d'où $x = \dfrac{4a-2}{2a} = \dfrac{2a-1}{a} = 2 - \dfrac{1}{a}$ ou $x = \dfrac{-4a}{2a} = -2$.
On peut utiliser l'équation de la droite pour obtenir les ordonnées de B et C.
Lorsque $x = -2$ (soit l'abscisse du point B), on obtient $y = -(-2) + 4a = 4a + 2$.
Lorsque $x = 2 - \dfrac{1}{a}$ (soit l'abscisse du point C), on obtient $y = -\left(2 - \dfrac{1}{a}\right) + 4a = 4a - 2 + \dfrac{1}{a}$.
Soit P et Q les points sur la droite horizontale qui passe par V tels que BP et CQ soient perpendiculaires à PQ.



Donc, l'aire du triangle VBC est égale à l'aire du trapèze $PBCQ$ moins les aires des triangles rectangles BPV et CQV.
Puisque B a pour coordonnées $(-2, 4a+2)$, que P a pour coordonnées $(-2, 2)$, que V a pour coordonnées $(0, 2)$, que Q a pour coordonnées $\left(2 - \frac{1}{a}, 2\right)$ et que C a pour coordonnées $\left(2 - \frac{1}{a}, 4a - 2 + \frac{1}{a}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
BP &= (4a+2) - 2 = 4a \\
CQ &= \left(4a - 2 + \frac{1}{a}\right) - 2 = 4a - 4 + \frac{1}{a} \\
PV &= 0 - (-2) = 2 \\
QV &= 2 - \frac{1}{a} - 0 = 2 - \frac{1}{a} \\
PQ &= PV + QV = 2 + 2 - \frac{1}{a} = 4 - \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Alors l'aire du trapèze $PBCQ$ est égale à

$$\frac{1}{2}(BP + CQ)(PQ) = \frac{1}{2}\left(4a + 4a - 4 + \frac{1}{a}\right)\left(4 - \frac{1}{a}\right) = \left(4a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(4 - \frac{1}{a}\right)$$

De plus, l'aire du triangle BPV est égale à $\frac{1}{2} \cdot BP \cdot PV = \frac{1}{2}(4a)(2) = 4a$

et l'aire du triangle CQV est égale à

$$\frac{1}{2} \cdot CQ \cdot QV = \frac{1}{2}\left(4a - 4 + \frac{1}{a}\right)\left(2 - \frac{1}{a}\right) = \left(2a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(2 - \frac{1}{a}\right)$$

D'après les renseignements donnés,

$$\left(4a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(4 - \frac{1}{a}\right) - 4a - \left(2a - 2 + \frac{1}{2a}\right)\left(2 - \frac{1}{a}\right) = \frac{72}{5}$$

On multiplie chaque membre de l'équation par $2a^2$, que l'on distribue dans les facteurs du membre de gauche comme $2a \cdot a$, pour obtenir

$$(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1) - 8a^3 - (4a^2 - 4a + 1)(2a - 1) = \frac{144}{5}a^2$$

On multiplie chaque membre de l'équation par 5 pour obtenir

$$5(8a^2 - 4a + 1)(4a - 1) - 40a^3 - 5(4a^2 - 4a + 1)(2a - 1) = 144a^2$$

On développe et on simplifie pour obtenir

$$\begin{aligned}
(160a^3 - 120a^2 + 40a - 5) - 40a^3 - (40a^3 - 60a^2 + 30a - 5) &= 144a^2 \\
80a^3 - 204a^2 + 10a &= 0 \\
2a(40a^2 - 102a + 5) &= 0 \\
2a(20a - 1)(2a - 5) &= 0
\end{aligned}$$

d'où $a = 0$ ou $a = \frac{1}{20}$ ou $a = \frac{5}{2}$. Puisque $a > \frac{1}{2}$, alors $a = \frac{5}{2}$.

(b) On démontrera qu'il ne peut y avoir un tel triangle à l'aide d'une preuve par contradiction. C'est-à-dire qu'on supposera qu'il existe un tel triangle et on démontrera qu'il y a alors une contradiction logique.

Supposons que le triangle ABC n'est pas équilatéral, que les longueurs de ses côtés forment une suite géométrique et que ses angles ont des mesures qui forment une suite arithmétique.

Supposons que le triangle ABC a des côtés de longueurs $BC = a$, $AC = ar$ et $AB = ar^2$, a et r étant des nombres réels tels que $a > 0$ et $r > 1$. (Ces longueurs forment une suite géométrique et on peut supposer que cette suite est croissante et que les côtés sont nommés dans cet ordre particulier).

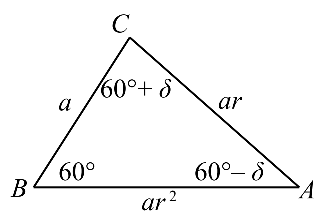
Puisque $BC < AC < AB$, alors les angles opposés ont les mêmes relations, soit $\angle BAC < \angle ABC < \angle ACB$.

Supposons que $\angle BAC = \theta$, que $\angle ABC = \theta + \delta$ et que $\angle ACB = \theta + 2\delta$, θ et δ étant des angles. (En d'autres termes, ces angles forment une suite arithmétique.)

Puisque ces trois angles sont les angles d'un triangle, leur somme est égale à 180°. Donc,

$$\begin{aligned} \theta + (\theta + \delta) + (\theta + 2\delta) &= 180^\circ \\ 3\theta + 3\delta &= 180^\circ \\ \theta + \delta &= 60^\circ \end{aligned}$$

Autrement dit, $\angle ABC = 60^\circ$.



On peut procéder en utilisant la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos(\angle ABC) \\ (ar)^2 &= a^2 + (ar^2)^2 - 2a(ar^2)\cos(60^\circ) \\ a^2r^2 &= a^2 + a^2r^4 - 2a^2r^2 \cdot \tfrac{1}{2} \\ a^2r^2 &= a^2 + a^2r^4 - a^2r^2 \\ 0 &= a^2r^4 - 2a^2r^2 + a^2 \\ 0 &= a^2(r^4 - 2r^2 + 1) \\ 0 &= a^2(r^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

On a donc que $a = 0$ (ce qui est impossible) ou $r^2 = 1$ (d'où $r = \pm 1$, ce qui est impossible). Par conséquent, nous avons atteint une contradiction logique et un tel triangle ne peut donc pas exister.

Par ailleurs, on peut également procéder en utilisant la loi des sinus, tout en notant que :

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \theta = (\theta + \delta) - \delta = 60^\circ - \delta \\ \angle ACB &= \theta + 2\delta = (\theta + \delta) + \delta = 60^\circ + \delta \end{aligned}$$

D'après la loi des sinus,

$$\frac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{AB}{\sin(\angle ACB)}$$

d'où on obtient

$$\frac{a}{\sin(60^\circ - \delta)} = \frac{ar}{\sin(60^\circ)} = \frac{ar^2}{\sin(60^\circ + \delta)}$$

Puisque $a \neq 0$, alors d'après les deux premières parties

$$r = \frac{ar}{a} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \delta)}$$

Puisque $ar \neq 0$, alors d'après les deux secondes parties

$$r = \frac{ar^2}{ar} = \frac{\sin(60^\circ + \delta)}{\sin 60^\circ}$$

Puisque les deux membres de droite représentent r, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \delta)} &= \frac{\sin(60^\circ + \delta)}{\sin 60^\circ} \\
\sin^2 60^\circ &= \sin(60^\circ - \delta)\sin(60^\circ + \delta) \\
\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= (\sin 60^\circ \cos\delta - \cos 60^\circ \sin\delta)(\sin 60^\circ \cos\delta + \cos 60^\circ \sin\delta) \\
\tfrac{3}{4} &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\delta - \tfrac{1}{2}\sin\delta\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\delta + \tfrac{1}{2}\sin\delta\right) \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4}\cos^2\delta - \tfrac{1}{4}\sin^2\delta \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4}\cos^2\delta + \tfrac{3}{4}\sin^2\delta - \sin^2\delta \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4}(\cos^2\delta + \sin^2\delta) - \sin^2\delta \\
\tfrac{3}{4} &= \tfrac{3}{4} - \sin^2\delta \\
\sin^2\delta &= 0
\end{aligned}$$

d'où on a donc $\delta = 0^\circ$. (Tout autre angle δ avec $\sin\delta = 0$ ne produirait pas d'angles dans un triangle.)

Par conséquent, chacun des trois angles du triangle a une mesure de 60°, ce qui signifie que le triangle est équilatéral, ce qu'il ne peut pas être.

Par conséquent, on a une contradiction logique et donc un tel triangle ne peut pas exister.

9. (a) Les termes de la suite en dents de scie $(4,2)$ sont

$$1, \quad 2,3,4,3,2,1, \quad 2,3,4,3,2,1$$

dont la somme est égale à 31.

(b) *Solution 1*

Supposons que $m \geq 2$.
La suite en dents de scie $(m,3)$ a comme premier terme 1 suivi de 3 dents. Chaque dent commence à 2, monte jusqu'à m et redescend à 1.
Considérons l'une de ces dents dont les termes sont

$$2,3,4,\ldots,m-1,m,m-1,m-2,m-3,\ldots,2,1$$

Lorsqu'on écrit la partie ascendante directement au-dessus de la partie descendante, on obtient

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 4, & \ldots, & m-1, & m, \\ m-1, & m-2, & m-3, & \ldots, & 2, & 1 \end{array}$$

D'après cela, on peut voir $m-1$ paires de termes ; les termes de chaque paire ayant une somme de $m+1$.
(Remarquons que $2+(m-1)=3+(m-2)=4+(m-3)=\cdots=(m-1)+2=m+1$ et que les termes du haut augmentent de 1 et les termes du bas diminuent de 1 lorsqu'on se déplace de gauche à droite ; les termes de chaque paire ont donc une somme constante).
Donc, les termes d'une dent ont une somme de $(m-1)(m+1)=m^2-1$.
Cela signifie que la somme des termes de la suite en dents de scie $(m,3)$ est égale à $1+3(m^2-1)$, soit $3m^2-2$.

Solution 2

Supposons que $m \geq 2$.
La suite en dents de scie $(m,3)$ a comme premier terme 1 suivi de 3 dents. Chaque dent commence à 2, monte jusqu'à m et redescend à 1.
Considérons l'une de ces dents dont les termes sont

$$2,3,4,\ldots,m-1,m,m-1,m-2,m-3,\ldots,2,1$$

Cette dent comprend un 1, deux 2, deux 3 et ainsi de suite jusqu'à atteindre deux $(m-1)$ et un m.
La somme de ces termes est égale à

$$1(1)+2(2)+2(3)+\cdots+2(m-1)+m$$

ce que l'on peut exprimer sous la forme

$$2(1+2+3+\cdots+(m-1)+m)-1-m=2\cdot\tfrac{1}{2}m(m+1)-m-1=m^2+m-m-1=m^2-1$$

Donc, les termes d'une dent ont une somme de $(m-1)(m+1)=m^2-1$.
Cela signifie que la somme des termes de la suite en dents de scie $(m,3)$ est égale à $1+3(m^2-1)$, soit $3m^2-2$.

(c) D'après la partie (b), les termes de chaque dent ont une somme de $m^2 - 1$.
Donc, les termes de la suite en dents de scie (m, n) ont une somme de $1 + n(m^2 - 1)$.
Pour que cette somme soit égale à 145, on a $n(m^2 - 1) = 144$.
Cela signifie que n et $m^2 - 1$ forment une paire de diviseurs complémentaires de 144.
Puisque m varie de 2 à 12, alors les valeurs de $m^2 - 1$ sont

$$3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143$$

(Lorsque $m = 13$, on obtient $m^2 - 1 = 168$. Donc, lorsque $m \geq 13$, la valeur de $m^2 - 1$ est trop grande pour qu'elle soit un diviseur de 144.)
Parmi les valeurs de $m^2 - 1$, $3, 8, 24, 48$ sont des diviseurs de 144 (correspondant à $m = 2, 3, 5, 7$) et ont comme diviseurs complémentaires $48, 18, 6, 3$.
Donc, les couples (m, n) pour lesquels les termes de la suite ont une somme de 145 sont

$$(m, n) = (2, 48), (3, 18), (5, 6), (7, 3)$$

(d) La somme des termes d'une suite en dents de scie (m, n) est égale à $n(m^2 - 1) + 1$.
Chaque dent comprend $(m - 1) + (m - 1) = 2m - 2$ termes (de 2 à m et de $m - 1$ à 1).
Cela signifie que la suite comprend $n(2m - 2) + 1$ termes.
Donc, les termes de la suite ont une moyenne de $\dfrac{n(m^2 - 1) + 1}{n(2m - 2) + 1}$.
Il faut démontrer que cette moyenne n'est pas un entier pour tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($m \geq 2$).
Supposons que $\dfrac{n(m^2 - 1) + 1}{n(2m - 2) + 1} = k$, k étant un entier quelconque. On va démontrer à l'aide d'une preuve par contradiction que cela n'est pas possible.
Puisque $\dfrac{n(m^2 - 1) + 1}{n(2m - 2) + 1} = k$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{m^2 n - n + 1}{2mn - 2n + 1} &= k \\
m^2 n - n + 1 &= 2mnk - 2nk + k \\
m^2 n - 2mnk + (2nk - n - k + 1) &= 0
\end{aligned}$$

On considère cette dernière comme étant une équation du second degré en m.
Puisque m est un entier, alors cette équation admet des racines entières et son discriminant doit donc être un carré parfait.
Cette équation a donc comme discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2nk)^2 - 4n(2nk - n - k + 1) \\
&= 4n^2k^2 - 8n^2k + 4n^2 + 4nk - 4n \\
&= 4n^2(k^2 - 2k + 1) + 4n(k - 1) \\
&= 4n^2(k - 1)^2 + 4n(k - 1) \\
&= (2n(k - 1))^2 + 2(2n(k - 1)) + 1 - 1 \\
&= (2n(k - 1) + 1)^2 - 1
\end{aligned}$$

Remarquons que $(2n(k - 1) + 1)^2$ est un carré parfait et que Δ est supposé être un carré parfait.
Or, ces deux carrés parfaits ont une différence de 1 et les deux seuls carrés parfaits qui ont

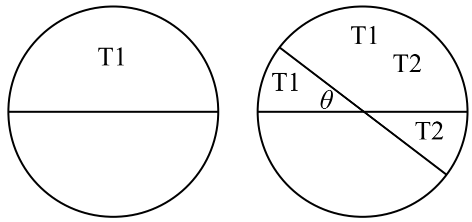
cette différence sont 1 et 0.
(Pour justifier ce fait, on peut considérer l'équation $a^2 - b^2 = 1$, a et b étant des entiers non négatifs, que l'on factorise pour obtenir $(a+b)(a-b) = 1$ d'où on a donc $a+b = a-b = 1$, soit $a = 1$ et $b = 0$.)
Puisque $(2n(k-1)+1)^2 = 1$ et $2n(k-1)+1$ est non négatif, alors $2n(k-1)+1 = 1$, d'où $2n(k-1) = 0$.
Puisque n est positif, alors $k - 1 = 0$ ou $k = 1$.
Donc, la seule manière pour que la moyenne soit un entier est que la moyenne soit égale à 1.
Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} m^2n - 2mn + (2n - n - 1 + 1) &= 0 \\ m^2n - 2mn + n &= 0 \\ n(m^2 - 2m + 1) &= 0 \\ n(m-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque n et m sont des entiers strictement positifs avec $m \geq 2$, alors $n(m-1)^2 \neq 0$, ce qui est une contradiction.
Donc, la moyenne des termes de la suite en dents de scie (m, n) ne peut pas être un entier.

10. (a) Supposons que la première garniture soit placée sur la moitié supérieure de la pizza (on peut faire pivoter la pizza pour que ce soit le cas).

Supposons que la deuxième garniture soit placée sur la moitié de la pizza située au-dessus du diamètre horizontal de manière que l'angle formé par le diamètre du deuxième demi-cercle et le diamètre horizontal ait une mesure de θ dans le sens des aiguilles d'une montre, comme dans la figure ci-dessous. En d'autres termes, la garniture couvre la pizza de θ à $\theta + 180°$.



On peut supposer que $0° \leq \theta \leq 360°$.

Lorsque $0° \leq \theta \leq 90°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est d'au moins $90°$ (et donc d'au moins un quart de cercle).

Lorsque $90° < \theta \leq 180°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est inférieur à $90°$ (et donc inférieur à un quart de cercle).

Lorsque θ dépasse $180°$, les deux garnitures commencent à nouveau à couvrir la partie gauche du demi-cercle supérieur. Lorsque $180° \leq \theta < 270°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est inférieur à $90°$ (et donc inférieur à un quart de cercle).

Lorsque $270° \leq \theta \leq 360°$, l'angle du secteur couvert par les deux garnitures est d'au moins $90°$ (et donc d'au moins un quart de cercle).

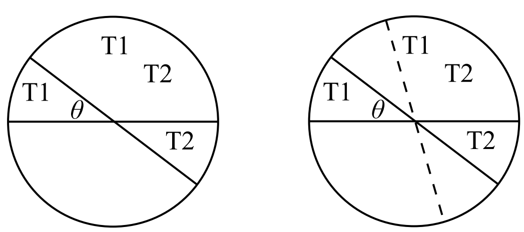
Donc, si l'on choisit θ au hasard entre $0°$ et $360°$, la longueur combinée des intervalles dans lesquels au moins $\frac{1}{4}$ de la pizza est couverte par les deux garnitures est de $180°$.

Donc, la probabilité est égale à $\dfrac{180°}{360°}$, soit $\dfrac{1}{2}$.

(b) Supposons que la première garniture soit placée sur la moitié supérieure de la pizza (on peut faire pivoter la pizza pour que ce soit le cas).

Supposons que la deuxième garniture soit placée sur la moitié de la pizza située au-dessus du diamètre horizontal de manière que l'angle formé par le diamètre du deuxième demi-cercle et le diamètre horizontal ait une mesure de θ dans le sens des aiguilles d'une montre, comme dans la figure ci-dessous. En d'autres termes, la garniture couvre la pizza de θ à $\theta + 180°$.

On peut supposer que $0° \leq \theta \leq 180°$. Si $180° \leq \theta \leq 360°$, alors on considère la pizza résultante comme étant une réflexion de celle dans la figure ci-dessous.



Considérons le troisième diamètre, représenté en pointillé, dans la figure ci-dessus. Supposons qu'il forme un angle de α avec l'horizontale. (Dans la figure, $\alpha < 90°$.) On suppose que la garniture est ajoutée sur la moitié de pizza dans le sens des aiguilles d'une montre en commençant par l'angle α, et que cette garniture reste dans la même position relative pendant que le diamètre fait le tour du cercle..

Pour quels angles α y aura-t-il une région de la pizza qui sera couverte par toutes les trois garnitures ?

Si $0° \le \alpha < 180°$, une région de la pizza sera couverte par toutes les trois garnitures ; cette région se trouve au-dessus de la moitié droite du diamètre horizontal.

Si $180° \le \alpha < 180° + \theta$, le troisième diamètre passera par les deux régions d'angle θ et la troisième garniture sera en-dessous de ce diamètre. Il n'y aura donc pas de région qui sera couverte par toutes les trois garnitures.

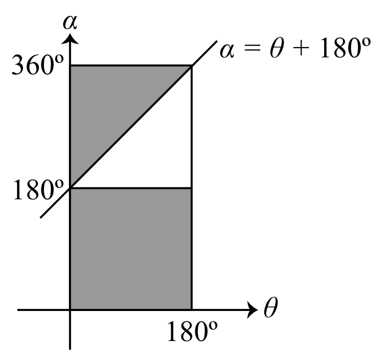
Si $180° + \theta \le \alpha \le 360°$, la troisième garniture commence à couvrir la partie la plus à gauche de la région qui est couverte par deux garnitures. Il y aura donc une région qui sera couverte par toutes les trois garnitures.

Donc, pour un angle θ avec $0° \le \theta \le 180°$, une région de la pizza contient trois garnitures lorsque $0° \le \alpha < 180°$ et lorsque $180° + \theta \le \alpha \le 360°$.

Pour déterminer la probabilité souhaitée, on représente graphiquement les points (θ, α). Un choix particulier de diamètres correspond à un choix d'angles θ et α avec $0° \le \theta \le 180°$ et $0° \le \alpha \le 360°$, ce qui correspond à un point dans le graphique ci-dessous.

La probabilité souhaitée est donc égale à l'aire de la région de ce graphique où trois garnitures recouvrent une partie de la pizza divisée par l'aire totale du graphique.

La région ombrée du graphique correspond aux cas où une partie de la pizza est couverte par trois garnitures.



Cette région ombrée est composée de toute la partie du graphique où $0° \le \alpha \le 180°$ (peu importe θ) ainsi que de la région au-dessus de la droite d'équation $\alpha = \theta + 180°$ (c'est-à-dire la région avec $\theta + 180° \le \alpha \le 360°$).

La pente de la droite étant égale à 1, elle divise la moitié supérieure de la région, qui est un carré, en deux parties d'aire égale.

Donc, $\frac{3}{4}$ du graphique est ombré, ce qui signifie que la probabilité qu'une région de la pizza soit couverte par les trois garnitures est égale à $\dfrac{3}{4}$.

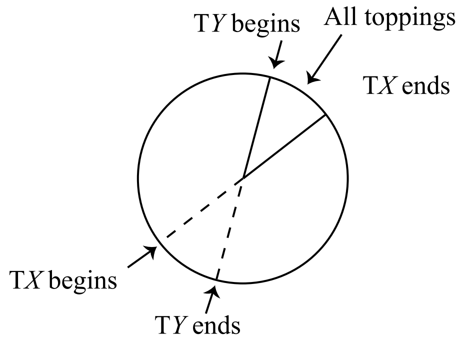
(c) L'idée principale de cette solution est que les garnitures se chevauchent toutes exactement lorsqu'il existe une garniture telle que toutes les autres garnitures « commencent » quelque part dans le demi-cercle de cette garniture. Dans la suite de cette solution, on déterminera la probabilité en utilisant ce fait, que l'on justifiera par la suite.

Supposons que, pour $1 \le j \le N$, la garniture j soit placé sur le demi-cercle qui commence à un angle de θ_j dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du rayon horizontal de gauche et qui va jusqu'à un angle de $\theta_j + 180°$ où $0° \le \theta_j < 360°$. En établissant ces variables et cette convention, on fixe à la fois l'angle du diamètre et le demi-cercle défini par ce diamètre sur lequel la garniture est placée.

Supposons qu'il y a une région de la pizza ayant une aire non nulle qui soit couverte par les N garnitures à la fois.

Cette région sera un secteur délimité par deux rayons, chacun d'entre eux étant la moitié

d'un diamètre délimitant l'une des garnitures.
Supposons que le rayon au « bout dans le sens horaire » du secteur soit l'extrémité du demi-cercle où est placée la garniture X, et que le rayon au « début dans le sens antihoraire » du secteur soit le début du demi-cercle où est placée la garniture Y.



Cela signifie que chacune des $N-2$ autres garnitures commence entre (dans le sens horaire) les points où commence la garniture X et où commence la garniture Y.
Considérons l'angle de départ de la garniture X, θ_X.
Le fait de dire que les $N-1$ autres garnitures commencent à un certain point avant que la garniture X ne se termine revient à dire que chaque θ_j avec $j \neq X$ est entre θ_X et $\theta_X + 180°$.
Dans ce cas, on peut admettre la possibilité que $\theta_X + 180°$ soit supérieur à 360° en précisant qu'un angle équivalent à θ_j (qui est soit θ_j ou $\theta_j + 360°$) est entre θ_X et $\theta_X + 180°$.
Pour chaque $j \neq X$, l'angle θ_j est choisi aléatoirement, uniformément et indépendamment dans le cercle, il y a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$ que cet angle (ou son équivalent) soit dans le demi-cercle compris entre θ_X et $\theta_X + 180°$.
Puisqu'il y a $N-1$ tels angles, la probabilité que tous soient compris entre θ_X et $\theta_X + 180°$ est égale à $\frac{1}{2^{N-1}}$.
Puisqu'il y a N choix possibles pour la première garniture qui peuvent « terminer » le secteur commun, alors la probabilité souhaitée sera égale à $\frac{N}{2^{N-1}}$ tant que l'on peut démontrer qu'aucun ensemble d'angles ne peut donner deux secteurs différents qui soient tous les deux couverts par toutes les garnitures.
Pour démontrer ce fait, on peut supposer, sans perte de généralité, que

$$0° = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots < \theta_{N-1} < \theta_N < 180°$$

(On peut renommer les garnitures si nécessaire pour obtenir cet ordre et faire tourner la pizza pour que la garniture 1 commence à 0°.)
On doit démontrer qu'il n'est pas possible d'avoir un Z pour lequel $\theta_Z, \theta_{Z+1}, \ldots, \theta_N, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{Z-1}$ se trouvent tous dans un demi-cercle commençant par θ_Z.
Puisque $\theta_Z < 180°$ et que l'on peut considérer θ_1 comme étant égal à 360°, alors cela n'est pas possible puisque θ_1 et les angles qui le suivent ne sont pas tous à moins de 180° de θ_Z.
Par conséquent, il n'est pas possible d'avoir deux telles régions avec le même ensemble d'angles. Donc, la probabilité souhaitée est égale à $\frac{N}{2^{N-1}}$.