Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2021

Avril 2021
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

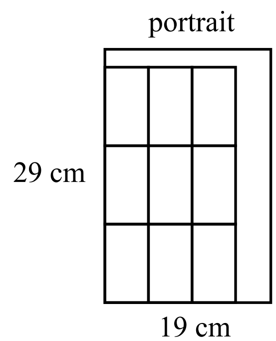
Avril 2021
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Chaque carte d'affaires mesure 5 cm $\times$ 9 cm et a donc une aire égale à 5 cm$\times$9 cm $=$ 45 cm^2.

   (b) L'aire d'une page mesurant 20 cm $\times$ 27 cm est égale à 20 cm $\times$ 27 cm $=$ 540 cm^2. Chaque carte d'affaires a une aire de 45 cm^2.
   Puisque la page entière est utilisée sans qu'il n'y ait de gaspillage, alors on peut imprimer $\dfrac{540\text{ cm}^2}{45\text{ cm}^2} = 12$ cartes d'affaires sans qu'il n'y ait de chevauchement.

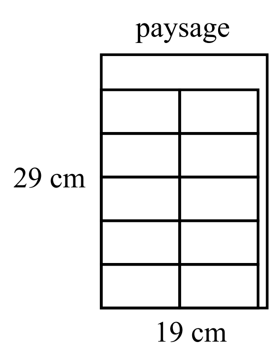
   (c) Considérons d'abord le cas où les cartes d'affaires sont en orientation portrait sur la page.
   La largeur de chaque carte est de 5 cm tandis que la largeur de la page est de 19 cm. Puisque 3 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 15 cm (ce qui est inférieur à 19 cm) et que 4 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 20 cm (ce qui est supérieur à 19 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 3 cartes placées comme tel sur le côté horizontal de la page.



   La hauteur de chaque carte est de 9 cm tandis que la hauteur de la page est de 29 cm. Puisque 3 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 27 cm (ce qui est inférieur à 29 cm) et que 4 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 36 cm (ce qui est supérieur à 29 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 3 cartes placées comme tel sur le côté vertical de la page.

   Donc, comme on le voit dans la figure ci-dessus, on ne peut imprimer qu'un maximum de $3 \times 3 = 9$ cartes d'affaires en orientation portrait par page.

   Considérons ensuite le cas où les cartes d'affaires sont en orientation paysage sur la page.
   La largeur de chaque carte est de 9 cm tandis que la largeur de la page est de 19 cm. Puisque 2 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 18 cm (ce qui est inférieur à 19 cm) et que 3 cartes adjacentes ont une largeur combinée de 27 cm (ce qui est supérieur à 19 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 2 cartes placées comme tel sur le côté horizontal de la page.



   La hauteur de chaque carte est de 5 cm tandis que la hauteur de la page est de 29 cm. Puisque 5 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 25 cm (ce qui est inférieur à 29 cm) et que 6 cartes adjacentes ont une hauteur combinée de 30 cm (ce qui est supérieur à 29 cm), alors on ne peut avoir qu'un maximum de 5 cartes placées comme tel sur le côté vertical de la page.

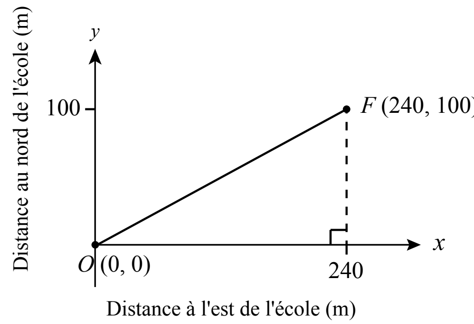
   Donc, comme on le voit dans la figure ci-dessus, on ne peut imprimer qu'un maximum de $2 \times 5 = 10$ cartes d'affaires en orientation paysage par page.

   Donc, on peut imprimer le plus grand nombre de cartes d'affaires par page lorsque les cartes sont en orientation portrait.

2. Tel qu'indiqué dans l'énoncé du problème, toutes coordonnées représentent des longueurs en mètres.

(a) Soit A le point situé à $(240, 0)$. Donc, OA représente une distance horizontale de 240 m, AF représente une distance verticale de 100 m et le triangle OAF est rectangle en A, comme dans la figure ci-contre. D'après le théorème de Pythagore, $FO^2 = OA^2 + AF^2$ ou $FO^2 = (240 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2 = 67\,600 \text{ m}^2$, d'où $FO = \sqrt{67\,600 \text{ m}^2} = 260$ m.

Donc, la distance du chemin rectiligne reliant l'école à la maison de François est de 260 m.

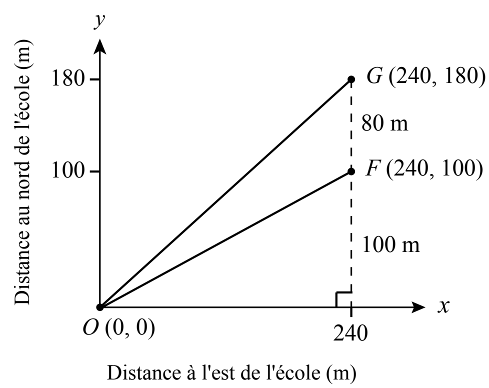


(b) Lundi, François rentre de l'école (en parcourant donc une distance de 260 m) en marchant à une vitesse constante de 80 m/min. Comme le temps est égal à la distance divisée par la vitesse, alors François rentre chez lui en $\dfrac{260 \text{ m}}{80 \text{ m/min}} = \dfrac{13}{4}$ (soit 3,25) minutes.

(c) Puisque les points F et G ont la même abscisse, alors la différence entre leurs ordonnées est égale à la distance entre la maison de François et celle de Georgette. Donc, les deux maisons se trouvent à 80 m l'une de l'autre, comme dans la figure ci-contre.

François et Georgette se rencontrent à mi-chemin entre leurs maisons, soit à une distance de 40 m de chaque maison.

D'après la partie (b), François quitte l'école et rentre chez lui en $\dfrac{13}{4}$ (soit 3,25) minutes en marchant à une vitesse constante de 80 m/min.



Donc, pour parcourir une distance supplémentaire de 40 m (afin de rencontrer Georgette à mi-chemin entre leurs maisons), il lui faut $\dfrac{40 \text{ m}}{80 \text{ m/min}} = \dfrac{1}{2}$ (soit 0,5) minutes de plus.

Donc, François met $\dfrac{13}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{4}$ (soit 3,75) minutes en tout pour rentrer chez lui et pour se rendre au point situé à mi-chemin entre les deux maisons.

Puisque Georgette et François quittent l'école en même temps que les deux se rencontrent à mi-chemin entre leurs maisons, alors Georgette met également $\dfrac{15}{4}$ minutes en tout pour rentrer chez elle et pour se rendre au point situé à mi-chemin entre les deux maisons.

Comme dans la partie (a), le triangle OAG est rectangle en A. Donc, d'après le théorème de Pythagore, $GO^2 = OA^2 + AG^2$ ou $GO^2 = (240 \text{ m})^2 + (180 \text{ m})^2 = 90\,000 \text{ m}^2$, d'où $GO = \sqrt{90\,000 \text{ m}^2} = 300$ m.

Puisque le chemin rectiligne reliant l'école à la maison de Georgette a une longueur de 300 m tandis que celui allant de la maison de Georgette jusqu'au point situé à mi-chemin entre les deux maisons a une longueur de 40 m, alors Georgette parcourt $300 \text{ m} + 40 \text{ m} = 340 \text{ m}$ en tout.

Comme la vitesse de Georgette (soit g m/min) est égale à la distance divisée par le temps, alors la valeur de g est égale à $340 \div \dfrac{15}{4} = 340 \times \dfrac{4}{15} = \dfrac{272}{3}$, soit $90\dfrac{2}{3}$.

3. (a) Lorsque la liste $5, 2, 3, 1,4, 6$ subit l'opération R_3, l'ordre des trois premiers nombres de la liste est renversé, ce qui produit la liste $3, 2, 5, 1, 4, 6$.

(b) Les deux Opérations de Renversement ont changé l'ordre des quatre premiers nombres de la liste ($1, 2, 3$ et 4) et n'ont pas changé l'ordre des deux derniers nombres de la liste (5 et 6). Il est donc raisonnable de supposer que la première Opération de Renversement pourrait être R_4.
Lorsque la liste initiale subit l'opération R_4, l'ordre des 4 premiers nombres de la liste est renversé, ce qui produit la liste $4, 3, 2, 1, 5, 6$.
Lorsque la nouvelle liste subit l'opération R_2, l'ordre des 2 premiers nombres de la liste est renversé, ce qui produit $3, 4, 2, 1, 5, 6$.
Donc, les deux Opérations de Renversement sont R_4 et R_2, dans cet ordre.
(Remarquons que ceci est le seul moyen d'obtenir la liste finale donnée en utilisant exactement deux Opérations de Renversement.)

(c) (i) Chaque Opération de Renversement, à l'exception de R_6, ne change pas le nombre situé à la dernière position de la liste. De plus, R_6 renverserait l'ordre de tous les nombres de la liste ; c'est-à-dire que le premier nombre de la liste se retrouverait donc à la dernière position après l'exécution de cette opération.
C'est-à-dire que le nombre 3 peut uniquement se retrouver à la dernière position lorsque R_6 est exécuté sur une liste dans laquelle 3 est à la première position.
Est-il possible d'exécuter une Opération de Renversement sur la liste initiale de manière que le nombre 3 se retrouve à la première position de la liste résultante ?
Si la liste initiale $1, 2, 3, 4, 5, 6$ subit l'opération R_3, on obtient $3, 2, 1, 4, 5, 6$.
Si cette nouvelle liste subit l'opération R_6, on obtient $6, 5, 4, 1, 2, 3$ comme souhaité.
Donc, la liste $1, 2, 3, 4, 5, 6$ doit subir les opérations R_3 et R_6, dans cet ordre, pour que 3 se retrouve à la dernière position de la liste. Donc, 2 Opérations de Renversement peuvent produire le résultat souhaité.

(ii) Puisqu'on a trouvé un moyen d'obtenir le résultat souhaité en exécutant 2 Opérations de Renversement dans la partie (i), on n'a qu'à expliquer pourquoi il n'est pas possible d'exécuter une seule Opération de Renversement pour obtenir le résultat souhaité.
Comme on l'a décrit dans la partie (i), le nombre 3 peut uniquement se retrouver à la dernière position lorsque R_6 est exécuté sur une liste dans laquelle 3 est à la première position. Puisque 3 n'est pas le premier nombre de la liste initiale, alors on ne peut obtenir le résultat souhaité à partir d'une seule Opération de Renversement.

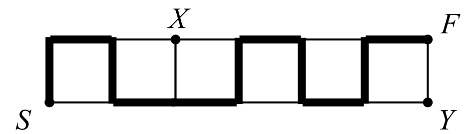
Donc, d'après (i) et (ii), on voit que la liste $1, 2, 3, 4, 5, 6$ doit subir au moins 2 Opérations de Renversement pour que le dernier nombre de la liste soit 3.

(d) Si la liste initiale $1, 2, 3, 4, 5, 6$ subit les opérations R_5, R_2 et R_6, dans cet ordre, alors on obtient : $5, 4, 3, 2, 1, 6$ après la première opération, $4, 5, 3, 2, 1, 6$ après la deuxième opération et $6, 1, 2, 3, 5, 4$ après la troisième opération.
Donc, on peut obtenir une liste de la forme souhaitée en exécutant 3 Opérations de Renversement.

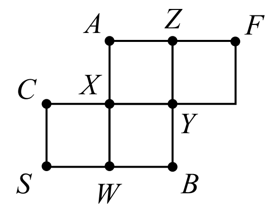
Peut-on obtenir le résultat souhaité en exécutant moins de 3 Opérations de Renversement ?
D'après une manière semblable à celle de la partie (c), la liste initiale doit subir les opérations R_4 et R_6, dans cet ordre, pour que 4 se retrouve à la dernière position de la liste.
Donc, il faut au moins 2 Opérations de Renversement pour que 4 se retrouve à la dernière position de la liste. De plus, ces deux opérations (R_4 et R_6) sont les seules qui peuvent déplacer le nombre 4 à la dernière position de la liste. (Pouvez-vous voir pourquoi ?)

Or, lorsque la liste initiale $1, 2, 3, 4, 5, 6$ subit les opérations R_4 et R_6, dans cet ordre, on obtient $4, 3, 2, 1, 5, 6$ et ensuite $6, 5, 1, 2, 3, 4$. L'avant-dernier nombre de cette liste n'est pas 5. Il n'est donc pas possible d'obtenir le résultat souhaité en exécutant 2 Opérations de Renversement.
Puisqu'il n'est clairement pas possible d'obtenir le résultat souhaité en exécutant une seule Opération de Renversement, alors il faut en exécuter au moins 3.

4. (a) Dans la figure ci-contre, on voit le chemin SF qui passe par chaque sommet *à l'exception* des sommets X et Y.

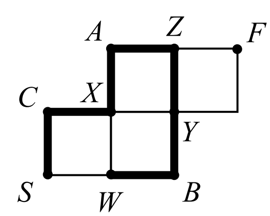


(b) On nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.

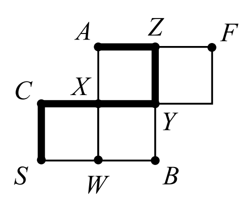


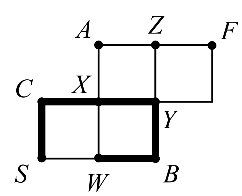
Un chemin commençant à S peut d'abord se diriger vers W ou vers C. Supposons que le chemin commençant à S mène d'abord à W. Dans ce cas, le chemin peut uniquement passer par C en allant de W à X et ensuite à C.
Rendu à C, le chemin ne peut continuer car les deux sommets reliés à C (soit X et S) sont des sommets par lesquels le chemin est déjà passé. Autrement dit, un chemin commençant à S et menant d'abord à W s'arrêtera à C et ne pourra ni passer par les sommets A et B, ni atteindre F.
Donc, un chemin SF passant par C doit d'abord se diriger vers C.
À partir de C, le chemin doit se diriger vers X (puisqu'il ne peut retourner à S). Donc, tout chemin SF passant par C commence d'abord à S et passe par C puis X, soit $S - C - X$.
À partir de X, le chemin peut se diriger dans 3 directions : vers A, vers Y, ou vers W. Considérons chacun de ces trois cas de manière séparée.

Si le chemin se dirige vers A avec pour but de passer par A et B, alors le chemin doit suivre $X - A - Z - Y - B - W$. Or, chaque côté relié à W mène à un sommet par lequel le chemin est déjà passé. Donc, à partir de X, un chemin SF ayant pour but de passer par A et B et de se terminer à F ne peut se diriger vers A.

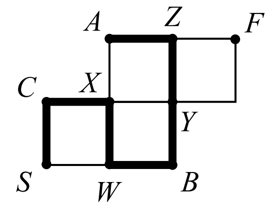


Si le chemin se dirige vers Y avec pour but de passer par A et B, alors le chemin doit suivre $X - Y - Z - A$ ou $X - Y - B - W$. Or, chaque côté relié à A mène à un sommet par lequel le chemin est déjà passé. Il en est de même pour les côtés reliés à W. Donc, à partir de X, un chemin SF ayant pour but de passer par A et B et de se terminer à F ne peut se diriger vers Y.



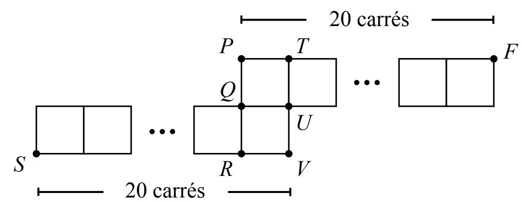


Enfin, si le chemin se dirige vers W avec pour but de passer par A et B, alors le chemin doit suivre $X - W - B - Y - Z - A$. Or, chaque côté relié à A mène à un sommet par lequel le chemin est déjà passé. Donc, à partir de X, un chemin SF ayant pour but de passer par A et B et de se terminer à F ne peut se diriger vers W.



Donc, il n'y a pas de chemin SF qui puisse passer par les trois sommets A, B et C.

(c) On nomme les points P, Q, R, T, U, V de manière à définir la « colonne du milieu » comme dans la figure ci-contre.



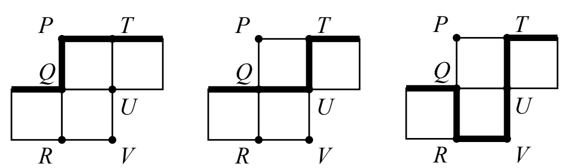
Chaque chemin SF doit passer par au moins l'un de Q ou R et doit également passer par au moins l'un de T ou U.

En venant de la gauche, chaque chemin SF « entre » dans la colonne du milieu en passant par Q ou par R et la « quitte » en passant par T ou par U.

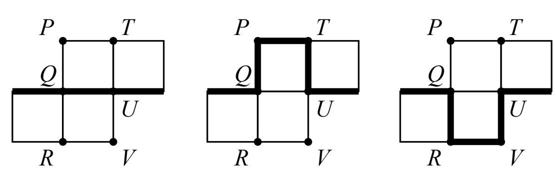
Chaque chemin SF passant par la colonne du milieu appartient exactement à l'un des quatre groupes de chemins suivants :

— Un chemin QT : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par Q et la quitte en passant par T.
— Un chemin QU : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par Q et la quitte en passant par U.
— Un chemin RT : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par R et la quitte en passant par T.
— Un chemin RU : La partie d'un chemin SF venant de la gauche qui entre dans la colonne du milieu en passant par R et la quitte en passant par U.

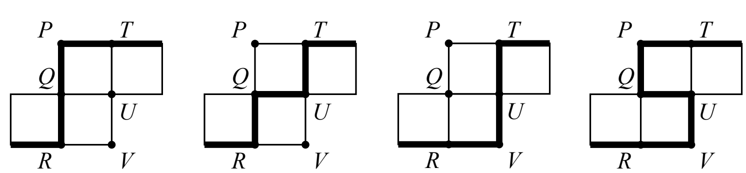
Il y a exactement 3 chemins QT, soit $Q - P - T$, $Q - U - T$ et $Q - R - V - U - T$.



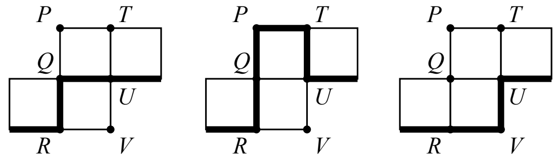
Il y a exactement 3 chemins QU, soit $Q - U$, $Q - P - T - U$ et $Q - R - V - U$.



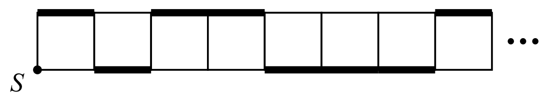
Il y a exactement 4 chemins RT soit $R - Q - P - T$, $R - Q - U - T$, $R - V - U - T$ et $R - V - U - Q - P - T$.



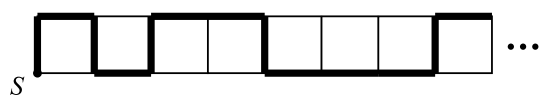
Il y a exactement 3 chemins RU, soit $R - Q - U$, $R - Q - P - T - U$ et $R - V - U$.



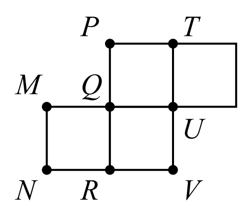
Pour chacun de ces cas, le point terminal gauche (Q ou R) et le point terminal droit (T ou U) sont chacun attachés à un segment de chemin horizontal du carré adjacent.
Il reste donc 18 carrés de chaque côté de la colonne du milieu à travers lesquels le chemin peut passer.
Pour les 18 premiers carrés, un chemin SF peut se diriger de manière horizontale en longeant le côté horizontal inférieur ou supérieur d'un carré.
Par exemple, on voit une sélection possible de côtés supérieurs et inférieurs pour les 8 premiers carrés dans la figure ci-dessous.



Ces choix de côtés supérieurs ou inférieurs déterminent de manière unique le chemin car ce dernier doit suivre des côtés verticaux exactement lorsque le chemin passant à travers deux carrés adjacents a des segments horizontaux différents (l'un suit un côté supérieur tandis que l'autre un côté inférieur).
Dans la figure ci-dessous, on voit où ces côtés verticaux doivent être ajoutés à l'exemple précédent. Il n'y a pas de choix dans la sélection des côtés verticaux une fois que les côtés horizontaux ont été choisis.



Remarquons qu'un chemin ne peut pas suivre à la fois les côtés supérieur et inférieur d'un carré donné car un tel chemin passerait par un sommet plus d'une fois.
Puisque chacun des 18 premiers carrés a deux choix (soit le côté supérieur ou le côté inférieur), alors on a 2^{18} chemins.
Soit M le point à gauche de Q et soit N le point à gauche de R, comme on le voit dans la figure ci-contre.
En venant de la gauche, les 2^{18} chemins se terminent soit à M, soit à N. C'est-à-dire qu'aucun des 2^{18} chemins ne comprend le segment vertical MN.
Combien de ces 2^{18} chemins sont reliés à un chemin QT (par exemple) ?



Chacun des chemins arrivant à N (en venant de la gauche) peut se diriger vers M puis ensuite vers Q tandis que chacun des chemins arrivant à M (en venant de la gauche) peut se diriger directement vers Q.
Donc, il y a exactement 2^{18} chemins qui entrent dans la colonne du milieu en passant par Q (en venant de la gauche). Autrement dit, 2^{18} chemins commencent à S et atteignent Q en venant de la gauche.
De même, 2^{18} chemins commencent à S et atteignent R (en venant de la gauche).

Des arguments semblables démontrent qu'il y a 2^{18} chemins passant par les 18 derniers carrés. Donc, 2^{18} chemins quittent T en se dirigeant vers la droite pour se terminer à F tandis que 2^{18} chemins quittent U en se dirigeant vers la droite pour se terminer à F.

D'après notre analyse précédente, il y a exactement 3 chemins QT. Donc, il y a exactement

$2^{18} \cdot 3 \cdot 2^{18} = 3 \cdot 2^{36}$ chemins SF dont la partie du chemin passant par la colonne du milieu emprunte un chemin QT.
Il y a $3 \cdot 2^{36}$ chemins SF dont la partie du chemin passant par la colonne du milieu emprunte un chemin QU, $4 \cdot 2^{36}$ chemins SF empruntant un chemin RT, et $3 \cdot 2^{36}$ chemins SF empruntant un chemin RU.
Donc, il y a $2^{36}(3 + 3 + 4 + 3)$ ou $13 \cdot 2^{36}$ chemins SF en tout.