Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

*cemc.uwaterloo.ca*

# *Concours Fermat*

## *(11$^e$ année – Sec. V)*

**le mardi 23 février 2021**
***(Amérique du Nord et Amérique du Sud)***

**le mercredi 24 février 2021**
***(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)***

UNIVERSITY OF WATERLOO

**Durée :** 60 minutes 

**Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.**

**Directives**

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
   Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

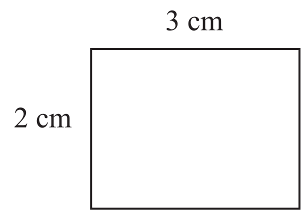
*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

| |
|---|
| Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.<br>On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions. |

**Partie A (5 points par bonne réponse)**

1. Un rectangle a une largeur de 2 cm et une longueur de 3 cm. Quelle est l'aire du rectangle ?




   **(A)** 2 $\text{cm}^2$ **(B)** 9 $\text{cm}^2$ **(C)** 5 $\text{cm}^2$ **(D)** 36 $\text{cm}^2$ **(E)** 6 $\text{cm}^2$

2. L'expression $2 + 3 \times 5 + 2$ est égale à :

   **(A)** 19 **(B)** 27 **(C)** 35 **(D)** 17 **(E)** 32

3. Parmi les nombres suivants, lequel est égal à 25 % de 60 ?

   **(A)** 10 **(B)** 15 **(C)** 20 **(D)** 12 **(E)** 18

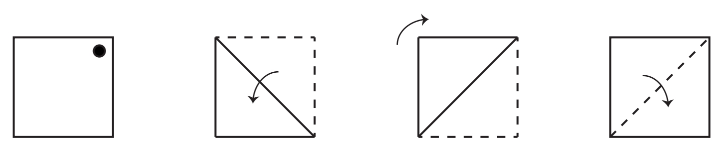
4. Si $x = 2021$, quelle est la valeur de $\dfrac{4x}{x+2x}$ ?

   **(A)** $\dfrac{3}{4}$ **(B)** $\dfrac{4}{3}$ **(C)** 2021 **(D)** 2 **(E)** 6

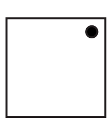
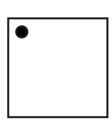
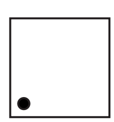
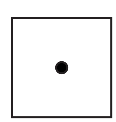
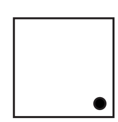
5. Lequel des entiers suivants ne peut *pas* être exprimé comme produit de deux entiers, chacun étant supérieur à 1 ?

   **(A)** 6 **(B)** 27 **(C)** 53 **(D)** 39 **(E)** 77

6. Dans la figure ci-dessous, un morceau de papier carré a un point dans son coin supérieur droit et repose sur une table. Le carré est plié le long de sa diagonale puis subit une rotation autour de son centre de 90° dans les sens des aiguilles d'une montre. Finalement, le morceau de papier est déplié.



   De quoi aura l'air le morceau de papier une fois qu'il aura été déplié ?

   **(A)**  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

7. Pour laquelle des valeurs suivantes de $x$ est-ce que $x$ est supérieur à $x^2$ ?

   **(A)** $x = -2$ **(B)** $x = -\frac{1}{2}$ **(C)** $x = 0$ **(D)** $x = \frac{1}{2}$ **(E)** $x = 2$

8. On renverse l'ordre des chiffres d'un entier strictement positif de deux chiffres. Lorsqu'on soustrait l'entier initial du nouvel entier de deux chiffres, on obtient 54. Quelle est la différence positive entre les deux chiffres de l'entier initial ?

   **(A)** 5 **(B)** 7 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 9

9. La droite d'équation $y = 2x - 6$ subit une translation de 4 unités vers le haut. (Autrement dit, chaque point sur la droite initiale subit une translation de 4 unités vers le haut de manière à former une nouvelle droite.) Quelle est l'abscisse à l'origine de la nouvelle droite ?

**(A)** 3 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** 4 **(D)** 1 **(E)** 2

10. Si $3^x = 5$, quelle est la valeur de $3^{x+2}$ ?

**(A)** 10 **(B)** 25 **(C)** 2187 **(D)** 14 **(E)** 45

---

**Partie B (6 points par bonne réponse)**

11. Dans la somme ci-contre, $P$, $Q$ et $R$ représentent trois entiers distincts de un chiffre chacun. Quelle est la valeur de $P + Q + R$ ?

$$\begin{array}{cccc} & P & 7 & R \\ + & 3 & 9 & R \\ \hline & R & Q & 0 \end{array}$$

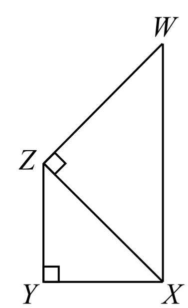
**(A)** 13 **(B)** 12 **(C)** 14

**(D)** 3 **(E)** 4

12. Parmi les 20 carrés parfaits $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 19^2, 20^2$, combien sont divisibles par 9 ?

**(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

13. Dans la figure ci-contre, chacun des triangles $WXZ$ et $XYZ$ est isocèle et rectangle. La longueur de $WX$ est de $6\sqrt{2}$. Le périmètre du quadrilatère $WXYZ$ est plus près de :




**(A)** 18 **(B)** 20 **(C)** 23

**(D)** 25 **(E)** 29

14. Natasha avance 3 fois plus vite en vélo qu'en courant. Elle fait du vélo pendant 4 heures et court pendant 1 heure. Quel est le rapport entre la distance parcourue à vélo et celle parcourue en courant ?

**(A)** 12 : 1 **(B)** 7 : 1 **(C)** 4 : 3 **(D)** 16 : 9 **(E)** 1 : 1

15. Soit $a$ et $b$ des entiers strictement positifs qui vérifient $45a + b = 2021$. Quelle est la valeur minimale possible de $a + b$ ?

**(A)** 44 **(B)** 82 **(C)** 85 **(D)** 86 **(E)** 130

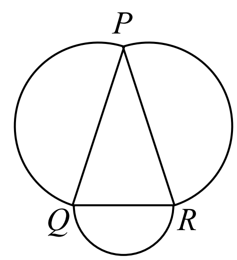
16. Si $n$ est un entier strictement positif, la notation $n!$ (qui se lit « factorielle $n$ ») représente le produit des entiers de 1 à $n$. C'est-à-dire, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $4! = 4(3)(2)(1) = 24$ et $1! = 1$. Si $a$ et $b$ sont des entiers strictement positifs tels que $b > a$, le chiffre des unités de $b! - a!$ ne peut pas être :

**(A)** 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

17. L'ensemble $S$ est composé de 9 entiers strictement positifs distincts. Parmi les entiers de l'ensemble $S$, les deux entiers les plus petits ont une moyenne de 5 tandis que les deux entiers les plus grands ont une moyenne de 22. Quelle est la plus grande moyenne possible de tous les entiers de l'ensemble $S$ ?

**(A)** 15 **(B)** 16 **(C)** 17 **(D)** 18 **(E)** 19

18. Dans la figure ci-contre, le triangle $PQR$ est isocèle ($PQ = PR$). On trace des demi-cercles de diamètres $PQ$, $QR$ et $PR$. Les aires de ces trois demi-cercles ont une somme égale à 5 fois l'aire du demi-cercle de diamètre $QR$. Quelle est la valeur de $\cos(\angle PQR)$ ?




**(A)** $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{\sqrt{8}}$ **(C)** $\frac{1}{\sqrt{12}}$

**(D)** $\frac{1}{\sqrt{15}}$ **(E)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$

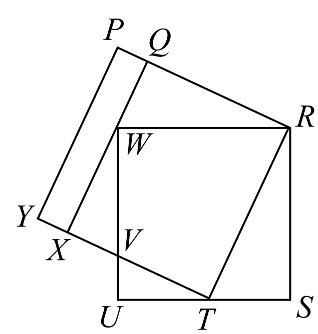
19. Les nombres réels $x$, $y$ et $z$ vérifient les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ xz &= -180 \\ (x+y+z)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Si $S$ est la somme des deux valeurs possibles de $y$, alors $-S$ est égal à :

**(A)** 56 **(B)** 14 **(C)** 36 **(D)** 34 **(E)** 42

20. Dans la figure ci-contre, $PRTY$ et $WRSU$ sont des carrés. Le point $Q$ est situé sur $PR$ et le point $X$ est situé sur $TY$ de manière que $PQXY$ soit un rectangle. De plus, le point $T$ est situé sur $SU$, le point $W$ est situé sur $QX$ et le point $V$ est le point d'intersection de $UW$ et $TY$. Si le rectangle $PQXY$ a une aire de 30, la longueur de $ST$ est plus près de :




**(A)** 5 **(B)** 5,25 **(C)** 5,5

**(D)** 5,75 **(E)** 6

---

**Partie C (8 points par bonne réponse)**

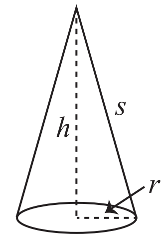
21. Une fonction $f$ est telle que $f(2) = 5$, que $f(3) = 7$ et que

$$f(m) + f(n) = f(mn)$$

pour tous les entiers strictement positifs $m$ et $n$.
(Par exemple, $f(9) = f(3) + f(3) = 14$.) Quelle est la valeur de $f(12)$ ?

**(A)** 17 **(B)** 35 **(C)** 28 **(D)** 12 **(E)** 25

22. Un cône non peint a un rayon de 3 cm et a une génératrice (apothème) dont la longueur est de 5 cm. On place le cône dans un seau de peinture. Lorsque la base circulaire du cône repose à plat sur le fond du seau, la profondeur de la peinture dans le seau est de 2 cm. Lorsque le cône est retiré, sa base circulaire et la partie inférieure de sa surface latérale sont recouvertes de peinture. La fraction de la surface totale du cône qui est recouverte de peinture peut être exprimée sous la forme de $\frac{p}{q}$ , $p$ et $q$ étant des entiers strictement positifs qui n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1. Quelle est la valeur de $p + q$ ?




(La *surface latérale* d'un cône est sa surface externe qui ne comprend pas la base circulaire. Un cône de rayon $r$, de hauteur $h$ et dont la génératrice (apothème) a une longueur de $s$ a une surface latérale dont l'aire est égale à $\pi rs$.)

**(A)** 59 **(B)** 61 **(C)** 63 **(D)** 65 **(E)** 67

23. Dans la Figure 1 ci-dessous, trois points non ombrés sont disposés de manière à former un triangle équilatéral. La Figure 2 est formée en disposant trois copies de la Figure 1 de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant avec 1 point ombré. Pour chaque entier $n > 2$, la Figure $n$ est formée en disposant trois copies de la Figure $n - 1$ de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant au centre avec un triangle inversé de points ombrés.

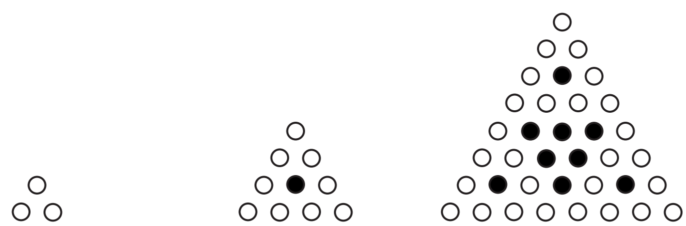


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Quelle est la plus petite valeur de $n$ telle que la Figure $n$ comprend au moins 100 000 points ombrés ?

**(A)** 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

24. On choisit au hasard un couple de nombres réels $(a, b)$ tels que $a^2 + b^2 \leq \frac{1}{4}$. Si la probabilité pour que les courbes définies par les équations $y = ax^2 + 2bx - a$ et $y = x^2$ se coupent est représentée par $p$, alors $100p$ est plus près de :

**(A)** 65 **(B)** 69 **(C)** 53 **(D)** 57 **(E)** 61

25. Soit $N$ le nombre de triplets $(x, y, z)$ d'entiers strictement positifs tels que $x < y < z$ et que $xyz = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2$. Lorsqu'on divise $N$ par 100, quel est le reste ?

**(A)** 28 **(B)** 88 **(C)** 8 **(D)** 68 **(E)** 48

**Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**

***cemc.uwaterloo.ca***

### Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2021! Chaque année, plus de 265 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

### Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours