Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 18 novembre 2020

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 19 novembre 2020

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

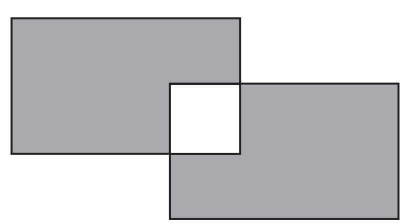
PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Renseignement utile pour la Partie A :
La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone régulier ayant n côtés est égale à $180°(n-2)$.

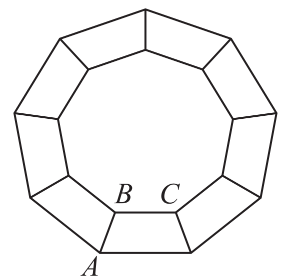
1. Si l'on écrit les cinq nombres $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{41}{100}$; 0,04 ; 0,404 en ordre du plus petit au plus grand, lequel des nombres sera au milieu de la liste ?

2. Dans la figure ci-contre, deux rectangles de dimensions 8×10 se chevauchent de manière à former un carré de dimensions 4×4. Quelle est l'aire totale de la région ombrée ?



3. Une assiette contient 100 bonbons. Chaque jour, Juan retire des bonbons de l'assiette et n'en rajoute pas. Le jour 1, Juan retire 1 bonbon. Le jour 2, Juan retire 2 bonbons. Chaque jour qui suit, Juan retire 1 bonbon de plus qu'il n'en a retiré la veille. Après le jour n, Juan a retiré un total d'au moins 64 bonbons. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

4. Dans la figure ci-contre, neuf trapèzes isocèles identiques sont placés de manière à former un anneau fermé. (Un *trapèze isocèle* est un trapèze dont deux côtés sont parallèles tandis que les deux autres côtés sont isométriques.) Quelle est la mesure de l'angle ABC ?



5. Étant donné que $x \leq y$, déterminer tous les couples d'entiers (x, y) qui vérifient $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$.

6. Il y a 90 joueurs dans une ligue. Chacun des 90 joueurs joue exactement un match contre chacun des 89 autres joueurs. Chaque match se termine soit par une victoire pour un joueur et une défaite pour l'autre joueur, soit par un match nul. Chaque joueur gagne 1 point pour une victoire, 0 point pour une défaite et 0,5 point pour un match nul. Une fois tous les matchs joués, les points gagnés par chaque joueur sont additionnés. Quel est le plus grand nombre possible de joueurs ayant des scores totaux d'au moins 54 points ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

> *Renseignement utile pour la Partie B* :
> Le volume d'une pyramide à base carrée de hauteur h et dont la base a des côtés de longueur a est égal à $\frac{1}{3}a^2h$.

1. Une *suite arithmétique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par example, 3, 5, 7, 9, 11 est une suite arithmétique de cinq termes.

   (a) Les quatre premiers termes d'une suite arithmétique sont 20, 13, 6, -1. Quels sont les deux prochains termes de la suite ?

   (b) Les nombres 2, a, b, c, 14, dans cet ordre, forment une suite arithmétique de cinq termes. Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

   (c) Les nombres 7, 15 et t, disposés dans un ordre inconnu, forment une suite arithmétique de trois termes. Déterminer toutes les valeurs possibles de t.

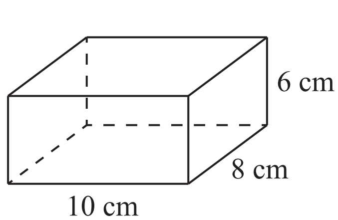
   (d) Les nombres r, s, w, x, y, z, dans cet ordre, forment une suite arithmétique de six termes. La suite comprend les nombres 4 et 20. De plus, le nombre 4 parait avant le nombre 20 dans la suite. Déterminer la plus grande valeur possible de $z - r$ et la plus petite valeur possible de $z - r$.

2. (a) Le réservoir A et le réservoir B sont des prismes droits à base rectangulaire. Ces derniers sont posés à plat sur une table.
Le réservoir A est de dimensions 10 cm $\times$ 8 cm $\times$ 6 cm et l'une de ses faces de dimensions 10 cm $\times$ 8 cm est en contact avec la table.
Le réservoir B est de dimensions 5 cm $\times$ 9 cm $\times$ 8 cm et l'une de ses faces de dimensions 5 cm $\times$ 9 cm est en contact avec la table.
Au départ, le réservoir A est plein d'eau tandis que le réservoir B est vide.
L'eau du réservoir A s'écoule à un débit constant de 4 cm^3/s.
Le réservoir B se remplit d'eau à un débit constant de 4 cm^3/s.
Le réservoir A commence à se vider au même moment que le réservoir B commence à se remplir.

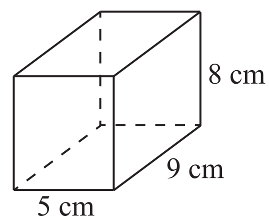
(i) Déterminer le nombre de secondes nécessaires pour que le réservoir B soit rempli à $\frac{1}{3}$ de sa capacité.

(ii) Déterminer la profondeur de l'eau dans le réservoir A au moment où le réservoir B est plein.

(iii) À un certain moment, la profondeur de l'eau dans le réservoir A est égale à la profondeur de l'eau dans le réservoir B. Déterminer cette profondeur.



réservoir A



réservoir B

(b) Le réservoir C est un prisme droit à base rectangulaire de dimensions 31 cm $\times$ 4 cm $\times$ 4 cm.

Le réservoir C est posé à plat sur une table et l'une de ses faces de dimensions 31 cm $\times$ 4 cm est en contact avec la table.

Comme on le voit dans la figure ci-dessous, le réservoir D a la forme d'une pyramide à base carrée inversée. Ce réservoir est soutenu de manière que sa base carrée soit parallèle à la table et que son cinquième sommet soit en contact avec la table.

Le réservoir D a une hauteur de 10 cm et les côtés de sa base carrée mesurent 20 cm.

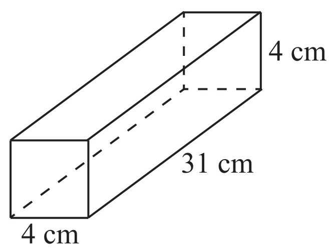
Au départ, le réservoir C est plein d'eau tandis que le réservoir D est vide.

Le réservoir D commence à se remplir d'eau à un débit de 1 cm^3/s.

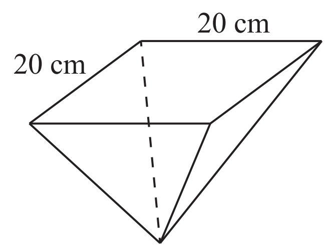
Deux secondes après que le réservoir D a commencé à se remplir d'eau, le réservoir C commence à se vider à un débit de 2 cm^3/s.

À un certain moment, le volume d'eau dans le réservoir C est égal au volume d'eau dans le réservoir D.

Déterminer la profondeur de l'eau dans le réservoir D à ce moment-là.



réservoir C



réservoir D

3. Chacun des entiers a, b, c et d est égal à l'un des nombres suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (Il est possible que deux ou plusieurs des entiers a, b, c et d aient la même valeur.) L'entier P est égal au produit des entiers a, b, c et d ; c'est-à-dire $P = abcd$.

(a) Déterminer si P peut ou non être un multiple de 216.

(b) Déterminer si P peut ou non être un multiple de 2000.

(c) Déterminer le nombre de valeurs différentes possibles de P qui sont divisibles par 128 mais non par 1024.

(d) Déterminer le nombre de quadruplets (a, b, c, d) pour lesquels P est 98 de moins qu'un multiple de 100.

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
intermédiaire
2020
(français)