Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2019

(11$^{\text{e}}$ année – Secondaire V)

le mardi 26 février 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 27 février 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque 10 est le plus grand multiple de 5 qui est aussi inférieur à 14, alors $14 - 10 = 4$, ainsi lorsqu'on divise 14 par 5, il y a un reste de 4.

Réponse : (E)

2. On développe l'expression afin d'obtenir $20(x + y) - 19(y + x) = 20x + 20y - 19y - 19x = x + y$ pour toutes les valeurs de x et de y.

Réponse : (B)

3. On évalue afin d'obtenir $8 - \dfrac{6}{4-2} = 8 - \dfrac{6}{2} = 8 - 3 = 5$.

Réponse : (A)

4. Le segment de la droite numérique qui se trouve entre les valeurs de 3 et de 33 a une longueur égale à $33 - 3 = 30$.
Puisque ce segment est divisé en six parties égales, la longueur de chaque partie est égale à $30 \div 6 = 5$.
Le segment PS comprend trois telles parties et a donc une longueur égale à $3 \times 5 = 15$.
Le segment TV comprend deux telles parties et a donc une longueur égale à $2 \times 5 = 10$.
Ainsi la somme des longueurs de PS et TV est de $15 + 10$, soit 25.

Réponse : (A)

5. Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, alors 20 minutes représentent $\frac{1}{3}$ d'une heure.
Puisque Mike fait du vélo à une vitesse constante de 30 km/h, il va donc parcourir $\frac{1}{3} \times 30$ km ou 10 km en $\frac{1}{3}$ d'une heure.

Réponse : (E)

6. Supposons que $SU = UW = WR = b$ et que $PS = h$.
Puisque la largeur du rectangle $PQRS$ est égale à $3b$ et que sa hauteur est égale à h, donc son aire est égale à $3bh$.
Puisque $SU = b$ et que la distance qui sépare les côtés parallèles PQ et SR est égale à h, donc l'aire du triangle STU est égale à $\frac{1}{2}bh$. De même, les triangles UVW et WXR ont tous les deux des aires égales à $\frac{1}{2}bh$.
Ainsi, la fraction de l'aire du rectangle $PQRS$ qui est ombrée est égale à $\dfrac{3 \times \frac{1}{2}bh}{3bh}$, soit $\dfrac{1}{2}$.

Réponse : (C)

7. Puisque la ville de Cans est située au nord de la ville d'Ernie, donc la ville d'Ernie n'est pas celle qui est située la plus au nord.
Puisque la ville de Dundee est située au sud de la ville de Cans, donc la ville de Dundee n'est pas celle qui est située la plus au nord.
Puisque la ville d'Arva est située au sud de la ville de Blythe, donc la ville d'Arva n'est pas celle qui est située la plus au nord.
Puisque la ville d'Arva est située au nord de la ville de Cans, donc la ville de Cans n'est pas celle qui est située la plus au nord.
La seule possibilité qui reste est que Blythe soit la ville la plus au nord.

L'arrangement suivant est le seul qui satisfait les conditions énoncées dans le problème :

Blythe
Arva
Cans
Dundee
Ernie

Réponse : (B)

8. On remarque que $8 \times 48 \times 81 = 2^3 \times (2^4 \times 3) \times 3^4 = 2^7 \times 3^5 = 2^2 \times 2^5 \times 3^5 = 2^2 \times (2 \times 3)^5 = 2^2 \times 6^5$.
Après que $8 \times 48 \times 81$ soit divisé par 6^5, le quotient ne contient aucun facteur de 3 et donc aucun facteur de 6 ne peut être retiré à partir d'une division ultérieure.
Ainsi, la plus grande valeur entière possible de k qui admettrait 6^k comme diviseur de $8 \times 48 \times 81$ est $k = 5$.

Réponse : (C)

9. La moyenne de $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$ est égale à $\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}{2} = \dfrac{\frac{3}{24}+\frac{4}{24}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{24} = \frac{7}{48}$.

Réponse : (E)

10. Il faut déterminer le plus petit nombre entier qui est supérieur à 30 000 ainsi que le plus grand nombre entier qui est inférieur à 30 000. Ensuite, il faut déterminer lequel des deux est le plus proche de 30 000.
Soit M le plus petit nombre entier que l'on peut créer à partir des chiffres 2, 3, 5, 7 et 8 qui serait supérieur à 30 000 et dans lequel chaque chiffre ne parait qu'une seule fois.
Puisque M est supérieur à 30 000, son chiffre des dizaines de milliers ne peut être inférieur à 3.
Afin que M soit aussi petit que possible (tout en restant supérieur à 30 000), on lui attribue le 3 comme chiffre des dizaines de milliers.
Afin que M soit aussi petit que possible, son chiffre des milliers devrait être aussi petit que possible, on lui attribue donc la valeur de 2.
En suivant ce raisonnement, on lui attribue le 5 comme chiffre des centaines, le 7 comme chiffre des dizaines, et le 8 comme chiffre des unités. Donc $M = 32\,578$.
Soit m le plus grand nombre entier que l'on peut créer à partir des chiffres 2, 3, 5, 7 et 8 qui serait inférieur à 30 000 et dans lequel chaque chiffre ne parait qu'une seule fois.
Puisque m est inférieur à 30 000, son chiffre des dizaines de milliers doit être inférieur à 3. Donc, ce dernier doit être un 2.
Afin que m soit aussi grand que possible (tout en restant inférieur à 30 000), son chiffre des milliers devrait être aussi grand que possible, on lui attribue donc la valeur de 8.
En suivant ce raisonnement, on lui attribue le 7 comme chiffre des centaines, le 5 comme chiffre des dizaines, et le 3 comme chiffre des unités. Donc $m = 28\,753$.
Puisque $M - 30\,000 = 2578$ et que $30\,000 - m = 1247$, alors m est le plus proche de 30 000.
Donc, $N = m = 28\,753$. Ce dernier a un 5 comme chiffre des dizaines.

Réponse : (B)

11. La droite d'équation $y = x - 3$ a une pente de 1.
Afin de déterminer l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = x - 3$, on pose $y = 0$ et on résout afin d'obtenir $x - 3 = 0$ ou $x = 3$. Donc la droite ℓ a aussi une abscisse à l'origine de 3.
De plus, puisque les deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs pentes doivent avoir un produit égal à -1. Cela signifie que la pente de la droite ℓ est égale à -1.

La droite ℓ a une pente de -1 et le point (3,0) est situé sur la droite.
Cela signifie que l'équation de la droite ℓ est $y - 0 = -1(x - 3)$ ou $y = -x + 3$.
Donc, l'ordonnée à l'origine de la droite ℓ est égale à 3.

RÉPONSE : (C)

12. Alberto a bien répondu à 70 % des 30 questions de la première partie.
Donc Alberto a bien répondu à $\frac{70}{100} \times 30 = 21$ questions de la première partie.
Alberto a bien répondu à 40 % des 50 questions de la deuxième partie.
Donc Alberto a bien répondu à $\frac{40}{100} \times 50 = 20$ questions de la deuxième partie.
En tout, Alberto a bien répondu à $21 + 20 = 41$ questions parmi $30 + 50 = 80$ questions.
Cela représente un pourcentage de $\frac{41}{80} \times 100\ \% = 51{,}25\ \%$.
Parmi les choix de réponse, (D) 51 % est le choix le plus proche.

RÉPONSE : (D)

13. Au moment où Tanis vérifia l'heure, $8x$ minutes s'étaient écoulées depuis 7h00 et il ne restait plus que $7x$ minutes avant 8h00.
De 7h00 à 8h00, il y a 60 minutes. Donc, $8x + 7x = 60$ d'où $15x = 60$ ou $x = 4$.
Étant donné que $8x$ minutes s'étaient écoulées depuis 7h00, donc $8x = 32$ minutes s'étaient écoulées depuis 7h00. Tanis a donc vérifié l'heure à 7h32. (On remarque d'ailleurs qu'à 7h32, il ne restait plus que $28 = 7x$ minutes avant 8h00.)

RÉPONSE : (C)

14. Chacune des lettres A, B, C, D et E ne parait qu'une seule fois dans chaque colonne et dans chaque rangée.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne ne peut pas être un A, un E, ou un B (car ces lettres se trouvent déjà dans la colonne). Elle n'est aussi pas un C ou un A (car ces lettres se trouvent déjà dans la rangée).
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la première colonne est donc un D.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la quatrième rangée de la première colonne doit être un C.
La lettre qui se trouve dans la deuxième rangée de la cinquième colonne ne peut pas être un D, un C, un A ou un E et doit donc être un B.
Cela significe que la lettre dans la deuxième rangée de la deuxième colonne doit être un E.
En suivant le même raisonnement, les lettres qui se trouvent dans la première rangée des 3^{e} et 4^{e} colonnes sont respectivement D et B.
Cela signifie que la lettre qui se trouve dans la première rangée de la deuxième colonne doit être un C.
En suivant le même raisonnement, la lettre qui se trouve dans la cinquième rangée de la deuxième colonne doit être un A.
De plus, la lettre qui se trouve dans la troisième rangée de la deuxième colonne doit être un D.
Donc, la lettre qui va dans la case indiquée par le $*$ doit être un B.
On peut remplir le quadrillage de la manière suivante :

A	C	D	B	E
D	E	C	A	B
E	D	B	C	A
C	B	A	E	D
B	A	E	D	C

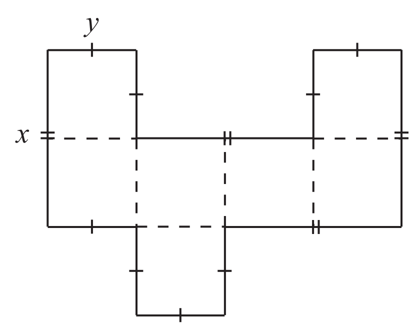
RÉPONSE : (B)

15. Étant donné qu'il y a six boules rouges et trois boules vertes et qu'on en sélectionne quatre au hasard, ces quatre boules pourraient être :
   - 4 boules rouges, ou
   - 3 boules rouges et 1 boule verte, ou
   - 2 boules rouges et 2 boules vertes, ou
   - 1 boule rouge et 3 boules vertes.

   Un groupe de 4 boules rouges n'a qu'un seul arrangement visiblement différent.
   Un groupe composé de 3 boules rouges et d'une boule verte n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule verte peut être dans la 1re, 2e, 3e ou 4e position.
   Un groupe composé de 2 boules rouges et de 2 boules vertes n'a que six arrangements visiblement différents car les boules rouges peuvent se trouver dans les couples de positions suivantes : 1re/2e, 1re/3e, 1re/4e, 2e/3e, 2e/4e ou 3e/4e.
   Un groupe composé d'une boule rouge et de 3 boules vertes n'a que quatre arrangements visiblement différents : dans les arrangements, la boule rouge peut être dans la 1re, 2e, 3e ou 4e position.
   En tout, il y a $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ arrangements visiblement différents.

   Réponse : (A)

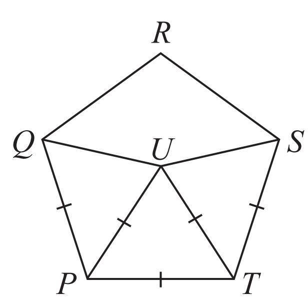
16. Puisque $x = 2y$, on peut diviser la figure en 7 carrés qui mesurent y par y en traçant des lignes pointillées qui sont parallèles aux divers côtés de la figure :

   Étant donné que la figure a une aire de 252, alors $7y^2 = 252$ ou $y^2 = 36$.
   Puisque $y > 0$, donc $y = 6$.
   Le périmètre de la figure est composé de 16 segments dont la longueur de chacun est égale à y.
   Ainsi le périmètre est égal à $16 \times 6 = 96$.

   Réponse : (A)

17. On relie QU et SU.
   Puisque PUT est un triangle équilatéral, alors $PU = UT = TP$.
   Puisque $PQRST$ est un pentagone régulier, alors $QP = PT = TS$.
   Donc, $PU = QP$ et $UT = TS$. Cela signifie que QPU et STU sont des triangles isocèles.

   Les angles intérieurs d'un pentagone régulier ont tous la même mesure de 108°.
   Puisque $\angle UPT = 60°$, donc $\angle QPU = \angle QPT - \angle UPT = 108° - 60° = 48°$.

Puisque QPU est un triangle isocèle où $QP = PU$, donc $\angle PQU = \angle PUQ$.
Ainsi, $\angle PUQ = \frac{1}{2}(180° - \angle QPU) = \frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°$.
À l'aide de la symétrie, $\angle TUS = 66°$.
Enfin, $\angle QUS = 360° - \angle PUQ - \angle PUT - \angle TUS = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°$.

Réponse : (B)

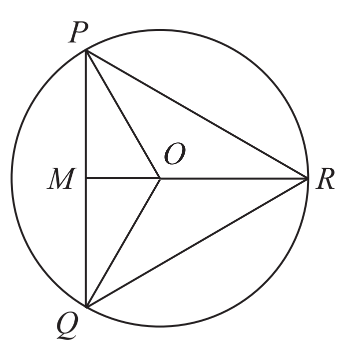
18. Soit n un entier positif à 7 chiffres qui comprend uniquement les chiffres 0 et 1 et qui est divisble par 6.
Le premier chiffre de n (soit le chiffre tout à gauche) ne peut pas être un 0, il doit donc être un 1.
Puisque n est divisible par 6, donc n est un nombre pair. Cela signifie que le dernier chiffre de n (soit le chiffre le plus à droite) ne peut pas être un 1, il doit donc être un 0.
Ainsi, n prend la forme $1\,pqr\,st0$ où les valeurs de p, de q, de r, de s et de t sont soit 0, soit 1.
n est divisible par 6 uniquement lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.
Puisque n a un 0 comme chiffre des unités, il est donc divisible par 2.
n est divisible par 3 uniquement lorsque la somme de ses chiffres est divible par 3.
Les chiffres de n ont une somme qui est égale à $1 + p + q + r + s + t$.
Puisque les valeurs de p, de q, de r, de s et de t sont soit 0, soit 1, donc $1 \leq 1+p+q+r+s+t \leq 6$.
Ainsi, n est divisible par 3 uniquement lorsque $1 + p + q + r + s + t$ est égal à 3 ou à 6.
C'est-à-dire, n est divisble par 3 quand exactement 2 valeurs parmi les valeurs de p, q, r, s et t sont des 1 ou quand toutes les 5 valeurs de p, q, r, s, t sont des 1.
Les valeurs de p, q, r, s et t peuvent contenir deux 1 de dix façons différentes : soit les couples $pq, pr, ps, pt, qr, qs, qt, rs, rt, st$.
Par contre, si toutes les valeurs de p, q, r, s, t sont des 1, ceci ne peut se produire que d'une seule façon.
Donc, il y a $1 + 10 = 11$ entiers positifs à 7 chiffres qui comprennent uniquement les chiffres 0 et 1 et qui sont divisbles par 6.

Réponse : (B)

19. On utilise l'équation fonctionnelle $f(2x + 1) = 3f(x)$ de manière répétée :
On pose $x = 1$ afin d'obtenir $f(3) = 3f(1) = 3 \times 6 = 18$.
On pose $x = 3$ afin d'obtenir $f(7) = 3f(3) = 3 \times 18 = 54$.
On pose $x = 7$ afin d'obtenir $f(15) = 3f(7) = 3 \times 54 = 162$.
On pose $x = 15$ afin d'obtenir $f(31) = 3f(15) = 3 \times 162 = 486$.
On pose $x = 31$ afin d'obtenir $f(63) = 3f(31) = 3 \times 486 = 1458$.

Réponse : (D)

20. Supposons que le cercle de centre O a un rayon de 2 et que les sommets du triangle équilatéral PQR sont situés sur le cercle.
On relie OP, OQ et OR. On relie O à M, ce dernier étant le point milieu du segment PQ.



Puisque le rayon du cercle est égal à 2, donc $OP = OQ = OR = 2$.
À l'aide de la symétrie, $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP$.
Puisque les trois angles ont des mesures dont la somme est égale à 360°, alors $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP = 120°$.
Puisque POQ est un triangle isocèle où $OP = OQ$ et que M est le point milieu du segment PQ, donc OM est non seulement une altitude mais est aussi une bissectrice.
Donc, $\angle POM = \frac{1}{2}\angle POQ = 60°$. Cela signifie que POM est un triangle dont les angles ont des mesures de 30°-60°-90°.
Puisque $OP = 2$ et est le côté opposé à l'angle de 90°, donc $OM = 1$ et $PM = \sqrt{3}$.
Puisque $PM = \sqrt{3}$, donc $PQ = 2PM = 2\sqrt{3}$.
Ainsi, le triangle POQ a une aire égale à $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$.
Puisque les triangles POQ, QOR et ROP sont congruents, leurs aires sont pareilles.
Cela signifie que l'aire du triangle PQR est égale à trois fois l'aire du triangle POQ, soit $3\sqrt{3}$.

RÉPONSE : (A)

21. *Solution 1*

On commence par les chiffres des unités.
Puisque $4 \times 4 = 16$, donc $T = 6$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, puisque $4 \times 6 + 1 = 25$, donc $S = 5$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des centaines.
Dans la colonne des centaines, puisque $4 \times 5 + 2 = 22$, donc $R = 2$, on reporte ensuite le 2 à la colonne des milliers.
Dans la colonne des milliers, puisque $4 \times 2 + 2 = 10$, donc $Q = 0$, on reporte ensuite le 1 à la colonne des dizaines de milliers.
Dans la colonne des dizaines de milliers, puisque $4 \times 0 + 1 = 1$, donc $P = 1$, on reporte ensuite le 0 à la colonne des centaines de milliers.
Dans la colonne des centaines de milliers, $4 \times 1 + 0 = 4$, comme prévu.
Voici donc la multiplication :

$$\begin{array}{rr} & 1\,0\,2\,5\,6\,4 \\ \times & 4 \\ \hline & 4\,1\,0\,2\,5\,6 \end{array}$$

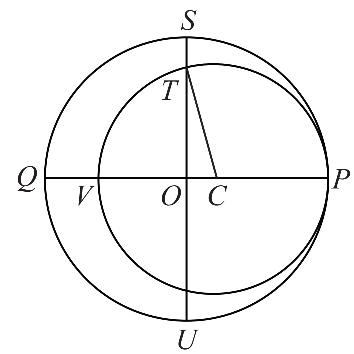
Enfin, $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Solution 2

Soit x l'entier à cinq chiffres $PQRST$.
Cela signifie que $PQRST0 = 10x$, ainsi $PQRST4 = 10x + 4$.
De plus, $4PQRST = 400\,000 + PQRST = 400\,000 + x$.
À partir de la multiplication, $4(10x + 4) = 400\,000 + x$, d'où $40x + 16 = 400\,000 + x$ ou $39x = 399\,984$.
Donc, $x = \dfrac{399\,984}{39} = 10\,256$.
Puisque $PQRST = 10\,256$, alors $P + Q + R + S + T = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

RÉPONSE : (A)

22. Soit D la longueur du diamètre du grand cercle. Soit d la longueur du diamètre du petit cercle. Puisque QP et VP sont respectivement les diamètres du grand cercle et du petit cercle, alors $QV = QP - VP = D - d$.
Puisque $QV = 9$, alors $D - d = 9$.
Soit C le centre du petit cercle et relions C à T. Puisque $D > d$, C se trouve à la droite de O le long de QP.



Puisque CT est un segment qui représente le rayon du petit cercle, donc $CT = \frac{1}{2}d$.
De plus, $OC = OP - CP$. Puisque OP et CP sont les rayons des deux cercles, donc $OC = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}d$.
Puisque SO est un segment qui représente le rayon du grand cercle et que $ST = 5$, donc $TO = SO - ST = \frac{1}{2}D - 5$.
Puisque QP et SU sont perpendiculaires l'un à l'autre, alors le triangle TOC est rectangle en O.
À l'aide du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
TO^2 + OC^2 &= CT^2 \\
\left(\tfrac{1}{2}D - 5\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}d\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 \\
4\left(\tfrac{1}{2}D - 5\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}d\right)^2 &= 4\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 \\
(D-10)^2 + (D-d)^2 &= d^2 \\
(D-10)^2 + 9^2 &= d^2 \\
81 &= d^2 - (D-10)^2 \\
81 &= (d - (D-10))(d + (D-10)) \\
81 &= (d - D + 10)(d + (D-10)) \\
81 &= (10 - (D-d))(d + D - 10) \\
81 &= (10-9)(d + D - 10) \\
81 &= d + D - 10 \\
91 &= d + D
\end{aligned}$$

ainsi, les deux cercles ont des longueurs de diamètres dont la somme est égale à 91.

Réponse : (B)

23. Considérons avant tout les entiers qui peuvent être exprimés par la somme de quatre entiers positifs consécutifs.
Le plus petit de ces entiers est donc $1+2+3+4 = 10$ tandis que celui d'après est $2+3+4+5 = 14$.
On remarque qu'en passant de $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)$ à $(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)$, la somme a augmenté de 4 (puisque les trois autres termes n'ont pas changé, on peut attribuer ce changement à la différence entre le terme $k+4$ et le terme k).
Ainsi, les entiers positifs qui peuvent être exprimés par la somme de 4 entiers positifs consécutifs sont les entiers de la suite arithmétique dont le premier terme est égal à 10 et dont la raison est égale à 4.
Puisque $n \leq 100$, ces entiers sont

$$10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90, 94, 98$$

Donc, il y a 23 tels entiers.
Considérons maintenant les entiers positifs $n \leq 100$ qui peuvent être exprimés par la somme de cinq entiers positifs consécutifs.
Le plus petit de ces entiers est donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ tandis que celui d'après est $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.
En suivant le même raisonnement que ci-dessus, ces entiers forment une suite arithmétique dont le premier terme est égal à 15 et dont la raison est égale à 5.
Puisque $n \leq 100$, ces entiers sont $15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$.
Quand on exclut les entiers qui paraissent déjà dans la liste d'avant (30, 50, 70, 90), on obtient

$$15, 20, 25, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 75, 80, 85, 95, 100$$

Donc, il y a 14 tels entiers.
Considérons maintenant les entiers positifs $n \leq 100$ qui peuvent être exprimés par la somme de six entiers positifs consécutifs.
Ces entiers forment une suite arithmétique dont le premier terme est égal à 21 et dont la raison est égale à 6.
Puisque $n \leq 100$, ces entiers sont $21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99$.
Quand on exclut les entiers qui paraissent déjà dans la liste d'avant (45, 75), on obtient

$$21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69, 81, 87, 93, 99$$

Donc, il y a 12 tels entiers.
Puisque $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105$ et que ce dernier est le plus petit entier qui puisse être exprimé par la somme de 14 entiers positifs consécutifs, donc aucun $n \leq 100$ n'est la somme d'au moins 14 entiers positifs consécutifs (car toute somme de 15 entiers positifs consécutifs sera forcément supérieure à 105 - cette somme ne fera qu'augmenter au fur et à mesure qu'augmente le nombre d'entiers positifs consécutifs.)
Ainsi, si un entier $n \leq 100$ peut être exprimé par la somme de $s \geq 4$ entiers consécutifs, alors $s \leq 13$.
On dresse un tableau afin d'énumérer les $n \leq 100$ qu'on n'a pas encore énoncé et qui proviennent des valeurs de s où $7 \leq s \leq 13$:

s	Le n le plus petit	Les $n \leq 100$ possibles	Nouveau n
7	28	$28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$	$28, 49, 56, 77, 84, 91$
8	36	$36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100$	$36, 44, 52, 68, 76, 92$
9	45	$45, 54, 63, 72, 81, 90, 99$	72
10	55	$55, 65, 75, 85, 95$	Aucun
11	66	$66, 77, 88, 99$	88
12	78	$78, 90$	Aucun
13	91	91	Aucun

Il y a en tout $23 + 14 + 12 + 6 + 6 + 1 + 1 = 63$ telles valeurs de n.
Que remarquez-vous à propos des valeurs de n qui ne peuvent pas être exprimées de cette manière ?

RÉPONSE : (B)

24. Une équation quadratique a deux solutions réelles distinctes uniquement lorsque son discriminant est positif.
Le discriminant de l'équation quadratique $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ est

$$\Delta = (r + 7)^2 - 4(1)(r + 87) = r^2 + 14r + 49 - 4r - 348 = r^2 + 10r - 299$$

Puisque $\Delta = r^2 + 10r - 299 = (r + 23)(r - 13)$ d'où les racines $r = -23$ et $r = 13$, alors $\Delta > 0$ lorsque $r > 13$ ou $r < -23$. (On pourrait aussi examiner l'emplacement de la parabole de l'équation $y = x^2 + 10x - 299 = (x + 23)(x - 13)$ afin de déterminer les intervalles où elle serait située au-dessus de l'axe des abscisses.)

De plus, les deux solutions de l'équation quadratique d'origine doivent être négatives.
Si $r > 13$, donc l'équation $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ est de la forme $x^2 - bx + c = 0$ où b et c sont tous les deux positifs.
Dans ce cas, si $x < 0$, donc $x^2 > 0$, $-bx > 0$ et $c > 0$ d'où $x^2 - bx + c > 0$.
Ainsi, il n'y a pas de solutions négatives si $r > 13$.
Donc logiquement, $r < -23$. Cette condition est nécessaire quoiqu'elle ne garantit pas des solutions négatives.
On considère alors $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ avec la condition $r < -23$.
Cette équation quadratique est de la forme $x^2 - bx + c = 0$ où $b < 0$ et où la valeur de c est toujours inconnue (celle-ci pourrait être positive, négative, ou égale à 0).
On sait par contre que cette équation a deux solutions réelles distinctes.
Soient s et t les solutions réelles de l'équation quadratique $x^2 - bx + c = 0$.
Cela signifie que les facteurs de $x^2 - bx + c$ doivent être $x - s$ et $x - t$.
Autrement dit, $(x - s)(x - t) = x^2 - bx + c$.
Donc,

$$(x - s)(x - t) = x^2 - tx - sx + st = x^2 - (s + t)x + st$$

Puisque $(x-s)(x-t) = x^2-bx+c$, donc, pour toutes valeurs de x, $x^2-(s+t)x+st = x^2-bx+c$.
Cela signifie que $b = (s + t)$ et que $c = st$.
Puisque $b < 0$, donc s et t ne peuvent pas être tous les deux positifs car $b = s + t$.
Si $c = 0$, donc soit $s = 0$, soit $t = 0$.
Si $c < 0$, donc soit s est positif et t est négatif, soit s est négatif et t est positif.
Si $c = st$ est positif, alors s et t sont soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs. Par contre, puisque $b < 0$, donc s et t ne peuvent pas être tous les deux positifs et doivent donc être tous les deux négatifs.
Sachant que l'équation $x^2 - bx + c = 0$ a deux racines réelles distinctes et que $b < 0$, la condition que les deux racines soient négatives équivaut à la condition que $c > 0$.
Donc $c = r + 87$ d'où $c > 0$ seulement quand $r > -87$.
Enfin, cela signifie que l'équation $x^2 - (r + 7)x + r + 87 = 0$ a deux racines réelles distinctes négatives quand $-87 < r < -23$.
Cela signifie que $p = -87$ et que $q = -23$ d'où $p^2 + q^2 = 8098$.

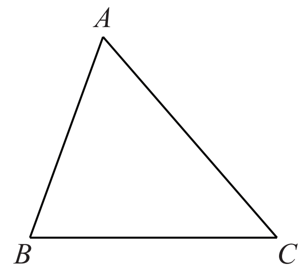
RÉPONSE : (E)

25. On utilisera dans cette solution deux résultats géométriques :

(i) *L'inégalité triangulaire*

Ce résultat stipule que chacune des inégalités suivantes est vraie pour le triangle ABC :

$$AB + BC > AC \qquad AC + BC > AB \qquad AB + AC > BC$$

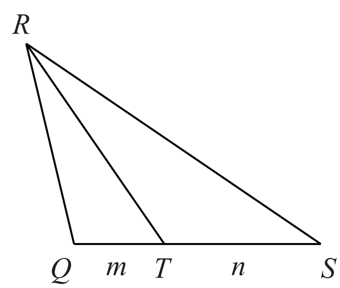


Ce résultat provient de l'idée que la distance la plus courte entre deux points est la longueur du segment de droite qui relierait ces deux points.

Par exemple, la distance la plus courte entre le point A et le point C est égale à la longueur du segment de droite qui relierait ces deux points, soit le segment AC. Donc, la longueur d'un chemin qui mène du point A au point C mais qui passe par le point B (qui lui n'est pas situé sur le segment AC) peut être exprimée par $AB + BC$. Logiquement ce chemin est plus long que le chemin en ligne droite AC, donc $AB + BC > AC$.

(ii) *Le théorème de la bissectrice*

Étant donné que $\angle QRT = \angle SRT$ dans le triangle du problème, on en déduit que RT est la bissectrice de l'angle QRS. Puisque RT est la bissectrice de l'angle QRS, le théorème de la bissectrice soutient que $\dfrac{QT}{TS} = \dfrac{RQ}{RS}$.



On peut vérifier le théorème de la bissectrice à l'aide de la loi des sinus :

Dans le triangle RQT, on a $\dfrac{RQ}{\sin(\angle RTQ)} = \dfrac{QT}{\sin(\angle QRT)}$.

Dans le triangle RST, on a $\dfrac{RS}{\sin(\angle RTS)} = \dfrac{TS}{\sin(\angle SRT)}$.

On divise la première équation par la deuxième afin d'obtenir :

$$\frac{RQ\sin(\angle RTS)}{RS\sin(\angle RTQ)} = \frac{QT\sin(\angle SRT)}{TS\sin(\angle QRT)}$$

Puisque $\angle QRT = \angle SRT$, alors $\sin(\angle QRT) = \sin(\angle SRT)$.

Puisque $\angle RTQ = 180^\circ - \angle RTS$, alors $\sin(\angle RTQ) = \sin(\angle RTS)$.

À partir de ces trois égalités, on obtient $\dfrac{RQ}{RS} = \dfrac{QT}{TS}$ comme voulu.

On procède maintenant à la résolution du problème.

À l'aide du théorème de la bissectrice, $\dfrac{RQ}{RS} = \dfrac{QT}{TS} = \dfrac{m}{n}$.
Donc, on pose $RQ = km$ et $RS = kn$, k étant un un nombre réel où $k > 0$.
À l'aide de l'inégalité triangulaire , $RQ + RS > QS$.
Cela équivaut à l'inégalité $km + kn > m + n$ ou $k(m + n) > m + n$.
Puisque $m + n > 0$, cela équivaut à $k > 1$.
On se sert de l'inégalité triangulaire une deuxième fois afin de stipuler que $RQ + QS > RS$.
Ceci équivaut à $km + m + n > kn$, d'où $k(n - m) < n + m$.
Puisque $n > m$, alors $n - m > 0$ d'où on obtient $k < \dfrac{n+m}{n-m}$.
(Puisqu'on est déjà conscient du fait que $RS > RQ$, une troisième application de l'inégalité triangulaire ne fournira aucune information supplémentaire. Voyez-vous pourquoi ?)

Le périmètre, p, du triangle QRS est égal à $RQ+RS+QS = km+kn+m+n = (k+1)(m+n)$.
Puisque $k > 1$, donc $p > 2(m + n)$.
Puisque $2(m + n)$ est un entier, alors la plus petite valeur entière possible de p est égale à $2m + 2n + 1$.
Puisque $k < \dfrac{n+m}{n-m}$, alors $p < \left(\dfrac{n+m}{n-m} + 1\right)(n + m)$.
Puisque $n+m$ est un multiple de $n-m$, alors $\left(\dfrac{n+m}{n-m} + 1\right)(n+m)$ est un entier. Donc la plus grande valeur entière possible de p est égale à $\left(\dfrac{n+m}{n-m} + 1\right)(n + m) - 1$.
On peut atteindre toute valeur possible de p dans l'intervalle de $2m + 2n + 1$ à $\left(\dfrac{n+m}{n-m} + 1\right)(n + m) - 1$. On peut constater ceci en commençant par le point R (qui lui se trouve presque au point T) et en l'éloigant doucement de QS tout en préservant le rapport $\dfrac{RQ}{RS}$ jusqu'à ce que le triangle soit presque plat de manière que RS soit situé le long de RQ et de QS.
On sait que la plus petite valeur entière possible de p est égale à $2m + 2n + 1$ et que la plus grande valeur entière possible de p est égale à $\left(\dfrac{n+m}{n-m} + 1\right)(n + m) - 1$.
Le nombre d'entiers dans cet intervalle est égal à

$$\left(\left(\frac{n+m}{n-m} + 1\right)(n + m) - 1\right) - (2m + 2n + 1) + 1$$

À partir des informations fournies dans le problème, le nombre de valeurs entières possibles de p est égal à $m^2 + 2m - 1$.

On obtient donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)-1\right)-(2m+2n+1)+1&=m^2+2m-1\\
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)\right)-(2m+2n)&=m^2+2m\\
\left(\left(\frac{n+m}{n-m}+\frac{n-m}{n-m}\right)(n+m)\right)-(2m+2n)&=m^2+2m\\
\left(\frac{2n}{n-m}\right)(n+m)-2m-2n&=m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-2m-2n&=m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-\frac{2(n+m)(n-m)}{n-m}&=m^2+2m\\
\frac{2n^2+2nm}{n-m}-\frac{2n^2-2m^2}{n-m}&=m^2+2m\\
\frac{2m^2+2nm}{n-m}&=m^2+2m\\
\frac{2m+2n}{n-m}&=m+2 \qquad \text{(since } m\neq 0\text{)}\\
2m+2n&=(m+2)(n-m)\\
2m+2n&=nm+2n-m^2-2m\\
0&=nm-m^2-4m\\
0&=m(n-m-4)
\end{aligned}$$

Puisque $m > 0$, alors $n - m - 4 = 0$ d'où $n - m = 4$.

Dans le but d'élaborer l'exemple d'un tel triangle, supposons que $m = 2$ et que $n = 6$.

Dans ce cas, $\frac{n+m}{n-m} = 2$, d'où $2n + 2m + 1 = 17$ représenterait le plus petit périmètre et d'où $\left(\frac{n+m}{n-m}+1\right)(n+m)-1 = 23$ représenterait le plus grand périmètre.

De 17 à 23, il y a 7 entiers. Cela équivaut à $m^2 + 2m - 1$ or $2^2 + 2(2) - 1$ comme prévu.

Réponse : (A)