Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 3 avril 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 4 avril 2019
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

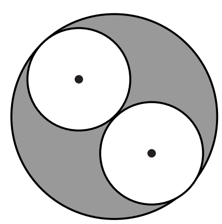
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Joyce a deux pots identiques. Le premier pot contient 300 mL d'eau et n'est rempli qu'à $\frac{3}{4}$. Un deuxième pot n'est rempli qu'à $\frac{1}{4}$. Quelle quantité d'eau le second pot contient-il en mL ?

   (b) Quel entier a vérifie $3 < \dfrac{24}{a} < 4$?

   (c) Si $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = 2$, déterminer toutes les valeurs possibles de x.

2. (a) Dans la figure ci-contre, deux petits cercles de rayon 1 sont tangents l'un à l'autre. Ces derniers sont aussi tangents à un cercle plus grand de rayon 2. Quelle est l'aire de la région ombrée ?



   (b) Kari fait du jogging à une vitesse constante de 8 km/h. Mo fait du jogging à une vitesse constante de 6 km/h. Kari et Mo commencent à faire du jogging en ligne droite à partir du même point de départ jusqu'au même point d'arrivée. Mo commence à faire du jogging à 10h00. Kari et Mo finissent tous les deux à 11h00. À quelle heure Kari a-t-elle commencé à faire du jogging ?

   (c) La droite d'équation $x + 3y = 7$ est parallèle à la droite d'équation $y = mx + b$. La droite d'équation $y = mx + b$ passe par le point $(9, 2)$. Déterminer la valeur de b.

3. (a) Michèle calcule la moyenne des nombres suivants :

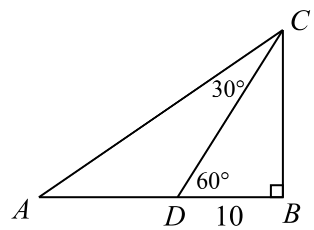
$$5, 10, 15, 16, 24, 28, 33, 37$$

Daphne enlève un nombre et calcule la moyenne des nombres restants. Daphne a calculé une moyenne qui est inférieure de 1 à celle qu'a calculé Michèle. Lequel des nombres Daphne a-t-elle enlevé ?

(b) Si $16^{\frac{15}{x}} = 32^{\frac{4}{3}}$, quelle est la valeur de x ?

(c) Étant donné que $\dfrac{2^{2022} + 2^a}{2^{2019}} = 72$. Déterminer la valeur de a.

4. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B et le point D est situé sur AB. Si $DB = 10$, $\angle ACD = 30°$ et $\angle CDB = 60°$, quelle est la longueur de AD ?



(b) Les points $A(d, -d)$ et $B(-d + 12, 2d - 6)$ sont situés sur un cercle dont le centre est situé à l'origine. Déterminer les valeurs possibles de d.

5. (a) Déterminer les deux couples d'entiers positifs (a, b) qui vérifient l'équation

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{50}$$

étant donné que $a < b$.

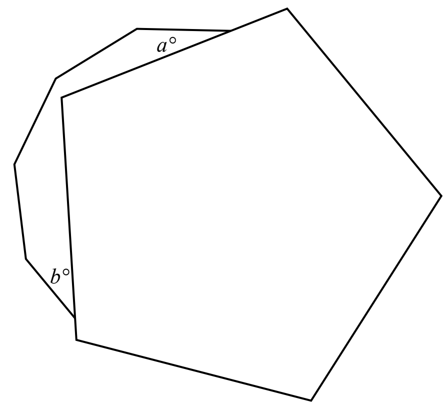
(b) On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} c + d &= 2000 \\ \frac{c}{d} &= k \end{aligned}$$

Déterminer le nombre d'entiers k, où $k \geq 0$, qui admettraient au moins un couple d'entiers (c, d) comme solution au système.

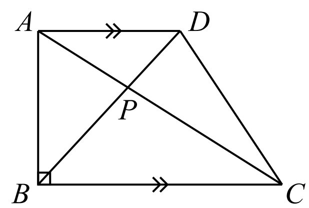
6. (a) Dans la figure ci-contre, un pentagone régulier recouvre une partie d'un autre polygone régulier. Ce polygone régulier a n côtés, dont cinq sont complètement ou partiellement visibles. Dans la figure, la somme des mesures des angles dénotés $a°$ et $b°$ est égale à $88°$. Déterminer la valeur de n.

(Un *polygone régulier* est un polygone dont les côtés sont de même longueur et dont les angles intérieurs sont de même mesure.)



(b) Dans le trapèze $ABCD$, BC est parallèle à AD mais est perpendiculaire à AB. De plus, les longueurs de AD, de AB et de BC, forment dans cet ordre une suite géométrique. Démontrer que AC est perpendiculaire à BD.

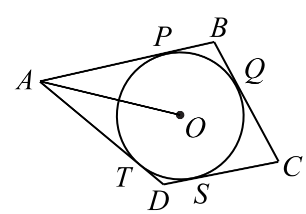
(Une *suite géométrique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante dont la valeur n'est pas 0.)



7. (a) Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels $2\log_2(x-1) = 1 - \log_2(x+2)$.

(b) On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. Déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'équation $f(f(f(x))) = 3$.

8. (a) Dans la figure ci-contre, un cercle de centre O a un rayon de 1. Les 4 côtés du quadrilatère $ABCD$ sont tangents au cercle aux points P, Q, S et T. De plus, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$. Si $AO = 3$, déterminer la longueur de DS.



(b) Soit x une valeur qui vérifie $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\frac{3}{2}\cos x\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\sin x\right)$.

Déterminer toutes les valeurs possibles de $\sin 2x$. Exprimer la réponse de la forme $\dfrac{a\pi^2 + b\pi + c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers.

9. On définit $f(a,b) = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{ab}$, a et b étant des entiers positifs.

Par exemple, $f(1,2)$ a une valeur de 3.

(a) Déterminer la valeur de $f(2,5)$.

(b) Déterminer tous les entiers positifs a pour lesquels $f(a,a)$ est un entier.

(c) Si a et b sont des entiers positifs et que $f(a,b)$ est un entier, démontrer que $f(a,b)$ doit être un multiple de 3.

(d) Déterminer quatre couples d'entiers positifs (a,b), où $2 < a < b$, pour lesquels $f(a,b)$ est un entier.

10. (a) Amir et Brigitte jouent à un jeu de cartes. Amir commence avec une main de 6 cartes dont 2 sont rouges, 2 sont jaunes et 2 sont vertes. Brigitte commence avec une main de 4 cartes dont 2 sont mauves et 2 sont blanches. Amir joue en premier. Amir et Brigitte jouent à tour de rôle. À chaque tour, le joueur choisit une de ses cartes au hasard et la pose sur la table. Les cartes restent sur la table pour le restant du jeu. Lorsqu'un joueur pose deux cartes de la même couleur sur la table, il gagne et le jeu se termine. Déterminer la probabilité qu'Amir soit le gagnant.

(b) Carlos a 14 pièces de monnaie numérotées de 1 à 14. Chaque pièce de monnaie a un côté que l'on surnommera « pile ». Lorsqu'on lance les pièces $1, 2, 3, \ldots, 13, 14$, elles tombent du côté pile dont les probabilités sont respectivement égales à $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{13}, h_{14}$. Lorsque Carlos lance chacune des 14 pièces une seule fois, la probabilité qu'un nombre pair de pièces tombent du côté pile est égale à $\frac{1}{2}$. Existe-t-il un k de 1 à 14 pour lequel $h_k = \frac{1}{2}$? Démontrer la réponse.

(c) Serge et Lis ont chacun une machine qui peut imprimer un chiffre de 1 à 6. La machine de Serge peut imprimer les chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dont les probabilités sont respectivement égales à p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. La machine de Lis peut imprimer les chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dont les probabilités sont respectivement égales à q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6. Chacune des machines imprime un chiffre. Soit $S(i)$ la probabilité que i soit la somme des deux chiffres imprimés. Si $S(2) = S(12) = \frac{1}{2}S(7)$ et que $S(7) > 0$, démontrer que $p_1 = p_6$ et que $q_1 = q_6$.

**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2019! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2019.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— des copies gratuites des concours précédents
— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :
— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2019/2020
— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours