



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 13 avril 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2016 University of Waterloo



Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
 - Chacune vaut 2 ou 3 points.
 - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
 - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
 - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
 - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
 - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
 - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'on puisse utiliser une calculatrice pour des calculs numériques, on doit présenter et justifier les autres étapes d'une solution. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. On ne peut participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. On peut acheter des raisins secs à la cuiller, à la tasse, au bocal, au panier ou au bac selon les proportions suivantes : 5 cuillerées de raisins secs remplissent 1 bocal, 3 cuillerées de raisins secs remplissent 1 tasse, 5 paniers de raisins secs remplissent 2 bacs et 30 bocaux de raisins secs remplissent 1 bac.



(a) Combien de bacs de raisins secs remplissent 30 paniers ?



(b) Combien de tasses de raisins secs remplissent 6 bocaux ?



(c) Déterminer combien il faut de tasses de raisins secs pour remplir 1 panier.

2. Lorsqu'on trace un segment de droite du centre d'un cercle au milieu d'une corde, ce segment est perpendiculaire à la corde. Par exemple dans la figure 1, OM est perpendiculaire à la corde AB .

Figure 1

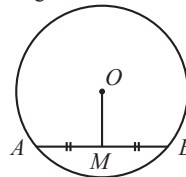
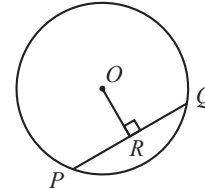


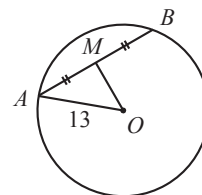
Figure 2



Lorsqu'on abaisse une perpendiculaire du centre d'un cercle jusqu'à une corde du cercle, la perpendiculaire passe au milieu de la corde. Par exemple dans la figure 2, $PR = QR$.



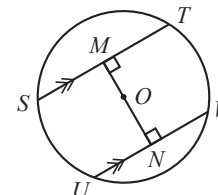
(a) Dans la figure ci-contre, un cercle de rayon 13 a une corde AB de longueur 10. Si M est le milieu de AB , quelle est la longueur de OM ?



(b) Dans un cercle de rayon 25, on trace une corde de manière qu'il y ait une distance de 7 entre le centre du cercle et la corde, mesurée perpendiculairement à la corde. Quelle est la longueur de cette corde ?



(c) Le cercle ci-contre a un rayon de 65. Deux cordes parallèles, ST et UV , sont tracées de manière qu'il y ait une distance de 72 ($MN = 72$) entre elles. Sachant que MN passe au centre O du cercle et que ST a une longueur de 112, déterminer la longueur de UV .



3. Étant donné un entier strictement positif n , l'expression $f(n)$ représente l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui est un diviseur de n . Par exemple, $f(126) = 2$, puisque $126 = 3^2 \times 14$ et que 3^2 est un diviseur de 126, mais que 3^3 ne l'est pas.



(a) Quelle est la valeur de $f(405)$?



(b) Quelle est la valeur de $f(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10)$?



(c) Soit N l'entier positif égal à $\frac{100!}{50!20!}$. Déterminer la valeur de $f(N)$.

(Remarque : Pour un entier strictement positif m , $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m . Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.)



(d) Étant donné $f(a) = 8$ et $f(b) = 7$, déterminer toutes les valeurs possibles de $f(a + b)$.

4. Les restaurants Ezio Pizza (EP) et Lino Pizza (LP) sont voisins. Chaque jour, 100 clients achètent chacun une pizza entière à l'un ou l'autre des deux restaurants. Le prix d'une pizza est fixé chaque jour à chaque restaurant et il est toujours un multiple de 10 cents. Lorsque le prix est le même à chaque restaurant, la moitié des 100 clients achètent leur pizza à chaque restaurant. Lorsqu'un prix est supérieur à l'autre, à un des restaurants, alors pour chaque différence de 10 cents, ce restaurant perd un client à l'autre restaurant. Chaque restaurant dépense 5,00 \$ pour faire une pizza.

Par exemple, si le prix d'une pizza est de 8,00 \$ chez EP et 9,00 \$ chez LP, le nombre de clients et le profit de chaque restaurant est indiqué dans le tableau suivant.

Restaurant	Prix d'une pizza	Nombre de clients	Profit
EP	8,00 \$	$50 + 10 = 60$	$60 \times (8,00 \$ - 5,00 \$) = 180 \$$
LP	9,00 \$	$50 - 10 = 40$	$40 \times (9,00 \$ - 5,00 \$) = 160 \$$



(a) Lundi, une pizza coûte 7,70 \$ chez EP et 9,30 \$ chez LP.

(i) Combien de clients achètent chez LP ?

(ii) Quel est le profit total chez LP ?



(b) EP fixe le prix en premier et LP fixe le sien ensuite. Mardi, une pizza coûte 7,20 \$ chez EP. Quel prix devrait-on utiliser chez LP de manière à maximiser son profit ?



(c) Mercredi, EP constate le jeu de LP : LP maximise son profit en fixant son prix après que EP a fixé le sien. EP continue à fixer son prix en premier de manière que le prix fixé soit un multiple de 20 cents. Le prix de EP est toujours un multiple de 10 cents et le nombre de clients de chaque restaurant obéit toujours aux mêmes règles décrites au début. Déterminer les deux prix que EP pourrait utiliser de manière à maximiser son profit. Indiquer le profit de LP dans chaque cas.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2016.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2016/2017
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours