Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 25 novembre 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 26 novembre 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

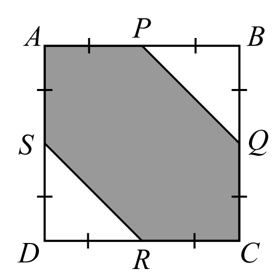
Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que $4,14\ldots$ ou $1,41\ldots$, sauf indication contraire.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

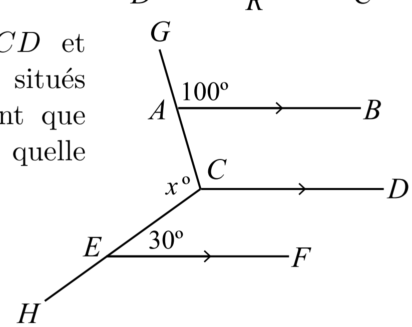
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Stéphanie doit placer 1000 œufs dans des contenants de 12 œufs. En travaillant, elle casse n œufs. Les œufs qui ne sont pas cassés remplissent complètement un certain nombre de contenants sans qu'il ne reste aucun œuf. Sachant que $n < 12$, quelle est la valeur de n ?

2. Le carré $ABCD$, ci-contre, a des côtés de longueur 4. Les points P, Q, R et S sont les milieux des côtés indiqués. Quelle est l'aire de la région ombrée ?



3. Dans la figure ci-contre, les segments AB, CD et EF sont parallèles et les points A et E sont situés sur les segments respectifs CG et CH. Sachant que $\angle GAB = 100^\circ$, $\angle CEF = 30^\circ$ et $\angle ACE = x^\circ$, quelle est la valeur de x ?



4. Sachant que $12x = 4y + 2$, déterminer la valeur de l'expression $6y - 18x + 7$.

5. Déterminer le *plus grand* entier positif n, $n < 500$, pour lequel $6048(28^n)$ est un cube parfait (c'est-à-dire qu'il est égal à m^3, m étant un entier positif quelconque).

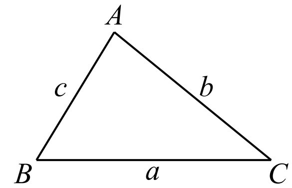
6. On a mis 2015 billets, numérotés $1, 2, 3, 4, \ldots, 2014, 2015$, dans un sac qui était vide. Alain retire le billet a du sac. Bianca retire ensuite le billet b du sac. Charlot retire enfin le billet c du sac. Ils constatent alors que $a < b < c$ et $a + b + c = 2018$. De combien de façon est-ce possible d'atteindre ce résultat ?

PARTIE B

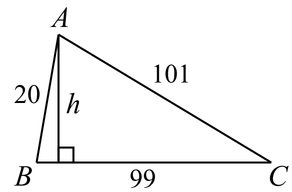
Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. À l'école secondaire Charbonneau, certains élèves sont inscrits au programme d'arts après les heures régulières de classe. Le programme offre une classe d'art dramatique et une classe de musique. Chaque élève inscrit à ce programme participe à une de ces classes ou aux deux.
   (a) Cette année, la classe d'art dramatique compte 41 élèves et la classe de musique compte 28 élèves. Sachant que 15 élèves participent aux deux classes, combien d'élèves sont inscrits au programme ?
   (b) En 2014, un total de 80 élèves étaient inscrits au programme. Sachant que la classe d'art dramatique comptait $3x-5$ élèves, que la classe de musique comptait $6x+13$ élèves et que x élèves participaient aux deux classes, déterminer la valeur de x.
   (c) En 2013, la moitié des élèves de la classe d'art dramatique participaient aux deux classes et un quart des élèves de la classe de musique participaient aux deux classes. En tout, N étaient inscrits au programme en 2013. Sachant que N est un nombre de 91 à 99, déterminer la valeur de N.
2. Alain, Conrad, Emma et Salma participent à un triathlon modifié. Ils doivent parcourir 2 km à la nage, ensuite 40 km en vélo, puis 10 km en courant. Chacun change instantanément de la nage au vélo et du vélo à la course.
   (a) Emma a complété $\frac{1}{13}$ de la distance totale du triathlon. Combien de kilomètres a-t-elle parcourus ?
   (b) Conrad a commencé le triathlon à 8 h 00 et il a complété l'épreuve de nage en 30 minutes. Il a avancé 12 fois plus vite en vélo qu'à la nage et il a avancé 3 fois plus vite en courant qu'à la nage. À quelle heure a-t-il terminé le triathlon ?
   (c) Alain et Salma ont aussi commencé le triathlon à 8 h 00. Alain a complété la partie à la nage en 36 minutes et il a ensuite continué en vélo à une vitesse de 28 km/h. Salma a complété la partie à la nage en 30 minutes et elle a ensuite continué en vélo à une vitesse de 24 km/h. Alain a dépassé Salma pendant l'épreuve en vélo. À quelle heure Alain a-t-il dépassé Salma ?

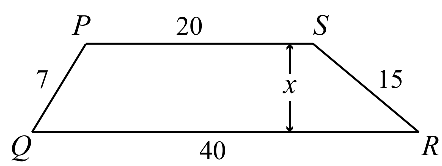
3. La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs a, b et c des trois côtés. L'aire du triangle est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où p est le *demi-périmètre* du triangle, c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.



   (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC a pour longueurs de côtés $AB = 20$, $BC = 99$ et $AC = 101$. Soit h la longueur de la perpendiculaire à BC abaissée au point A. Déterminer la valeur de h.



   (b) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un trapèze dans lequel PS est parallèle à QR, $PQ = 7$, $QR = 40$, $RS = 15$ et $PS = 20$. Soit x la distance entre les côtés parallèles, PS et QR. Déterminer la valeur de x.



   (c) Le triangle dont les côtés sont de longueurs 3, 4 et 5 satisfait aux cinq propriétés suivantes :
   — les longueurs de ses côtés sont des entiers,
   — les longueurs de ses deux plus petits côtés diffèrent de 1,
   — la longueur de son grand côté et son demi-périmètre diffèrent de 1,
   — son aire est un entier et
   — son périmètre est inférieur à 200.
   Déterminer tous les triangles qui satisfont à ces cinq propriétés.