Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2014

(9e année – Secondaire III)

le jeudi 20 février 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue d'abord les expressions entre parenthèses :

$$(8 \times 6) - (4 \div 2) = 48 - 2 = 46$$

Réponse : (C)

2. Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors $50^\circ + x^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, d'où $x + 95 = 180$.
Donc $x = 85$.

Réponse : (C)

3. $30\,\%$ de 200 est égal à $\frac{30}{100} \times 200$, ou 60.
On aurait pu dire que $30\,\%$ de 100 est égal à 30 et puisque $200 = 2 \times 100$, alors $30\,\%$ de 200 est égal à 30×2, ou 60.

Réponse : (D)

4. Puisque $x = 3$, les côtés de la figure ont des longueurs de 4, 3, 6 et 10.
La figure a donc un périmètre de $4 + 3 + 6 + 10$, ou 23.
On aurait pu dire que le périmètre est représenté par l'expression $x+6+10+(x+1)$, ou $2x+17$.
Lorsque $x = 3$, cette expression est égale à $2(3) + 17$, ou 23.

Réponse : (A)

5. L'équipe gagne 2 points par victoire. Donc, 9 victoires rapportent 2×9 points, ou 18 points.
L'équipe gagne 0 point par défaite. Donc, 3 défaites rapportent 0 point.
L'équipe gagne 1 point par match nul. Donc, 4 matchs nuls rapportent 4 points.
Puisque $18 + 0 + 4 = 22$, l'équipe gagne 22 points.

Réponse : (E)

6. La ligne qui représente une température de $3\,^\circ$C est la droite horizontale à mi-chemin entre la marque de 2 et celle de 4 sur l'axe vertical.
Deux points sur cette droite représentent des données : un à 14 h et un à 21 h.
L'heure demandée est 21 h.

Réponse : (A)

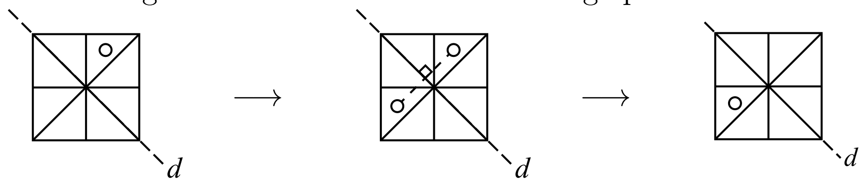
7. *Solution 1*
On récrit le membre de gauche de l'équation sous la forme $5 \times 6 \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$.
Puisque $5 \times 6 \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 5 \times 6 \times n \times n$, alors n pourrait être égal à 2×3, ou 6.

Solution 2
Puisque $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 6 = 5 \times 6 \times n \times n$, alors $1080 = 30n^2$, d'où $n^2 = 36$.
Donc, n pourrait être égal à 6. (n pourrait aussi être égal à -6.)

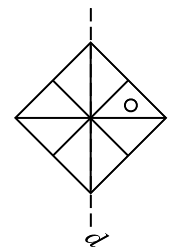
Solution 3
On divise chaque membre de l'équation par 5×6. L'équation devient $2 \times 2 \times 3 \times 3 = n \times n$, ou $n^2 = 36$.
Donc, n pourrait être égal à 6. (n pourrait aussi être égal à -6.)

Réponse : (E)

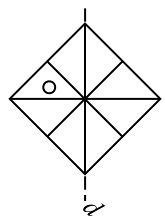
8. *Solution 1*
Le carré, ses 8 morceaux et ses deux diagonales sont symétriques par rapport à la droite d.
Dans la deuxième figure ci-dessous, on voit la figure initiale et son image par la réflexion. On voit que la position initiale du petit cercle et celle de son image sont symétriques par rapport à la droite d. La troisième figure ci-dessous est celle de l'image par la réflexion.



Solution 2
On peut voir que la figure (D) représente l'image par la réflexion si on fait d'abord subir à la figure initiale une rotation de 45° dans le sens des aiguilles d'une montre pour obtenir



et si on fait subir à cette figure une réflexion par rapport à la droite qui est maintenant verticale pour obtenir :



Lorsqu'on fait subir à cette figure une rotation de 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on obtient la figure (D).

Réponse : (D)

9. On a $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $2^3 = 2^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ et $2^4 = 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$.
Donc $2^4 - 2^3 = 16 - 8$, ou $2^4 - 2^3 = 8$, d'où $2^4 - 2^3 = 2^3$.

Réponse : (D)

10. Puisque $\frac{3}{4} + \frac{4}{\square} = 1$, on a $\frac{4}{\square} = 1 - \frac{3}{4}$, ou $\frac{4}{\square} = \frac{1}{4}$.
Or $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$. On récrit le membre de gauche en utilisant le même numérateur : $\frac{4}{\square} = \frac{4}{16}$.
Donc, l'équation est vraie si $\square = 16$. (On peut vérifier que $\frac{3}{4} + \frac{4}{16} = 1$.)

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
Les faces non visibles du cube supérieur portent respectivement 2, 3 et 6 points.
Les faces non visibles du cube inférieur portent respectivement 1, 3, 4 et 5 points.
Le nombre total de points sur ces sept autres faces est donc de $2 + 3 + 6 + 1 + 3 + 4 + 5$, ou 24.

Solution 2
Puisque les faces respectives de chaque cube portent 1, 2, 3, 4, 5 et 6 points et que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, alors le nombre total de points sur les faces des deux cubes est de 2×21, ou 42.
Les cinq faces visibles portent un total de $4 + 1 + 5 + 6 + 2$ points, ou 18 points.
Le nombre total de points sur ces sept autres faces est donc de $42 - 18$, ou 24.

Réponse : (E)

12. Puisque chaque  a une longueur de $\frac{2}{3}$, alors une bande de trois  a une longueur de $3 \times \frac{2}{3}$, ou 2. Il faut donc deux bandes de longueur 2 pour former une bande de longueur 4.
Puisque 3  forment une bande de longueur 2, alors 6  forment une bande de longueur 4.

Réponse : (A)

13. On récrit l'énoncé de soustraction sous la forme d'un énoncé d'addition, soit $45 + 8Y = 1X2$.
On considère ensuite les chiffres des unités.
D'après l'énoncé d'addition, $5+Y$ a pour chiffre des unités 2. Donc $Y = 7$. C'est la seule réponse possible. On a donc $45 + 87 = 1X2$.
Puisque $45 + 87 = 132$, alors $X = 3$.
Donc $X + Y = 3 + 7$, ou $X + Y = 10$. (On peut vérifier que $132 - 87 = 45$.)

Réponse : (C)

14. On simplifie d'abord l'expression, puis on reporte $x = 2y$:

$$(x + 2y) - (2x + y) = x + 2y - 2x - y = y - x = y - 2y = -y$$

On peut aussi reporter $x = 2y$ d'abord, puis simplifier :

$$(x + 2y) - (2x + y) = (2y + 2y) - (2(2y) + y) = 4y - 5y = -y$$

Réponse : (B)

15. *Solution 1*
Puisque le triangle RPS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $PR^2 + PS^2 = RS^2$, ou $PR^2 + 18^2 = 30^2$.
Donc $PR^2 = 30^2 - 18^2$, ou $PR^2 = 900 - 324$, ou $PR^2 = 576$. Puisque $PR > 0$, alors $PR = 24$.
Puisque P, S et Q sont alignés et que RP est perpendiculaire au segment PQ, alors RP est perpendiculaire à PS. RP est donc la hauteur du triangle QRS qui correspond à la base SQ.
Le triangle QRS a donc une aire de $\frac{1}{2}(24)(14)$, ou 168.

Solution 2
Puisque le triangle RPS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $PR^2 + PS^2 = RS^2$, ou $PR^2 + 18^2 = 30^2$.
Donc $PR^2 = 30^2 - 18^2$, ou $PR^2 = 900 - 324$, ou $PR^2 = 576$. Puisque $PR > 0$, alors $PR = 24$.
L'aire du triangle QRS est égale à l'aire du triangle RPQ moins celle du triangle RPS.
Puisque le triangle RPQ est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}(24)(18+14)$, ou 384. Puisque le triangle RPS est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(PS)$, ou $\frac{1}{2}(24)(18)$, ou 216.
Le triangle QRS a donc une aire de $384 - 216$, ou 168.

Réponse : (B)

16. D'après la deuxième rangée, $\triangle + \triangle + \triangle + \triangle = 24$, ou $4\triangle = 24$. Donc $\triangle = 6$.
D'après la première rangée, $\heartsuit + \triangle + \triangle + \heartsuit = 26$, ou $2\heartsuit + 2\triangle = 26$.
Puisque $\triangle = 6$, l'équation devient $2\heartsuit = 26 - 12$. Donc $2\heartsuit = 14$, ou $\heartsuit = 7$.
D'après la quatrième rangée, $\square + \heartsuit + \square + \triangle = 33$.
Puisque $\triangle = 6$ et $\heartsuit = 7$, l'équation devient $2\square + 7 + 6 = 33$. Donc $2\square = 20$, ou $\square = 10$.
D'après la troisième rangée, cette équation devient $\square + \blacklozenge + \heartsuit + \blacklozenge = 27$.
Puisque $\square = 10$ et $\heartsuit = 7$, alors $2\blacklozenge = 27 - 10 - 7$, ou $2\blacklozenge = 10$.
Donc $\blacklozenge = 5$.

Réponse : (A)

17. Le cube a six faces identiques dont les côtés ont une longueur de 30.
L'aire totale du cube est donc égale à $6(30^2)$, ou 5400.
Le prisme à base rectangulaire a deux faces de dimensions 20 sur 30, deux faces de dimensions 20 sur L et deux faces de dimensions 30 sur L.
L'aire totale du prisme est donc égale à $2(20)(30) + 2(20L) + 2(30L)$, ou $100L + 1200$.
Puisque le cube et le prisme ont la même aire totale, alors $100L + 1200 = 5400$, ou $100L = 4200$, d'où $L = 42$.

Réponse : (C)

18. Puisque les rapports $x : 4$ et $9 : y$ sont égaux, on a $\frac{x}{4} = \frac{9}{y}$. (On remarque que puisque x et y sont strictement positifs, on ne divise par par 0.)
Cette équation est équivalente à l'équation $xy = 4(9)$, ou $xy = 36$.
On cherche donc le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $xy = 36$.
Or, les diviseurs positifs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36. Les couples sont donc :

$$(x, y) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)$$

Il y a 9 couples.

Réponse : (D)

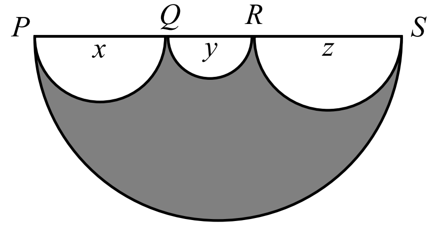
19. La première fois que la flèche tourne, il y a 4 résultats équiprobables, soit 1, 2, 3 et 4. Pour chacun de ces résultats, il y a 4 résultats équiprobables pour le deuxième tour, soit 1, 2, 3 et 4. Il y a donc 16 résultats équiprobables pour les deux tours de la flèche. Chacun de ces 16 résultats nous donne un produit, car Diane multiplie les deux numéros obtenus. On place les produits dans le tableau suivant. La colonne de gauche représente les résultats possibles lors du premier tour de la flèche et la rangée du dessus représente les résultats possibles lors du deuxième tour. Les produits correspondants se trouvent dans les cellules correspondantes du tableau :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Puisque les 16 résultats possibles sont équiprobables, les 16 produits le sont aussi.
Or, le produit 4 survient le plus souvent, soit trois fois. Il est donc le plus probable.

Réponse : (B)

20. Le contour de la région ombrée est formé de quatre demi-cercles, soit un demi-cercle de diamètre PS, un demi-cercle de diamètre PQ, un demi-cercle de diamètre QR et un demi-cercle de diamètre RS.
Puisqu'un cercle de diamètre d a une circonférence de πd, alors un demi-cercle de diamètre d a une longueur de $\frac{1}{2}\pi d$. (À noter que le demi-cercle est un arc seulement.)
Soit x la longueur PQ, y la longueur QR et z la longueur RS.



Or, on sait que le segment PS a une longueur de 4.
Puisque $PQ + QR + RS = PS$, alors $x + y + z = 4$.
Le périmètre de la région ombrée est donc égal à :

$$\tfrac{1}{2}\pi(PQ)+\tfrac{1}{2}\pi(QR)+\tfrac{1}{2}\pi(RS)+\tfrac{1}{2}\pi(PS) = \tfrac{1}{2}\pi x+\tfrac{1}{2}\pi y+\tfrac{1}{2}\pi z+\tfrac{1}{2}\pi(4) = \tfrac{1}{2}\pi(x+y+z+4) = \tfrac{1}{2}\pi(4+4) = 4\pi$$

On cherche l'aire d'un carré ayant le même périmètre que la région ombrée (c'est-à-dire un périmètre de 4π).
Un carré qui a un périmètre de 4π a des côtés de longueur $\frac{1}{4}(4\pi)$, ou π. Il a donc une aire de π^2.

Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple, on devrait obtenir la même réponse quelles que soient les longueurs particulières de PQ, QR et RS, puisque celles-ci ne sont pas données. On peut donc leur attribuer des valeurs arbitraires, à condition que $PQ+QR+RS = 4$. Par exemple, si on choisit $PQ = QR = 1$ et $RS = 2$, le périmètre de la région ombrée est égal à :

$$\tfrac{1}{2}\pi(PQ) + \tfrac{1}{2}\pi(QR) + \tfrac{1}{2}\pi(RS) + \tfrac{1}{2}\pi(PS) = \tfrac{1}{2}\pi(1) + \tfrac{1}{2}\pi(1) + \tfrac{1}{2}\pi(2) + \tfrac{1}{2}\pi(4) = \tfrac{1}{2}\pi(1+1+2+4) = 4\pi$$

On obtient donc la même réponse.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*
Les longueurs des côtés du quadrillage 4×6 sont dans un rapport de 4 : 6, ce qui est équivalent au rapport de 2 : 3.
Si on trace un quadrillage 30×45, les longueurs de ses côtés seront dans un rapport de 30 : 45, ce qui est équivalent au rapport de 2 : 3.
On peut donc tracer le quadrillage 30×45 en utilisant des morceaux de dimensions 2×3. On peut considérer ce grand quadrillage comme un tableau 15×15 de morceaux 2×3.
La diagonale du tableau 30×45 a une pente de $\frac{30}{45}$, ou $\frac{2}{3}$. Elle passe donc par le coin inférieur gauche et par le coin supérieur droit de chaque morceau 2×3 du tableau 15×15. Chacun de ces coins est donc un point de treillis. Comme on le voit dans le quadrillage donné 4×6, la diagonale ne passe pas par d'autres points de treillis à l'intérieur d'un morceau 2×3.
Puisque le coin supérieur droit d'un morceau 2×3 est le même que le coin inférieur gauche du morceau suivant, il faut faire attention à la façon de compter les points de treillis.
La diagonale passe par 15 morceaux 2×3. Elle passe donc par 15 coins inférieurs gauches. Parmi ces coins, on a compté les coins supérieurs droits des 14 premiers morceaux 2×3. On doit aussi compter le coin supérieur droit du 15e morceau.
La diagonale passe donc par $1 + 15$ points de treillis, ou 16 points de treillis.

Solution 2

On place le grillage 30×45 dans un plan cartésien de manière que son coin inférieur gauche soit à l'origine, $(0,0)$, le côté vertical gauche soit sur la partie positive de l'axe des ordonnées, de $(0,0)$ à $(0,30)$ et le côté horizontal inférieur soit sur la partie positive de l'axe des abscisses, de $(0,0)$ à $(45,0)$.

Le coin supérieur droit a pour coordonnées $(45,30)$. Les lignes horizontales du grillage ont pour équations $y = 0$, $y = 1$, ..., $y = 29$ et $y = 30$ et les lignes verticales ont pour équations $x = 0$, $x = 1$, ..., $x = 44$ et $x = 45$.

Les points de treillis du quadrillage sont les points dont les coordonnées sont des entiers.

On considère la diagonale qui joint les points $(0,0)$ et $(45,30)$.

Cette diagonale a pour pente $\frac{30-0}{45-0}$, ou $\frac{2}{3}$.

Puisqu'elle passe par l'origine, elle a pour équation $y = \frac{2}{3}x$.

On cherche donc le nombre de points de treillis situés sur la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$ dont les abscisses varient de $x = 0$ à $x = 45$.

Soit (a,b) un point de treillis sur cette diagonale. Donc, a et b sont tous deux des entiers.

Puisque $b = \frac{2}{3}a$, alors a doit être un multiple de 3 pour que b soit un entier.

Les multiples de 3, de 0 à 45, sont $0, 3, 6, \ldots, 42, 45$.

Puisque $45 = 15(3)$, il y a 16 multiples de 3 dans cette liste.

Chacune de ces valeurs de a donne une valeur entière de b et ainsi un point de treillis sur la diagonale.

Il y a donc 16 points de treillis sur la diagonale.

Réponse : (B)

22. Puisque le drapeau est composé de quatre triangles, il nous faut au plus quatre couleurs différentes. Puisque deux triangles qui partagent un même côté doivent être de couleurs différentes, il nous faut au moins deux couleurs. (Par exemple, le triangle Gauche et le triangle Haut doivent être de couleurs différentes.)

On peut donc utiliser 2, 3 ou 4 couleurs.

On considère le nombre de drapeaux que l'on peut former dans chaque cas.

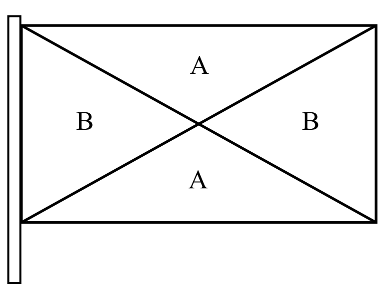
<u>1er cas : 2 couleurs</u>

On nomme les deux couleurs A et B.

On attribue la couleur A au triangle Haut.

Puisqu'il n'y a que deux couleurs et que les triangles Gauche et Droite ne peuvent être de la couleur A, ils doivent être de la couleur B.

Le triangle Bas ne peut être de la couleur B, puisqu'il partage un côté avec le triangle Gauche et un côté avec le triangle Droite. Il est donc de la couleur A. On a donc :



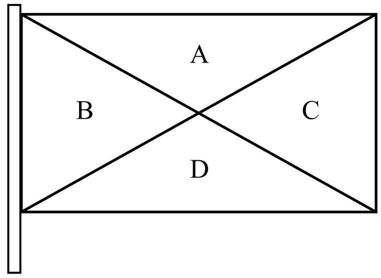
Cette situation est conforme à la règle.

Il y a 5 couleurs possibles pour A, soit rouge, blanc, bleu, vert ou mauve.

Pour chaque couleur choisie, il reste 4 couleurs possibles pour B, soit n'importe quelle autre couleur sauf celle de A.

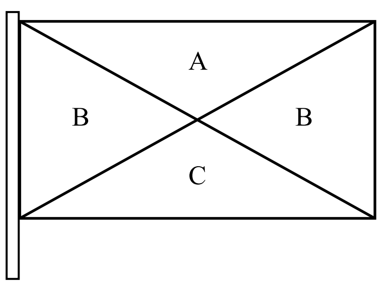
Dans ce cas, le nombre de drapeaux possibles est égal à 5(4), ou 20.

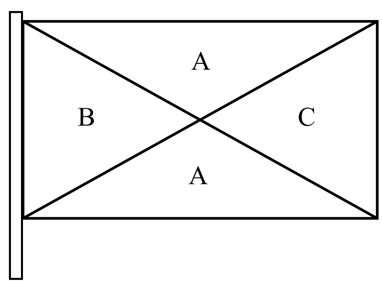
<u>2e cas : 4 couleurs</u>
On nomme les quatre couleurs A, B, C et D.
Puisqu'il y a 4 triangles et 4 couleurs, les triangles sont de couleurs différentes.
On attribue les couleurs comme suit :



Cette situation est conforme à la règle.
Il y a 5 couleurs possibles pour A. Pour chacune de ces 5 couleurs, il y a 4 couleurs possibles pour B. Il y a donc 5×4 choix, ou 20 choix, pour les couleurs des triangles A et B. Pour chacun de ces 20 choix, il y a 3 couleurs possibles pour C. Il y a donc 20×3 choix, ou 60 choix pour les couleurs des triangles A, B et C. Pour chacun de ces 60 choix, il y a 2 couleurs possibles pour D. Il y a donc 60×2 choix, ou 120 choix pour les couleurs des triangles A, B, C et D.
Dans ce cas, le nombre de drapeaux possibles est égal à $5(4)(3)(2)$, ou 120.

<u>3e cas : 3 couleurs</u>
On nomme les trois couleurs A, B et C.
On attribue la couleur A au triangle Haut.
Puisque le triangle Gauche ne peut être de la couleur A, on lui attribue la couleur B.
Le triangle Droite ne peut être de la couleur A. Il pourrait donc être de la couleur B ou C.
Si le triangle Droite est de couleur B, le triangle Bas doit être de couleur C, puisqu'on utilise trois couleurs.
Si le triangle Droite est de couleur C, le triangle Bas doit être de couleur A, puisqu'il partage un côté avec le triangle Gauche et un côté avec le triangle Droite.
On a donc deux situations possibles :



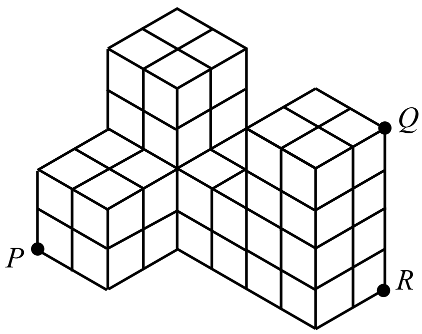


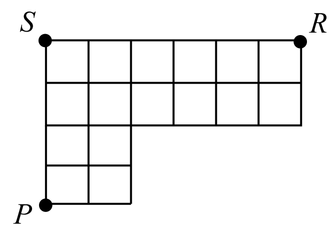
Chaque situation est conforme à a règle.
Dans chaque situation, il y a 5 couleurs possibles pour A. Pour chacune de ces 5 couleurs, il y a 4 couleurs possibles pour B. Pour chacun des 20 choix de couleurs possibles précédents, il y a 3 choix de couleurs pour C.
Pour chacune des deux situations, le nombre de drapeaux possibles est égal à $5(4)(3)$, ou 60.
Dans ce cas, le nombre de drapeaux possibles est égal à $2(60)$, ou 120.

En tout, le nombre de drapeaux possibles est égal à $20 + 120 + 120$, ou 260.

Réponse : (E)

23. On calculera d'abord la distance PQ en fonction de n.
Soit R le point au bas du solide, directement au-dessous de Q et soit S le coin arrière gauche au bas du solide (on ne peut le voir dans la figure donnée).
Puisque QR est perpendiculaire à la surface au bas du solide, le triangle PRQ est rectangle en R. On a donc $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$.
On sait aussi que le triangle PSR est rectangle en S, puisque le solide est formé de cubes.
On a donc $PR^2 = PS^2 + SR^2$.





D'après ces deux égalités, on a $PQ^2 = PS^2 + SR^2 + RQ^2$.
On remarque que la distance PS est 4 fois la longueur d'une arête d'un petit cube, SR est 6 fois la longueur d'une telle arête et RQ est 4 fois la longueur d'une telle arête.
Puisque chaque arête d'un petit cube a une longueur de $\sqrt{n}$, alors $PS = 4\sqrt{n}$, $SR = 6\sqrt{n}$ et $RQ = 4\sqrt{n}$.
Donc $PQ^2 = (4\sqrt{n})^2 + (6\sqrt{n})^2 + (4\sqrt{n})^2$, d'où $PQ^2 = 16n + 36n + 16n$, ou $PQ^2 = 68n$.
Donc $PQ = \sqrt{68n}$.
On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $\sqrt{68n}$ est un entier.
$\sqrt{68n}$ est un entier si $68n$ est un carré parfait.
On écrit 68 en factorisation première : $68 = 2 \times 2 \times 17$. Donc $68n = 2(2)(17)(n)$.
Un entier strictement positif est un carré parfait si ses facteurs premiers paraissent un nombre pair de fois.
Pour que $68n$ soit un carré parfait, il faut donc que n ait 17 comme diviseur.
La plus petite valeur de n pour laquelle $68n$ est un carré parfait est $n = 17$.
Lorsque $n = 17$, on a $68n = 2(2)(17)(17)$, ou $68n = (2 \times 17)^2$, ce qui est un carré parfait.
Donc, la plus petite valeur de n pour laquelle la distance de P à Q est un entier est $n = 17$.
(Après avoir déterminé que $PQ = \sqrt{68n}$, on aurait pu utiliser les cinq choix de réponse l'un après l'autre, en ordre croissant, jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur entière de PQ.)

Réponse : (A)

24. Lorsque Nadia marche de N à G, soit x km la distance parcourue en montant et y km la distance parcourue en descendant. On sait que Nadia parcourt 2,5 km sur terrain plat.
Donc en marchant de G à N, elle parcourt x km en descendant, y km en montant et 2,5 km sur terrain plat. En effet, ce qu'elle parcourt en montant à l'aller est parcouru en descendant au retour et ce qu'elle parcourt en descendant à l'aller est parcouru en montant au retour.
Or, on sait que Nadia marche à une vitesse de 5 km/h sur terrain plat, de 4 km/h en montant et de 6 km/h en descendant.
Lorsque la distance est constante, on a vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ ou distance $=$ vitesse $\times$ temps ou temps $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$. D'après cette dernière formule, en marchant de N à G, Nadia met $\dfrac{x}{4}$ heures en montant, $\dfrac{y}{6}$ heures en descendant et $\dfrac{2{,}5}{5}$ heures sur terrain plat.
On sait qu'elle met 1 heure et 36 minutes pour aller de N à G, soit 96 minutes ou $\dfrac{96}{60}$ heure. Donc :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{2{,}5}{5} = \frac{96}{60}$$

De la même façon, lorsque Nadia revient de G à N, on a :

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{2{,}5}{5} = \frac{99}{60}$$

On cherche la distance totale de N à G, qui est égale à $(x+y+2{,}5)$ km. On doit donc déterminer la valeur de $x + y$.
On additionne les deux équations précédentes, membre par membre, et on simplifie pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{y}{4} + 1 &= \frac{195}{60} \\
x\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + y\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) &= \frac{135}{60} \\
\frac{5}{12}x + \frac{5}{12}y &= \frac{9}{4} \\
x + y &= \frac{12}{5}\left(\frac{9}{4}\right)
\end{aligned}$$

Donc $x + y = \dfrac{108}{20}$, ou $x + y = \dfrac{27}{5}$, ou $x + y = 5{,}4$ km.
La distance de N à G est donc égale à 5,4 km + 2,5 km, ou 7,9 km.

Réponse : (E)

25. On simplifie $\frac{2009}{2014}+\frac{2019}{n}$ pour obtenir $\frac{2009n+2014(2019)}{2014n}$, ou $\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}$.

Puisque $\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}=\frac{a}{b}$ et que $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $2009n+4\,066\,266=ka$ et $2014n=kb$, k étant un entier strictement positif.

Puisque $2009n+4\,066\,266=ka$, alors si a est un multiple de 1004, alors $2009n+4\,066\,266$ doit aussi être un multiple de 1004.

On détermine donc les valeurs de n pour lesquelles $2009n+4\,066\,266$ est divisible par 1004 et parmi ces valeurs de n, on détermine la plus petite valeur pour laquelle a est divisible par 1004. (On remarque que si $2009n+4\,066\,266$ est divisible par 1004, il n'est pas nécessaire que a soit divisible par 1004, puisqu'en réduisant la fraction $\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}$, on pourrait éliminer certains des diviseurs premiers de 1004 dans le numérateur.)

Puisque $2008=2\times 1004$ et $4\,066\,200=4050\times 1004$, on a

$$2009n+4\,066\,266=(2008n+4\,066\,200)+(n+66)=1004(2n+4050)+(n+66)$$

(2008 et 4 066 200 sont les plus grands multiples de 1004 qui sont inférieurs à 2009 et à 4 066 266, respectivement.)

Puisque $1004(2n+4050)$ est un multiple de 1004, alors $2009n+4\,066\,266$ est un multiple de 1004 si $n+66$ est un multiple de 1004. Posons $n+66=1004m$.

Donc, $2009n+4\,066\,266$ est un multiple de 1004 si $n=1004m-66$, m étant un entier strictement positif quelconque.

Ce sont les valeurs de n pour lesquelles l'expression $2009n+4\,066\,266$ est divisible par 1004. Parmi ces valeurs de n, on doit maintenant déterminer la plus petite valeur pour laquelle a est divisible par 1004.

Lorsque $m=1$, on a $n=1004-66$, ou $n=938$. Dans ce cas,

$$\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}=\frac{2009(938)+4\,066\,2006}{2014(938)}=\frac{5\,950\,708}{1\,889\,132}=\frac{1\,487\,677}{472\,283}$$

(dans la dernière étape, on a divisé le numérateur et le dénominateur par 4).

Que cette dernière fraction soit irréductible ou non, son numérateur est impair. Donc dans la fraction $\frac{a}{b}$ (la fraction irréductible équivalente) a sera impair et ne peut donc pas être divisible par 1004. On considère la valeur suivante de m.

Lorsque $m=2$, on a $n=2008-66$, ou $n=1942$. Dans ce cas,

$$\frac{2009n+4\,066\,266}{2014n}=\frac{2009(1942)+4\,066\,2006}{2014(1942)}=\frac{7\,967\,744}{3\,911\,188}=\frac{1\,991\,936}{977\,797}$$

(dans la dernière étape, on a divisé le numérateur et le dénominateur par 4).

Or $1004=4\times 251$ et 251 est un nombre premier. (251 est un nombre premier, puisqu'il n'est pas divisible par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 ou 13, soit tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{251}$.)

Or, $1\,991\,936=1984\times 1004$. Donc, 1 991 936 est un multiple de 1004 et 977 797 n'est pas divisible par 4 ou par 251. Lorsqu'on écrit $\frac{1\,991\,936}{977\,797}$ sous forme irréductible $\frac{a}{b}$, alors a sera divisible par 1004.

Le plus petit entier positif n pour lequel a est un multiple de 1004 est $n=1942$. La somme de ses chiffres est égale à $1+9+4+2$, ou 16.

Réponse : (A)