Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2014

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) D'après la définition, on a $8 \odot 7 = \sqrt{8+4(7)} = \sqrt{36} = 6$.

   (b) Puisque $16 \odot n = 10$, alors $\sqrt{16+4n} = 10$. Donc $16+4n = 100$ (on a élevé chaque membre au carré), ou $4n = 84$, ou $n = 21$.
   Vérification : $16 \odot n = 16 \odot 21 = \sqrt{16+4(21)} = \sqrt{100} = 10$.

   (c) On calcule d'abord la valeur de l'expression entre parenthèses :
   $9 \odot 18 = \sqrt{9+4(18)} = \sqrt{81} = 9$.
   Donc $(9 \odot 18) \odot 10 = 9 \odot 10 = \sqrt{9+4(10)} = \sqrt{49} = 7$.

   (d) D'après la définition, $k \odot k = \sqrt{k+4k} = \sqrt{5k}$.
   On doit donc résoudre l'équation $\sqrt{5k} = k$.
   On élève chaque membre au carré pour obtenir $5k = k^2$, d'où $k^2 - 5k = 0$, ou $k(k-5) = 0$.
   Donc $k = 0$ ou $k = 5$.
   Vérification pour $k = 0$: $k \odot k = 0 \odot 0 = \sqrt{0+4(0)} = \sqrt{0} = 0 = k$.
   Vérification pour $k = 5$: $k \odot k = 5 \odot 5 = \sqrt{5+4(5)} = \sqrt{25} = 5 = k$.
   Donc, les valeurs de k pour lesquelles $k \odot k = k$ sont 0 et 5.

2. (a) La position de la chanson pendant la semaine 1 ($s = 1$), est $P(1)$, c'est-à-dire $3(1)^2 - 36(1) + 110$, ou 77.

   (b) La position de la chanson est représentée par l'équation $P = 3s^2 - 36s + 110$. Cette équation définit une parabole ouverte vers le haut.
   La meilleure position de la chanson est la position la plus basse. Or, les points sur la parabole atteignent la position la plus basse au sommet de la parabole.
   On détermine l'équation canonique de la parabole en complétant le carré :

$$\begin{aligned} P &= 3s^2 - 36s + 110 \\ &= 3(s^2 - 12s) + 110 \\ &= 3(s^2 - 12s + 36 - 36) + 110 \\ &= 3(s^2 - 12s + 36) - 108 + 110 \\ &= 3(s-6)^2 + 2 \end{aligned}$$

   Le sommet de la parabole correspond à $s = 6$ et $P = 2$.

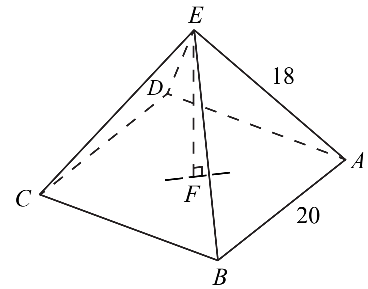
   (i) La meilleure position atteinte par la chanson « Boucle récursive » est la position 2.

   (ii) La chanson atteint cette position pendant la 6e semaine.

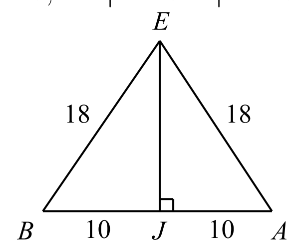
   (c) Pour déterminer le numéro de la dernière semaine où la chanson « Boucle récursive » parait sur la liste des 200 chansons les plus populaires, on cherche la plus grande valeur de s pour laquelle $P \le 200$, ou $3s^2 - 36s + 110 \le 200$.
   D'après l'équation canonique obtenue dans la partie (b), on a $3(s-6)^2 + 2 \le 200$, ou $3(s-6)^2 \le 198$, ou $(s-6)^2 \le 66$.
   Pour déterminer la plus grande valeur de s pour laquelle $(s-6)^2 \le 66$, on cherche le plus grand carré parfait inférieur à 66.
   Puisque $8^2 \le 66$ et $9^2 > 66$, alors la plus grande valeur de s satisfait à $s - 6 = 8$. Donc $s = 14$.
   La dernière semaine où la chanson « Boucle récursive » parait sur la liste des 200 chansons les plus populaires est la semaine 14.
   Pour le vérifier, on remarque que

$$P(14) = 3(14-6)^2 + 2 = 194 \le 200, \text{ mais que } P(15) = 3(15-6)^2 + 2 = 245 > 200.$$

3. (a) On utilisera des barres verticales pour noter l'aire d'une figure. Par exemple, $|\triangle BCE|$ est l'aire du triangle BCE.

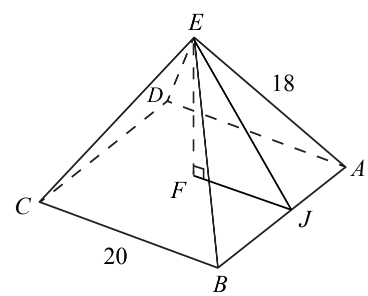


Puisque $ABCD$ est un carré et que $EA = EB = EC = ED$, les quatre faces triangulaires de la pyramide $ABCDE$ sont isométriques et elles ont donc la même aire.
L'aire totale de la pyramide $ABCDE$ est égale à la somme des aires de la base et des faces latérales, ou
$|ABCD| + |\triangle EAB| + |\triangle EBC| + |\triangle ECD| + |\triangle EDA|$ ou $|ABCD| + 4|\triangle EAB|$.
Le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 20. Donc $|ABCD| = 20 \times 20$, ou $|ABCD| = 400$.
Pour déterminer $|\triangle EAB|$, on construit la hauteur EJ comme dans la figure ci-contre.



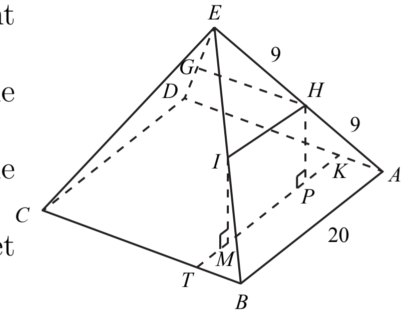
Puisque le triangle EAB est isocèle, EJ coupe AB en son milieu, d'où $AJ = JB = 10$.
Puisque le triangle EAJ est rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $EA^2 = AJ^2 + EJ^2$, d'où $18^2 = 10^2 + EJ^2$.
Donc $EJ = \sqrt{224}$, ou $EJ = 4\sqrt{14}$ (puisque $EJ > 0$).
$|\triangle EAB| = \frac{1}{2}(AB)(EJ)$, ou $|\triangle EAB| = \frac{1}{2}(20)(4\sqrt{14})$, ou $|\triangle EAB| = 40\sqrt{14}$.
L'aire totale de la pyramide $ABCDE$ est donc égale à $|ABCD| + 4|EAB|$, ou $400 + 4(40\sqrt{14})$, ou $400 + 160\sqrt{14}$.

(b) Comme dans la partie (b), J est le point sur AB de manière que EJ soit une hauteur du triangle EAB. Donc $EJ = 4\sqrt{14}$. Puisque EF est perpendiculaire à la base de la pyramide, alors EF est perpendiculaire à FJ, comme il est indiqué dans la figure ci-contre.



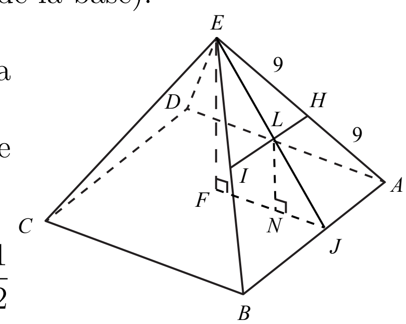
Or, F est le centre de la base $ABCD$ et J est le milieu de AB. Donc, FJ est parallèle à CB et $FJ = \frac{1}{2} \times CB$, ou $FJ = \frac{1}{2} \times 20$, ou $FJ = 10$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EFJ, on a $EJ^2 = EF^2 + FJ^2$, d'où $224 = EF^2 + 100$. Donc $EF = \sqrt{124}$, ou $EF = 2\sqrt{31}$ (puisque $EF > 0$).
Donc, la pyramide $ABCDE$ a une hauteur de $2\sqrt{31}$.

(c) Les points G et H sont les milieux respectifs des arêtes ED et EA.
Donc $EG = GD = EH = HA = 9$.
Le segment GH joint les milieux de deux côtés du triangle EDA. Il est donc parallèle à DA et $GH = \frac{1}{2} \times DA$, ou $GH = 10$.
(Cela découle du fait que les triangles EGH et EDA sont semblables.)
Puisque GH est parallèle à DA et que DA est parallèle à CB, alors GH est parallèle à CB.
Le quadrilatère $BCGH$ dont on cherche l'aire est donc un trapèze.
Pour déterminer l'aire du trapèze $BCGH$, on utilisera les longueurs des côtés parallèles ($GH = 10$ et $CB = 20$) et la distance entre ces côtés.
On démontrera que HT est une hauteur du trapèze et on déterminera sa longueur (voir la figure ci-dessous).



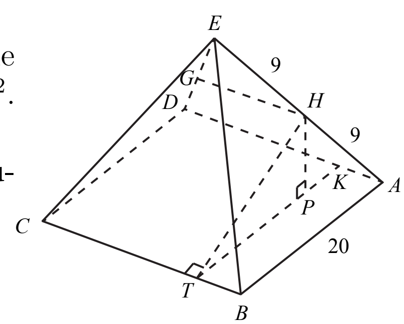
Soit I le milieu du segment EB. Puisque le segment HI joint les milieux de deux côtés du triangle EAB, alors $HI = 10$.
Soit P le point sur la base de la pyramide de manière que HP soit perpendiculaire à la base.
Soit M le point sur la base de la pyramide de manière que IM soit perpendiculaire à la base.
On prolonge MP de manière qu'il coupe l'arête BC en T et l'arête AD en K, comme dans la figure.

Par symétrie, $HP = IM$. $HPMI$ est donc un rectangle et $PM = HI = 10$.
Puisque AB est parallèle à HI et que HI est parallèle à KT (ils sont respectivement perpendiculaires à HP et IM), alors AB est parallèle à KT. $ABTK$ est donc un rectangle et $KT = AB = 20$.
Par symétrie, PM est au centre du segment KT de manière que $KP = MT = \frac{20-10}{2} = 5$ ($EA = EB$ et E est placé directement au-dessus du centre de la base).
Donc $PT = PM + MT$, d'où $PT = 10 + 5$, ou $PT = 15$.



Soit L le milieu de HI et soit N le point sur la base de la pyramide tel que LN soit perpendiculaire à la base.
Puisque F est le centre du carré et que J est le milieu de l'arête AB, alors FJ passe par le point N.
Puisque les triangles EFJ et LNJ sont semblables (ils ont deux angles égaux deux à deux), alors $\dfrac{LN}{EF} = \dfrac{LJ}{EJ} = \dfrac{1}{2}$ (puisque HI joint les milieux de deux côtés du triangle EAB).
Donc $LN = \frac{1}{2}(EF)$, d'où $LN = \frac{1}{2}(2\sqrt{31})$, ou $LN = \sqrt{31}$.

Puisque HI est parallèle à la base $ABCD$ de la pyramide (ils sont tous les deux perpendiculaires à la base), alors $HP = LN = \sqrt{31}$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle HPT, on a $HT^2 = HP^2 + PT^2$, d'où $HT^2 = (\sqrt{31})^2 + 15^2$.
Donc $HT^2 = 256$, ou $HT = 16$ (puisque $HT > 0$).
Puisque le plan contenant le triangle HPT est perpendiculaire à la base $ABCD$, alors HT est perpendiculaire à BC. HT est donc une hauteur du trapèze $BCGH$.
Donc $|BCGH| = \frac{HT}{2}(GH + CB)$, d'où
$|BCGH| = \frac{16}{2}(10 + 20)$, ou $|BCGH| = 240$.

4. (a) Si $(4,y,z)$ est un TPP, alors $4^2 + y^2 = z^2 + 1$, ou $z^2 - y^2 = 15$, d'où $(z - y)(z + y) = 15$.
Puisque y et z sont des entiers strictement positifs, alors $(z + y)$ est un entier strictement positif et $(z - y)$ en est un aussi (puisque le produit des deux facteurs est égal à 15).
Donc, $(z - y)$ et $(z + y)$ forment une paire de facteurs de 15. Or, il y a deux telles paires, soit 1 et 15, de même que 3 et 5.
Puisque $z + y > z - y$, on obtient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} z - y &= 1 \\ z + y &= 15 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} z - y &= 3 \\ z + y &= 5 \end{aligned}$$

On additionne les deux équations du premier système, membre par membre, pour obtenir $2z = 16$, ou $z = 8$, d'où $y = 7$.
On additionne les deux équations du deuxième système, membre par membre, pour obtenir $2z = 8$, ou $z = 4$, d'où $y = 1$.

Puisqu'on doit avoir $y > 1$, cette dernière solution ne donne pas un TPP.
Le seul TPP avec $x = 4$ est $(4, 7, 8)$.

(b) Soit u, v et w des entiers strictement positifs qui représentent les longueurs des côtés du triangle UVW (la longueur u étant opposée au sommet U, celle de v étant opposée à V et celle de w étant opposée à W).
On suppose que (u, v, w) forme un TPP tel que $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ ($u > 1$ et $v > 1$).
L'aire du triangle UVW peut être calculée à partir de la formule $A = \frac{1}{2}uv \sin W \quad (\star)$ (on développera cette formule à la fin de la solution).
On suppose que l'aire A est un entier.
On utilise la loi du cosinus dans le triangle UVW pour obtenir $w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos W$, ou $\cos W = \dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv}$.
Puisque (u, v, w) est un TPP, alors $u^2 + v^2 = w^2 + 1$, ou $u^2 + v^2 - w^2 = 1$.
On reporte $u^2 + v^2 - w^2 = 1$ dans l'équation $\cos W = \dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv}$ pour obtenir $\cos W = \dfrac{1}{2uv}$. Puisque $\sin^2 W = 1 - \cos^2 W$, alors $\sin^2 W = 1 - \left(\dfrac{1}{2uv}\right)^2$.
On élève chaque membre de l'équation $(\star)$ au carré et on reporte $\sin^2 W = 1 - \cos^2 W$ dans la nouvelle équation pour obtenir $A^2 = \frac{1}{4}u^2v^2 \left(1 - \left(\dfrac{1}{2uv}\right)^2\right)$.
On simplifie pour obtenir $A^2 = \frac{1}{4}u^2v^2 \left(\dfrac{(2uv)^2 - 1}{(2uv)^2}\right)$, ou $A^2 = \frac{1}{4}u^2v^2 \left(\dfrac{(2uv)^2 - 1}{4u^2v^2}\right)$, ou $16A^2 = (2uv)^2 - 1$, ou $4u^2v^2 - 16A^2 = 1$.
Le membre de gauche de cette équation est divisible par 4. Il a donc une valeur paire pour tous entiers u, v et A.
Puisque le membre de droite est l'entier impair 1, l'équation n'admet aucune solution entière.
L'hypothèse que A est un entier est donc infirmée. Donc, un triangle dont les longueurs de côtés forment un TPP ne peut avoir un entier comme aire .

Développement de la formule $A = \frac{1}{2}uv \sin W$

Dans le triangle UVW, on abaisse une perpendiculaire à partir du sommet V jusqu'au point T sur UW (ou le prolongement de UW).
Donc, le triangle UVW a une hauteur VT qui correspond à la base UW.
Dans le triangle rectangle VWT, on a $\sin W = \dfrac{VT}{VW}$, d'où $VT = u \sin W$.
(Si l'angle W est obtus, la hauteur VT est à l'extérieur du triangle et $\sin(180° - W) = \dfrac{VT}{VW}$. Donc $VT = u \sin W$ puisque $\sin(180° - W) = \sin W$).
L'aire du triangle UVW est donc égale à $\frac{1}{2}(UW)(VT)$, ou $\frac{1}{2}uv \sin W$.

(c) Puisque $(5t + p, bt + q, ct + r)$ est un TPP, alors $(5t + p)^2 + (bt + q)^2 = (ct + r)^2 + 1$.
On développe : $25t^2 + 10pt + p^2 + b^2t^2 + 2bqt + q^2 = c^2t^2 + 2crt + r^2 + 1$, ou $(25 + b^2)t^2 + (10p + 2bq)t + (p^2 + q^2) = c^2t^2 + 2crt + (r^2 + 1)$.
Chaque membre de cette équation est un polynôme du second degré de variable t.
Puisque cette équation est vérifiée par tous les entiers strictement positifs t, alors les coefficients correspondants dans les deux membres sont égaux.

Donc :

$$\begin{aligned} 25 + b^2 &= c^2 && (1) \\ 10p + 2bq &= 2cr && (2) \\ p^2 + q^2 &= r^2 + 1 && (3) \end{aligned}$$

L'équation (1) exprime une relation de Pythagore. Puisque b et c sont des entiers strictement positifs, le triplet pythagoricien $(5, 12, 13)$ vérifie (1), d'où $b = 12$ et $c = 13$.
(Ce sont les seules valeurs possibles de b et de c.)
On reporte $b = 12$ et $c = 13$ dans l'équation (2) et on simplifie pour obtenir
$5p + 12q = 13r$ (4).
On élève chaque membre de l'équation (4) au carré pour obtenir
$25p^2 + 120pq + 144q^2 = 169r^2$ (5).
D'après l'equation (3), on a $r^2 = p^2 + q^2 - 1$ que l'on reporte dans l'équation (5) pour obtenir $25p^2 + 120pq + 144q^2 = 169(p^2 + q^2 - 1)$, ou $144p^2 - 120pq + 25q^2 = 169$, ou $(12p - 5q)^2 = 169$, d'où $12p - 5q = \pm 13$.
On cherche des entiers strictement positifs p et q ($p \geq 100$) qui vérifient $12p - 5q = \pm 13$ ou $5q = 12p \pm 13$.
Puisque $12p$ est pair pour toute valeur entière de p et que 13 est impair, alors $12p \pm 13$ est impair. Donc, $5q$ doit être impair.
Le chiffre des unités de $5q$ est toujours un 0 ou un 5, quelle que soit la valeur de q. Puisque $5q$ est impair, le chiffre doit être un 5.
Donc, le chiffre des unités de $5q - 13$ est un 2 et celui de $5q + 13$ est un 8. Donc le chiffre des unités de $12p$ est un 2 ou un 8 (puisque $12p = 5q \pm 13$).
L'expression $12p$ ($p \geq 100$) a un chiffre des unités de 2 lorsque $p = 101$.
On reporte $p = 101$ dans l'équation $12p = 5q - 13$ pour obtenir $12(101) = 5q - 13$, ou $5q = 1225$, ou $q = 245$.
On reporte $p = 101$ et $q = 245$ dans l'équation (4) pour obtenir $r = 265$.
L'expression $12p$ ($p \geq 100$) a un chiffre des unités de 8 lorsque $p = 104$.
On reporte $p = 104$ dans l'équation $12p = 5q + 13$ pour obtenir $12(104) = 5q + 13$, ou $5q = 1235$, ou $q = 247$.
On reporte $p = 104$ et $q = 247$ dans l'équation (4) pour obtenir $r = 268$.
Donc, $(12, 13, 101, 245, 265)$ et $(12, 13, 104, 247, 268)$ sont deux 5-uplets (b, c, p, q, r) qui vérifient les conditions du problème.
(Il y a un nombre infini de solutions possibles.)