



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 16 avril 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

WATERLOO
MATHEMATICS

Deloitte.

©2014 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 75 minutes

Nombre de questions : 4

L'utilisation d'une calculatrice est permise.

Chaque question vaut 10 points.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
 - Chacune vaut 2 ou 3 points.
 - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
 - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
 - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
 - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
 - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
 - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. Étant donné deux nombres réels a et b , $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on définit l'opération \odot comme suit :

$$a \odot b = \sqrt{a + 4b}$$

Par exemple, $5 \odot 1 = \sqrt{5 + 4(1)}$, d'où $5 \odot 1 = \sqrt{9}$, ou $5 \odot 1 = 3$.



- (a) Quelle est la valeur de $8 \odot 7$?



- (b) Sachant que $16 \odot n = 10$, quelle est la valeur de n ?



- (c) Déterminer la valeur de $(9 \odot 18) \odot 10$.



- (d) Déterminer toutes les valeurs de k pour lesquelles $k \odot k = k$, tout en justifiant sa démarche.

2. Chaque semaine, le magasin MathTunes publie la liste des 200 chansons les plus populaires. Une nouvelle chanson, « Boucle récursive », est lancée à temps pour faire la liste de la semaine 1. La position P de la chanson sur la liste de la semaine s est donnée par l'équation $P = 3s^2 - 36s + 110$. Le numéro s de la semaine est toujours un entier strictement positif.



- (a) Quelle est la position de la chanson pendant la semaine 1 ?



- (b) Les artistes veulent que leur chanson atteigne la meilleure position possible. Plus la position est près de la position 1, plus cette position est bonne.

- (i) Quelle est la meilleure position atteinte par la chanson « Boucle récursive » ?

- (ii) Pendant quelle semaine cette chanson atteint-elle cette meilleure position ?



- (c) Quel est le numéro de la dernière semaine où la chanson « Boucle récursive » paraît sur la liste des 200 chansons les plus populaires ?

3. Une pyramide $ABCDE$ a une base carrée $ABCD$ dont les côtés ont une longueur de 20. Le sommet E est situé sur la perpendiculaire à la base qui passe au point F , le centre de la base $ABCD$. On sait que $EA = EB = EC = ED = 18$.



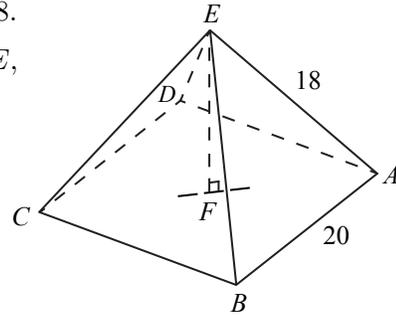
(a) Déterminer l'aire totale de la pyramide $ABCDE$, incluant la base.



(b) Déterminer la hauteur EF de la pyramide.



(c) G et H sont les centres respectifs des arêtes ED et EA . Déterminer l'aire du quadrilatère $BCGH$.



4. Un triplet d'entiers strictement positifs (x, y, z) est appelé un triplet presque pythagorien (ou TPP) si $x > 1$, $y > 1$ et $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Par exemple, $(5, 5, 7)$ est un TPP.



(a) Déterminer les valeurs de y et de z pour lesquelles $(4, y, z)$ est un TPP.



(b) Démontrer que pour n'importe quel triangle dont les longueurs de côtés forment un TPP, l'aire du triangle n'est pas un entier.



(c) Déterminer deux 5-uplets (b, c, p, q, r) d'entiers strictement positifs de manière que $p \geq 100$ et que $(5t + p, bt + q, ct + r)$ soit un TPP pour tous les entiers t strictement positifs.



**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2014!

En 2013, plus de 15 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2014/2015
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)