Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
***cemc.uwaterloo.ca***

# *Concours Galois 2014*

**le mercredi 16 avril 2014**
**(Amérique du Nord et Amérique du Sud)**

**le jeudi 17 avril 2014**
**(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)**

*Solutions*

1. (a) Les trois angles du diagramme circulaire mesurent respectivement $(2x)^\circ$, $(3x)^\circ$ et $90^\circ$.
Puisque les trois angles forment un angle plein, alors $(2x)^\circ + (3x)^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, d'où $5x = 270$, ou $x = 54$.

(b) Le rapport du nombre de médailles de bronze au nombre de médailles d'argent au nombre de médailles d'or est égal au rapport des mesures des angles correspondants, soit au rapport de $(2x)^\circ$ à $(3x)^\circ$ à $90^\circ$.
Puisque $x = 54$, ce rapport est égal à $2(54) : 3(54) : 90$, ou $108 : 162 : 90$.
Si on divise chaque terme par 18, on obtient le rapport irréductible $6 : 9 : 5$.

(c) Puisque le rapport du nombre de médailles de bronze au nombre de médailles d'argent au nombre de médailles d'or est de $6 : 9 : 5$, soit $6x$, $9x$ et $5x$ les nombres respectifs de médailles.
Puisqu'il y a 80 médailles dans la vitrine, alors $6x + 9x + 5x = 80$, ou $20x = 80$, ou $x = 4$.
Il y a donc 24 médailles de bronze $(6 \times 4 = 24)$, 36 médailles d'argent $(9 \times 4 = 36)$ et 20 médailles d'or $(5 \times 4 = 20)$ dans la vitrine.

(d) Au départ, il y a 24 médailles de bronze, 36 médailles d'argent et 20 médailles d'or.
Ces nombres sont dans le rapport de $6 : 9 : 5$.
Trois nombres dans ce rapport peuvent être représentés par $6x$, $9x$ et $5x$, respectivement.
Par exemple :

si $x = 1$, il s'agit des nombres 6, 9 et 5 ;

si $x = 2$, il s'agit des nombres 12, 18 et 10 et on a $12 : 18 : 10 = 6 : 9 : 5$ ;

si $x = 3$, il s'agit des nombres 18, 27 et 15 et on a $18 : 27 : 15 = 6 : 9 : 5$ ;

si $x = 4$, il s'agit des nombres 24, 36 et 20 (les nombres de médailles au départ) et on a $24 : 36 : 20 = 6 : 9 : 5$.

Le rapport suivant est obtenu avec $x = 5$, soit $30 : 45 : 25$. Lorsque $x > 5$, on obtient des nombres plus grands.
Donc, le plus petit nombre de médailles de chaque sorte qu'il peut y avoir dans la vitrine après l'ajout des médailles de la boite, tout en conservant le même rapport, est 30 médailles de bronze, 45 médailles d'argent et 25 médailles d'or pour un total de 100 médailles.

2. (a) *Solution 1*
Chacun des 200 passagers qui ont une valise doit payer 20 \$.
Chacun des 45 passagers qui ont deux valises doit payer 20 \$ pour la première valise et 7 \$ pour la deuxième valise pour un total de 27 \$.
Le total des frais additionnels pour les valises est de $(200 \times 20\,\$) + (45 \times 27\,\$)$, ou 5215 \$.

*Solution 2*
Chacun des 245 passagers avait au moins une valise.
Chacune de ces valises a couté 20 \$.
Chacun des 45 passagers qui avaient une deuxième valise doit payer 7 \$.
Le total des frais additionnels pour les valises est de $(245 \times 20\,\$) + (45 \times 7\,\$)$, ou 5215 \$.

(b) *Solution 1*
Puisque chacun des 245 passagers avait au moins une valise, les frais additionnels pour la première valise sont de $245 \times 20\,\$$, ou $4900\,\$$.
Puisque le total des frais additionnels est de $5173\,\$$, les autres valises ont couté $5173\,\$ - 4900\,\$$, ou $273\,\$$.
Puisque chaque passager avait une ou deux valises, les frais de $273\,\$$ proviennent des passagers qui avaient une deuxième valise.
Or, chacune de ces valises coutait $7\,\$$.
Le nombre de passagers qui avaient deux valises est donc égal à $\frac{273}{7}$, ou 39.

*Solution 2*
Soit $n$ le nombre de passagers qui avaient une valise.
Puisqu'il y avait 245 passagers à bord et que chaque passager avait une ou deux valises, alors $(245 - n)$ passagers avaient deux valises.
Chacun des $n$ passagers qui avaient une valise a payé $20\,\$$.
Chacun des $(245-n)$ passagers qui avaient deux valises a payé $20\,\$$ pour la première valise et $27\,\$$ pour la deuxième, pour un total de $27\,\$$.
Puisque le total des frais additionnels est de $5173\,\$$, alors $(n\times 20)+((245-n)\times 27) = 5173$.
Donc $20n + 6615 - 27n = 5173$, d'où $1442 = 7n$, ou $n = 206$.
Or $245 - 206 = 39$. Donc, 39 passagers avaient deux valises.

*Solution 3*
Chacun des 245 passagers avait au moins une valise.
Chacune des premières valises a couté $20\,\$$.
Soit $m$ le nombre de passagers qui avaient deux valises.
Chacun de ces $m$ passagers a payé $7\,\$$ pour cette deuxième valise.
Les frais additionnels sont donc de $(245 \times 20\,\$) + (m \times 7\,\$)$. Donc $4900 + 7m = 5173$, d'où $7m = 273$, ou $m = 39$.
Donc, 39 passagers avaient deux valises.

(c) On sait qu'il y a au plus 245 passagers. On suppose que chaque passager avait au plus deux valises.
Puisque deux valises coutent $27\,\$$, les frais additionnels ne peuvent dépasser $245 \times 27\,\$$, ou $6615\,\$$.
Puisque le total des frais additionnels était de $6825\,\$$ (ce qui est supérieur à $6615\,\$$) il doit y avoir au moins un passsager qui avait trois valises.
(Il est possible d'obtenir un total de $6825\,\$$ en frais additionnels si 215 passagers ont 2 valises chacun et 30 passagers ont 3 sacs chacun.
En effet, le total serait de $(215 \times 27\,\$) + (30 \times 34\,\$)$, ou $6825\,\$$.)

(d) On sait qu'il y a au plus 245 passagers. On suppose que chaque passager avait au plus deux valises.
Soit $a$ le nombre de passagers qui avaient exactement une valise et $b$ le nombre de passagers qui avaient exactement deux valises.
Il est possible que certains passagers n'avaient aucune valise. Or, ceux-ci n'ont pas contribué aux frais additionnels de $142\,\$$.
Chacun des $a$ passagers qui avaient une valise a payé $20\,\$$ et chacun des $b$ passagers qui avaient deux valise a payé $27\,\$$.
Puisque le total des frais additionnels était de $142\,\$$, alors $20a + 27b = 142$.
On isole $a$ pour obtenir $a = \frac{142 - 27b}{20}$. Puisque $a$ et $b$ sont des entiers non négatifs, on attribue à $b$ des valeurs entières par essais systématiques pour découvrir des valeurs

entières correspondantes de $a$. Or, $27b$ est inférieur ou égal à 142. Puisque $27(5) = 135$ et $27(6) = 162$, alors $b$ est inférieur ou égal à 5 ($27b$ est supérieur à 162 lorsque $b$ est supérieur à 6).

| Valeurs de $b$ | Valeurs de $a$ |
|---|---|
| 0 | $a = \frac{142-27(0)}{20} = 7{,}1$ |
| 1 | $a = \frac{142-27(1)}{20} = 5{,}75$ |
| 2 | $a = \frac{142-27(2)}{20} = 4{,}4$ |
| 3 | $a = \frac{142-27(3)}{20} = 3{,}05$ |
| 4 | $a = \frac{142-27(4)}{20} = 1{,}7$ |
| 5 | $a = \frac{142-27(5)}{20} = 0{,}35$ |

Aucune des valeurs de $a$ est un entier.
L'équation $20a + 27b = 142$ n'admet donc aucune solution dans laquelle $a$ et $b$ sont des entiers non négatifs.
Il est donc impossible que des passagers qui avaient une ou deux valises aient contribué des frais additionnels de 142 \$.
Il doit donc y avoir au moins un passager qui avait au moins trois valises.
(Il est possible d'obtenir un total de 142 \$ en frais additionnels si 4 passagers ont 2 sacs et 1 passager a 3 sacs. On aurait alors $(4 \times 27\,\$) + (1 \times 34\,\$) = 142\,\$$.)

3. (a) *Solution 1*
Eva peut choisir les cartes 1 et 7 dont le couple $(1, 7)$ a une somme de 8.
Pour garder une somme de 8, on peut augmenter le 1 de 1 et diminuer le 8 de 1. On obtient les cartes 2 et 6 dont le couple $(2, 6)$ a une somme de 8.
On répète ce procédé pour obtenir les cartes 3 et 5 dont le couple $(3, 5)$ a une somme de 5.
Les trois couples qui ont une somme de 8 sont $(1, 7)$, $(2, 6)$ et $(3, 5)$.
(Si on tente de répéter le procédé une autre fois, on obtient 4 et 4, mais il n'y a qu'une seule carte 4 dans le jeu d'Eva.)

*Solution 2*
Soit $a$ le plus petit numéro et $b$ le plus grand. On veut que $a + b = 8$, ou $b = 8 - a$.
Puisque $a < b$, alors $a < 8 - a$, d'où $2a < 8$, ou $a < 4$.
Puisque $a \geq 1$, les seules valeurs possibles de $a$ sont 1, 2 et 3.
Les trois couples qui ont une somme de 8 sont $(1, 7)$, $(2, 6)$ et $(3, 5)$.

(b) *Solution 1*
Comme dans la partie (a), on essaie d'utiliser la plus petite carte, soit 1, pour former un couple qui a une somme de 13.
Or, le plus grand numéro que l'on peut choisir est un 10 et on obtient $1 + 10 = 11$, ce qui est inférieur à 13.

Si on recommence avec la carte 2, la plus grande somme qui l'on peut obtenir est de $2+10$, ou 12, ce qui est inférieur à 13.
On peut apparier la carte 3 avec la carte 10 pour une somme de 13.
Comme dans la partie (a), on augmente le petit nombre de 1 et on diminue le grand nombre de 1 pour conserver une somme de 13.
On obtient ainsi les couples $(4, 9)$, $(5, 8)$ et $(6, 7)$.
Si on répète le procédé, on obtient les mêmes paires dans l'ordre inverse, soit 7 et 6, 8 et 5, 9 et 4.
Donc, Simon peut choisir quatre paires de cartes pour obtenir des couples qui ont une somme de 13, soit 3 et 10, 4 et 9, 5 et 8, 6 et 7.

*Solution 2*
Soit $a$ le plus petit numéro et $b$ le plus grand. On veut que $a + b = 13$, ou $b = 13 - a$.
Puisque $a < b$, alors $a < 13 - a$, d'où $2a < 13$, ou $a < 6{,}5$.
Puisque $b \leq 10$, alors $13 - a \leq 10$, ou $3 \leq a$.
Puisque $3 \leq a < 6{,}5$, les seules valeurs possibles de $a$ sont 3, 4, 5 et 6.
Donc, Simon peut choisir quatre paires de cartes pour une somme de 13, soit 3 et 10, 4 et 9, 5 et 8, 6 et 7.

(c) Si $k \leq 50$, la plus grande somme de deux cartes est de $49 + 50$, ou 99.
Pour obtenir une somme de 100, on doit donc avoir $k > 50$.
Si $k = 51$, la paire 49 et 51 donne le couple $(49, 51)$ qui a une somme de 100. Or, c'est la seule paire dont le couple a une somme de 100.
Si $k = 52$, on peut former exactement deux couples qui ont une somme de 100, soit $(48, 52)$ et $(49, 51)$.
Chaque fois que la valeur de $k$ est augmentée de 1, on obtient un couple de plus ayant une somme de 100, car on peut augmenter le grand nombre de 1 (jusqu'à la nouvelle valeur de $k$) et diminuer le petit nombre de 1.
Si $k = 51 + 9$, ou $k = 60$, on obtient les dix couples suivants qui ont une somme de 100 :
$(49, 51)$, $(48, 52)$, $(47, 53)$, $(46, 54)$, $(45, 55)$, $(44, 56)$, $(43, 57)$, $(42, 58)$, $(41, 59)$ et $(40, 60)$.
Si la valeur de $k$ est augmentée de nouveau jusqu'à $k = 61$, on obtient un onzième couple, soit $(39, 61)$.
Donc, $k = 60$ et Daniel a 60 cartes numérotées de 1 à 60.

(d) On démontrera que les valeurs possibles de $S$ sont 67, 68, 84 et 85.
On suppose que $S$ est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ ($k \geq 0$) tel que $S = 2k+1$.
Les couples d'entiers strictement positifs $(a, b)$ $(a < b)$ tels que $a + b = S$ sont :

$$(1, 2k), (2, 2k - 1), (3, 2k - 2), \ldots, (k - 1, k + 2), (k, k + 1)$$

(Puisque $a < b$, alors les valeurs de $a$ sont inférieures à la moitié de $S$ (c.-à-d. $k + \frac{1}{2}$) et $a$ peut donc prendre des valeurs de 1 à $k$.)
Ces couples satisfont à toutes les conditions à l'exception peut-être de $a \leq 75$ et $b \leq 75$.
Puisque $a < b$, il suffit de déterminer si $b \leq 75$.
Si $2k \leq 75$, alors chaque couple est acceptable et il y a $k$ tels couples.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k = 33$, d'où $S = 2(33) + 1$, ou $S = 67$.
Si $2k > 75$, alors certains couples ne sont pas acceptables, puisque $b$ peut prendre des valeurs trop grandes.
À partir de la gauche, la première valeur acceptable de $b$ est $b = 75$, d'où $a = S - 75$, d'où $a = (2k + 1) - 75$, ou $a = 2k - 74$.
Les couples acceptables sont donc :

$$(2k - 74, 75), (2k - 73, 74), \ldots, (k - 1, k + 2), (k, k + 1)$$

Il y a $k - (2k - 75)$, ou $75 - k$ couples acceptables.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k = 42$, d'où $S = 2(42) + 1$, ou $S = 85$.
Pour résumer le cas où $S$ est impair ($S = 2k + 1$), il y a $k$ couples acceptables lorsque $2k \leq 75$ et $75 - k$ couples acceptables lorsque $2k > 75$, les valeurs possibles de $S$ étant 67 et 85.

On suppose que $S$ est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ ($k \geq 1$) tel que $S = 2k$.
Les couples d'entiers strictement positifs $(a, b)$ ($a < b$) tels que $a + b = S$ sont :

$$(1, 2k - 1), (2, 2k - 2), (3, 2k - 3), \ldots, (k - 2, k + 2), (k - 1, k + 1)$$

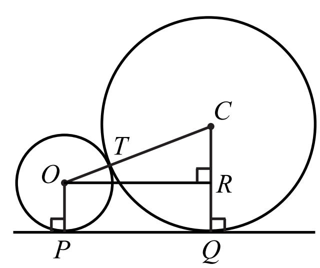
(Puisque $a < b$, alors les valeurs de $a$ sont inférieures à la moitié de $S$ (c.-à-d. $k$) et $a$ peut donc prendre des valeurs de 1 à $k - 1$.)
Si $2k - 1 \leq 75$, alors chaque couple est acceptable et il y a $k - 1$ tels couples.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k = 34$, d'où $S = 2(34)$, ou $S = 68$.
Si $2k - 1 > 75$, alors certains couples ne sont pas acceptables, puisque $b$ peut prendre des valeurs trop grandes.
À partir de la gauche, la première valeur acceptable de $b$ est $b = 75$, d'où $a = S - 75$, ou $a = 2k - 75$.
Les couples acceptables sont donc :

$$(2k - 75, 75), (2k - 74, 74), \ldots, (k - 2, k + 2), (k - 1, k + 1)$$

Il y a $(k - 1) - (2k - 76)$, ou $75 - k$ couples acceptables.
Pour qu'il y ait 33 couples, on doit avoir $k = 42$, d'où $S = 2(42)$, ou $S = 84$.
Pour résumer le cas où $S$ est pair ($S = 2k$), il y a $k - 1$ couples acceptables lorsque $2k - 1 \leq 75$ et $75 - k$ couples acceptables lorsque $2k - 1 > 75$, les valeurs de $S$ étant 68 et 84.

Donc en tout, les valeurs possibles de $S$ sont 67, 68, 84 et 85.
Lorsque $S = 67$, les 33 couples sont : $(1, 66), (2, 65), (3, 64), \ldots, (31, 36), (32, 35), (33, 34)$.
Lorsque $S = 68$, les 33 couples sont : $(1, 67), (2, 66), (3, 65), \ldots, (31, 37), (32, 36), (33, 35)$.
Lorsque $S = 84$, les 33 couples sont : $(9, 75), (10, 74), (11, 73), \ldots, (39, 45), (40, 44), (41, 43)$.
Lorsque $S = 85$, les 33 couples sont : $(10, 75), (11, 74), (12, 73), \ldots, (40, 45), (41, 44), (42, 43)$.

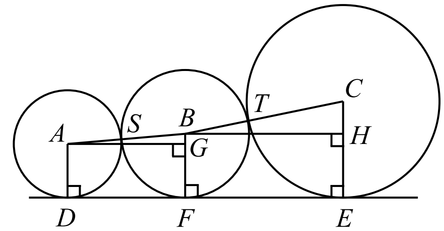
4. (a) Comme il est suggéré dans l'énoncé, on construit un segment parallèle à $PQ$ à partir du point $O$, jusqu'au point $R$ sur $CQ$.
$OP$ et $CQ$ sont perpendiculaires à $PQ$. Puisque $OR$ est parallèle à $PQ$, alors $OR$ est perpendiculaire à $OP$ et à $CQ$.
Donc, $ORQP$ est un rectangle (il a 4 angles droits).
Puisque le petit cercle a un rayon de 2, alors $OP = OT = 2$ (les deux segments sont des rayons).
Puisque le grand cercle a un rayon de 5, alors $CQ = CT = 5$ (les deux segments sont des rayons).




Puisque $O, T$ et $C$ sont alignés et que $OT = 2$ et $CT = 5$, alors $OC = OT + CT$, d'où $OC = 2 + 5$, ou $OC = 7$.
Dans le rectangle $ORQP$, on a $RQ = OP = 2$.
Donc $CR = CQ - RQ$, d'où $CR = 5 - 2$, ou $CR = 3$.
Dans le triangle rectangle $OCR$, on a $OC^2 = CR^2 + OR^2$ d'après le théorème de Pythagore.
Donc $OR^2 = OC^2 - CR^2$, d'où $OR^2 = 7^2 - 3^2$, ou $OR^2 = 40$. Donc $OR = \sqrt{40}$, ou $OR = 2\sqrt{10}$ (puisque $OR > 0$).
Puisque $ORQP$ est un rectangle, alors $PQ = OR = 2\sqrt{10}$.

(b) *Solution 1*

Soit $A, B$ et $C$ les centres des cercles, comme dans la figure ci-contre.




Soit $F$ le point de contact du deuxième cercle et de la droite horizontale.

Comme dans la partie (a), on construit des segments $AG$ et $BH$ parallèles à $DE$ et des segments $AD, BF$ et $CE$ perpendiculaires à $DE$.

On nomme $S$ et $T$ les points de contact entre les cercles.

Les points $A, S$ et $B$ sont alignés, de même que les points $B, T$ et $C$.

Soit $r$ le rayon du cercle au milieu. Donc $BF = BS = BT = r$.

Puisque le petit cercle a un rayon de 4, alors $AS = AD = 4$.

Puisque le grand cercle a un rayon de 9, alors $CT = CE = 9$.

Soit $DF = y$. Puisque $FE = DE - DF$, alors $FE = 24 - y$.

Comme dans la partie (a), $GF = AD = 4$ et $DF = AG = y$ (car $AGFD$ est un rectangle).

De même, $HE = BF = r$ et $BH = FE = 24 - y$ (car $BHEF$ est un rectangle).

Dans le triangle rectangle $ABG$, on a $AB = AS + BS$ et $BG = BF - GF$, d'où $AB = 4 + r$ et $BG = r - 4$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = AG^2 + BG^2$, ou $(4 + r)^2 = y^2 + (r - 4)^2$.

(Dans la figure, on suppose que $r > 4$. Si $r < 4$, le point $G$ serait placé sur $AD$ de manière que $AG = AD - GD$, ou $AG = 4 - r$. On aurait alors $AB^2 = AG^2 + BG^2$, ou $(4 + r)^2 = (4 - r)^2 + y^2$. Puisque $(4 - r)^2 = (r - 4)^2$, l'équation obtenue par le théorème de Pythagore ne dépend pas de quel cercle a le plus grand rayon.)

Dans le triangle rectangle $BCH$, on a $BC = BT + CT$ et $CH = CE - HE$, d'où $BC = r + 9$ et $CH = 9 - r$.

D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = BH^2 + CH^2$, ou $(r + 9)^2 = (24 - y)^2 + (9 - r)^2$.

(Dans la figure, on suppose que $r < 9$. Si $r > 9$, alors le point $H$ serait placé sur $BF$ de manière que $BH = BF - HF$, ou $BH = r - 9$. On aurait alors $BC^2 = BH^2 + CH^2$, ou $(r + 9)^2 = (9 - r)^2 + (24 - y)^2$. Puisque $(9 - r)^2 = (r - 9)^2$, l'équation obtenue par le théorème de Pythagore ne dépend pas de quel cercle a le plus grand rayon.)

On résout le système d'équations suivant :

$$(4 + r)^2 = y^2 + (r - 4)^2 \quad (1)$$
$$(r + 9)^2 = (24 - y)^2 + (9 - r)^2 \quad (2)$$

L'équation (1) devient $y^2 = (4 + r)^2 - (r - 4)^2$.

On développe et on simplifie le membre de droite pour obtenir $y^2 = 16 + 8r + r^2 - r^2 + 8r - 16$, ou $y^2 = 16r$.

L'équation (2) devient $(24 - y)^2 = (r + 9)^2 - (9 - r)^2$.

Au lieu de développer le membre de droite, on peut le traiter comme une différence de carrés et le factoriser pour obtenir $(24 - y)^2 = (r + 9 + 9 - r)(r + 9 - 9 + r)$, d'où $(24 - y)^2 = (18)(2r)$, ou $(24 - y)^2 = 36r$.

Le système d'équations devient :

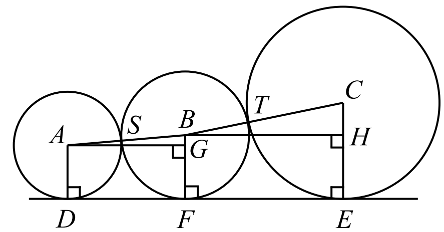
$$y^2 = 16r \quad (3)$$
$$(24 - y)^2 = 36r \quad (4)$$

Puisque $y^2 = 16r = \frac{4}{9}(36r) = \frac{4}{9}(24 - y)^2$, alors $y = \pm\frac{2}{3}(24 - y)$.

On résout ces deux équations, soit $y = \frac{2}{3}(24 - y)$ et $y = -\frac{2}{3}(24 - y)$, pour obtenir $y = \frac{48}{5}$ ou $y = -48$.

Puisque $y > 0$, alors $y = \frac{48}{5}$.
On reporte $y = \frac{48}{5}$ dans l'équation (3) pour obtenir $16r = \left(\frac{48}{5}\right)^2$, d'où $r = \frac{48^2}{5^2} \times \frac{1}{16}$, ou $r = \frac{144}{25}$.
Le troisième cercle a donc un rayon de $\frac{144}{25}$.

*Solution 2*
Soit $A, B$ et $C$ les centres des cercles, comme dans la figure ci-contre.




Soit $F$ le point de contact du deuxième cercle et de la droite horizontale.
Comme dans la partie (a), on construit des segments $AG$ et $BH$ parallèles à $DE$ et des segments $AD, BF$ et $CE$ perpendiculaires à $DE$.
On nomme $S$ et $T$ les points de contact entre les cercles.
On considère le cas plus général : Soit $r_1$ le rayon du cercle de centre $A$, $r_2$ le rayon du cercle de centre $B$ et $r_3$ le rayon du cercle de centre $C$. (Comme dans la Solution 1, on peut supposer que $r_1 < r_2 < r_3$.)
On a alors $AD = AS$, $BS = BF = BT$ et $CT = CE$, d'où $AD = r_1$, $BS = r_2$ et $CT = r_3$.
Comme dans la partie (a), on a $GF = AD = r_1$ et $DF = AG$ (puisque $AGFD$ est un rectangle).
De même, $HE = BF = r_2$ et $BH = FE$ (puisque $BHEF$ est un rectangle).
Dans le triangle rectangle $ABG$, on a $AB = r_1 + r_2$ et $BG = BF - GF$, ou $BG = r_2 - r_1$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AG^2 = AB^2 - BG^2$, ou $AG^2 = (r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2$.
On développe et on simplifie le membre de droite pour obtenir :

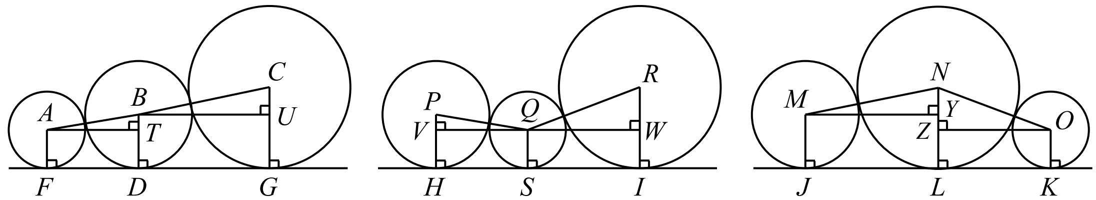
$$\begin{aligned} AG^2 &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2 \\ &= 4r_1r_2 \\ AG &= 2\sqrt{r_1r_2} \quad \text{puisque } AG > 0 \end{aligned}$$

De même, dans le triangle rectangle $BCH$, on a $BC = r_2 + r_3$ et $CH = CE - HE$, ou $CH = r_3 - r_2$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $BH^2 = BC^2 - CH^2$, ou $BH^2 = (r_2+r_3)^2 - (r_3-r_2)^2$.
On considère le membre de droite comme une différence de carrés et on le factorise :

$$\begin{aligned} BH^2 &= (r_2 + r_3 + r_3 - r_2)(r_2 + r_3 - r_3 + r_2) \\ &= (2r_3)(2r_2) \\ &= 4r_2r_3 \\ BH &= 2\sqrt{r_2r_3} \quad \text{puisque } BH > 0 \end{aligned}$$

Donc $DE = DF + FE = AG + BH$, d'où $DE = 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3}$.
On reporte $DE = 24$, $r_1 = 4$ et $r_3 = 9$ dans cette équation pour obtenir
$24 = 2\sqrt{4r_2} + 2\sqrt{9r_2}$.
On simplifie pour obtenir $12 = \sqrt{4r_2} + \sqrt{9r_2}$, ou $12 = 2\sqrt{r_2} + 3\sqrt{r_2}$, ou $12 = 5\sqrt{r_2}$, ou $\sqrt{r_2} = \frac{12}{5}$.
Donc $r_2 = \frac{12^2}{5^2}$, ou $r_2 = \frac{144}{25}$.
Le troisième cercle a un rayon de $\frac{144}{25}$.

(c) On construit des segments de droites comme dans la partie (b) et on nomme des points comme dans la figure.




Comme dans la Solution 2 de la partie (b), on peut démontrer que :

$$\begin{aligned} FG = FD + DG = AT + BU &= 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3} \\ HI = HS + SI = VQ + QW &= 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_1r_3} \\ JK = JL + LK = MY + ZO &= 2\sqrt{r_2r_3} + 2\sqrt{r_1r_3} \end{aligned}$$

(On peut démontrer chacun de ces résultats de façon algébrique, comme dans la partie (b), ou on peut constater que les cercles de centres $P$ et $Q$ ont les mêmes rayons que les cercles respectifs de centres $B$ et $A$, d'où $PQ = AB$ ou, ce qui est plus utile, $VQ = AT$.)

Puisque $r_2 < r_3$, alors $r_1r_2 < r_1r_3$. Donc $2\sqrt{r_1r_2} < 2\sqrt{r_1r_3}$.
Puisque $r_1 < r_2$, alors $r_1r_3 < r_2r_3$. Donc $2\sqrt{r_1r_3} < 2\sqrt{r_2r_3}$.
Soit $x = \sqrt{r_1r_2}, y = \sqrt{r_1r_3}$ et $z = \sqrt{r_2r_3}$.
On a donc $x < y < z$.
Puisque $y < z$, alors $x + y < x + z$, d'où $HI < FG$.
Puisque $x < y$, alors $x + z < y + z$, d'où $FG < JK$.
Puisque les segments $FG$, $HI$ et $JK$, dans un ordre quelconque, ont pour longueurs 18, 20 et 22 et puisque $HI < FG < JK$, alors $HI = 18$, $FG = 20$ et $JK = 22$.
Les trois équations deviennent

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 18 & \quad & & x + y &= 9 & \quad (1) \\ 2x + 2z &= 20 & & \text{ou} & x + z &= 10 & \quad (2) \\ 2z + 2y &= 22 & & & z + y &= 11 & \quad (3) \end{aligned}$$

On additionne les équations (1), (2) et (3), membre par membre, pour obtenir
$2(x + y + z) = 30$, ou $x + y + z = 15$ (4).
On soustrait l'équation (1) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir
$z = (x + y + z) - (x + y)$, ou $z = 15 - 9$, ou $z = 6$.
De même, on soustrait tour à tour l'équation (2) et l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $y = 5$ et $x = 4$.
Puisque $z = 6$, alors $\sqrt{r_2r_3} = 6$, ou $r_2r_3 = 6^2$.
Puisque $y = 5$, alors $\sqrt{r_1r_3} = 5$, ou $r_1r_3 = 5^2$.
Puisque $x = 4$, alors $\sqrt{r_1r_2} = 4$, ou $r_1r_2 = 4^2$.
On multiplie ces trois équations, membre par membre, pour obtenir $r_1^2r_2^2r_3^2 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2$, ou $(r_1r_2r_3)^2 = (4 \cdot 5 \cdot 6)^2$, ou $r_1r_2r_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ (puisque $r_1,r_2,r_3 > 0$), ou $r_1r_2r_3 = 120$.
On divise cette équation par $r_2r_3 = 6^2$, membre par membre, pour obtenir $r_1 = \frac{r_1r_2r_3}{r_2r_3}$, ou $r_1 = \frac{120}{6^2}$, ou $r_1 = \frac{10}{3}$.
De même, on obtient $r_2 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_3}$ et $r_3 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2}$, ou $r_2 = \frac{120}{5^2}$ et $r_3 = \frac{120}{4^2}$, ou $r_2 = \frac{24}{5}$ et $r_3 = \frac{15}{2}$.