Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2014

le mercredi 16 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Il y a 99 entiers de 1 à 99.
Les 9 premiers entiers, soit de 1 à 9, sont des entiers de 1 chiffre et chacun contribue 1 chiffre dans la formation du nouvel entier, pour un total de 9 chiffres.
Les 90 derniers entiers, soit de 10 à 99, sont des entiers de 2 chiffres et chacun contribue 2 chiffres dans la formation du nouvel entier, pour un total de 2×90 chiffres, ou 180 chiffres.
Le nouvel entier est donc formé de $9 + 180$ chiffres, ou 189 chiffres.

(b) D'après la partie (a), les 99 premiers entiers contribuent un total de 189 chiffres dans la formation du nouvel entier.
En plus de ces 99 premiers entiers, le nouvel entier est formé des entiers de 100 à 199 écrits l'un à côté de l'autre. Il y a $199 - 99$ tels entiers, ou 100 entiers, ayant chacun trois chiffres.
Ils contribuent un total de 3×100 chiffres, ou 300 chiffres dans la formation du nouvel entier.
Le nouvel entier est donc formé de $189 + 300$ chiffres, ou 489 chiffres.

(c) D'après la partie (b), les entiers de 1 à 199 forment un entier de 489 chiffres.
Pour obtenir un entier de 1155 chiffres, il faut ajouter $1155 - 489$ chiffres, ou 666 chiffres.
On suppose que tous les entiers de 200 jusqu'à n ont trois chiffres (on le vérifiera plus loin). Il faut donc ajouter $\frac{666}{3}$ entiers, ou 222 entiers pour obtenir un nouvel entier de 1155 chiffres. (Les 222 entiers qui suivent 199 sont en effet des entiers de 3 chiffres.)
L'entier n est donc 222 de plus que l'entier 199. Donc $n = 199 + 222$, ou $n = 421$.
Si les entiers de 1 à 421 sont écrits l'un à côté de l'autre, ils forment un nouvel entier de 1155 chiffres.

(d) D'après la partie (c), les entiers de 1 à 421 forment un entier de 1155 chiffres.
Pour obtenir un entier de 1358 chiffres, il faut ajouter $1358 - 1155$ chiffres, ou 203 chiffres.
Si on ajoute les 68 entiers qui suivent l'entier 421, on ajoute 3×68 chiffres, ou 204 chiffres au nouvel entier (puisque chacun de ces 68 entiers est un entier de 3 chiffres).
Le 68$^{\text{e}}$ entier après 421 est égal à $421 + 68$, ou 489.
Or, il ne faut ajouter que 203 chiffres et non pas 204 chiffres. Or, le 204$^{\text{e}}$ chiffre est le dernier chiffre du nombre 489, soit 9. Si on enlève ce chiffre, le 203$^{\text{e}}$ chiffre est 8.
Donc, si on écrit les entiers de 1 à 100 l'un à côté de l'autre, le 1358$^{\text{e}}$ chiffre du nouvel entier ainsi formé est un 8.

2. (a) Les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Donc $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB$, d'où $\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ$, ou $\angle BAC = 70^\circ$.

(b) Puisque BD est la bissectrice de l'angle ABC, alors $\angle DBC = \frac{60^\circ}{2}$, ou $\angle DBC = 30^\circ$.
Puisque CD est la bissectrice de l'angle ACB, alors $\angle DCB = \frac{50^\circ}{2}$, ou $\angle DCB = 25^\circ$.
Puisque mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°,

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle DCB = 180^\circ - 30^\circ - 25^\circ = 125^\circ.$$

(c) Dans le triangle SQR, soit x° la mesure de l'angle SQR. Puisque le triangle SQR est isocèle ($QS = RS$), alors $\angle SRQ = \angle SQR = x^\circ$.
Les mesures des angles du triangle SQR ont une somme de 180°.
Donc $\angle SQR + \angle SRQ + \angle QSR = 180^\circ$, d'où $x^\circ + x^\circ + 140^\circ = 180^\circ$, ou $2x = 40$, ou $x = 20$.
Puisque QS est la bissectrice de l'angle PQR, alors $\angle PQS = \angle SQR = x^\circ$.
De même, puisque RS est la bissectrice de l'angle PRQ, alors $\angle PRS = \angle SRQ = x^\circ$.
Dans le triangle PQR, $\angle PQR = \angle PQS + \angle SQR$ et $\angle PRQ = \angle PRS + \angle SRQ$.

Donc $\angle PQR = (2x)^\circ$ et $\angle PRQ = (2x)^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de 180°, alors $\angle QPR = 180^\circ - \angle PQR - \angle PRQ$, d'où $\angle QPR = 180^\circ - (2x)^\circ - (2x)^\circ$, ou $\angle QPR = 180^\circ - (4x)^\circ$. Donc $\angle QPR = 180^\circ - (4 \times 20)^\circ$, ou $\angle QPR = 100^\circ$.

(d) On suppose qu'il est possible que $\angle QSR = 80^\circ$.
On procède comme dans la partie (c). Soit x° la mesure de l'angle SQR.
Donc $\angle SRQ = \angle SQR = y^\circ$.
Dans le triangle SQR, $\angle SQR + \angle SRQ + \angle QSR = 180^\circ$. Donc $y^\circ + y^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, d'où $2y = 100$, ou $y = 50$.
Dans le triangle PQR, $\angle PQR = \angle PQS + \angle SQR$ et $\angle PRQ = \angle PRS + \angle SRQ$ (QS et RS sont des bissectrices). Donc $\angle PQR = (2y)^\circ$ et $\angle PRQ = (2y)^\circ$.
Donc $\angle QPR = 180^\circ - \angle PQR - \angle PRQ$, d'où $\angle QPR = 180^\circ - (2y)^\circ - (2y)^\circ$, ou $\angle QPR = 180^\circ - (4y)^\circ$. Donc $\angle QPR = 180^\circ - (4 \times 50)^\circ$, ou $\angle QPR = -20^\circ$.
Puisque tous les angles doivent avoir une mesure positive, alors la seule hypothèse que l'on a faite (celle que $\angle QSR = 80^\circ$) doit être fausse.
Il est donc impossible que $\angle QSR = 80^\circ$.

3. (a) Puisque la base BC du triangle ABC est horizontale, elle a une longueur de $10 - 0$, ou 10.
La hauteur correspondante du triangle ABC est donc égale à l'ordonnée du point A, soit 9.
Au départ, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 9$, ou 45.

(b) Lorsque le sommet A est au point $(2, 7)$, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 7$, ou 35 (puisque le triangle a une base de 10 et une hauteur de 7).
La personne qui réussit à rendre l'aire du triangle ABC égale à 25 gagne la partie.
La base BC du triangle ABC a une longueur de 10 tout au long de la partie, car seul le point A peut bouger.
L'aire du triangle ABC est donc égale à 25 lorsque la hauteur est égale à 5, puisque $\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$.
La hauteur est égale à 5 lorsque l'ordonnée du point A est égale à 5.
Donc, la seule façon pour un joueur de gagner est de changer l'ordonnée du point A à 5.

Or, c'est au tour de Damien de jouer. Damien peut faire bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(2, 6)$ ou d'une unité vers la gauche à la position $(1, 7)$.
Dans le premier cas, Édith peut ensuite faire bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(2, 5)$, ce qui est une position gagnante (puisque A a une ordonnée de 5).
Dans le deuxième cas, Édith peut ensuite faire bouger le point A d'une unité vers la gauche à la position $(0, 7)$ (Elle ne ferait pas bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(1, 6)$ car Damien pourrait gagner au tour suivant).
Au tour suivant, Damien doit faire bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(0, 6)$, puisque s'il faisait bouger le point A d'une unité vers la gauche, l'abscisse du point serait négative, ce qui est interdit.
Au tour suivant, Édith fait bouger le point A d'une unité vers le bas à la position $(0, 5)$, qui est une position gagnante.
On a démontré que peu importe comment Damien joue, Édith peut toujours gagner lorsque le sommet A est en position $(2, 7)$ et que c'est au tour de Damien de jouer.

(c) (i) Lorsque le point A est en position $(6, 9)$, le deuxième joueur, soit Gilles, a une stratégie gagnante. La stratégie sera décrite dans la partie (ii) et justifiée dans la partie (iii).

(ii) On peut décrire la stratégie gagnante de plusieurs façons.
Par exemple, on peut dire que Gilles jouera exactement comme Farid. Si celui-ci fait bouger le point A d'une position vers la gauche ou vers le bas, Gilles fait de même à son tour.

(iii) Pourquoi cette stratégie est-elle gagnante ?
On suppose d'abord que Gilles peut toujours répéter le mouvement de Farid (on le prouvera plus loin).
Au départ, le sommet A a une ordonnée de 9.
Si Farid fait bouger le point d'une unité vers le bas, jusqu'à 8, Gilles peut faire de même jusqu'à 7.
Si Farid fait bouger le point d'une unité vers le bas, jusqu'à 6, Gilles peut faire de même jusqu'à 5.
Dans la partie (b), on a vu que le joueur qui fait bouger le point A pour qu'il ait une ordonnée de 5 gagne la partie.
Dans ce cas, Gilles gagne.

Il reste à démontrer que Gilles peut toujours faire comme Farid.
On considère d'abord les mouvements vers le bas.
Comme ci-haut, un mouvement vers le bas peut toujours être suivi d'un mouvement vers le bas, ce qui se termine éventuellement par le sommet A avec une ordonnée de 5, Gilles étant gagnant.
En d'autres mots, dans ce cas, l'ordonnée de A ne sera jamais négative et Gilles peut toujours faire comme Farid et gagner.
On considère ensuite les mouvements vers la gauche.
Au départ, le point A a une abscisse de 6, ce qui est un entier pair.
Si Farid fait bouger le point A d'une unité vers la gauche, le point A aurait une abscisse de 5, ce qui est un entier impair.
Au tour suivant, Gilles fait de même et le point A a une abscisse de 4, ce qui est un entier pair.
En d'autres mots, chaque fois que Farid fait bouger le point A d'une unité vers la gauche, l'abscisse du point A devient un entier impair et au tour suivant, Gilles fait de même, de sorte que l'abscisse redevient un entier pair.
Puisque la plus petite abscisse permise est 0 (elle ne peut être négative) et que cette abscisse est paire, c'est Gilles qui, au besoin, sera le dernier à faire bouger le point A vers la gauche.
Au tour suivant, Farid serait obligé de faire bouger le point A vers le bas.

On a démontré que Gilles peut toujours répéter les mouvements de Farid et ce faisant, s'assurer que le point A obtienne une ordonnée de 5, ce qui est une position gagnante.

4. (a) Les huit sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$.
Les huit sommes des sous-ensembles sont donc : $0, 1, 2, 3, 3, 4, 5$ et 6.

(b) Lorsqu'on construit un sous-ensemble de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, on doit décider si chaque élément, soit 1, 2, 3, 4 et 5, en fera partie ou non.
Il y a donc 2 choix par rapport à l'élément 1 ; pour chaque choix, il y a 2 choix par rapport à l'élément 2 et ainsi de suite.
Il y a donc un total de 2^5 choix, ou 32 choix, donnant chacun un sous-ensemble particulier.

Il y a donc 32 sous-ensembles.
On considère le nombre de sous-ensembles qui contiennent l'élément 1.
Si l'élément 1 a été choisi dans la construction des sous-ensembles, il y a 2 choix pour chacun des éléments 2, 3, 4 et 5. Il y a donc 2^4 sous-ensembles, ou 16 sous-ensembles qui contiennent l'élément 1 (et il y a donc $32 - 16$ sous-ensembles, ou 16 sous-ensembles qui ne contiennent pas le lélément 1).
De la même manière, il y a 16 sous-ensembles qui contiennent l'élément 2, 16 sous-ensembles qui contiennent l'élément 3, et ainsi de suite.
Puisque le nombre 1 parait dans exactement 16 sous-ensembles, il contribue 1×16, ou 16 à la somme des sommes des sous-ensembles.
De même, puisque le nombre 2 parait dans exactement 16 sous-ensembles, il contribue 2×16, ou 32 à la somme des sommes des sous-ensembles.
Il en est de même pour les nombres 3, 4 et 5. En tout, cela donne :

$$(1 \times 16) + (2 \times 16) + (3 \times 16) + (4 \times 16) + (5 \times 16) = 16(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 16(15) = 240.$$

La somme des sommes des sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est donc égale à 240.

(c) Chaque sous-ensemble de l'ensemble $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 16\}$ contient de zéro à quatre des entiers impairs $1, 3, 5, 7$ et de zéro à quatre des multiples de 4, soit $4, 8, 12, 16$.
Si un sous-ensemble ne contient que des nombres divisibles par 4, alors la somme du sous-ensemble l'est aussi (puisque la somme de multiples de 4 est un multiple de 4).
Donc, chaque sous-ensemble de $\{4, 8, 12, 16\}$ a une somme des sous-ensembles divisible par 4.
Comme dans la partie (b), chacun des éléments de l'ensemble $\{4, 8, 12, 16\}$ paraitra dans 2^3, ou 8 des 16 sous-ensembles. La somme des sommes des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$ est donc égale à $(4 \times 8) + (8 \times 8) + (12 \times 8) + (16 \times 8)$, ou $8(4 + 8 + 12 + 16)$, ou 320.
Tout sous-ensemble comprend 0,1,2,3 ou 4 des éléments de l'ensemble $\{4, 8, 12, 16\}$.
La somme de ces éléments est divisible par 4.
Pour que la somme de tous les éléments du sous-ensemble soit divisible par 4, la somme des éléments (impairs) qui restent doit être divisible par 4.
Or, certains des sous-ensembles de $\{1, 3, 5, 7\}$ ont une somme divisible par 4.
Il s'agit des sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{1, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ et de l'ensemble vide $\{\}$. (Les autres sous-ensembles de $\{1, 3, 5, 7\}$ ont une somme non divisible par 4, puisque les éléments sont tous impairs et que la somme de trois entiers impairs est impaire et les sous-ensembles $\{1, 5\}$ et $\{3, 7\}$ ont une somme respective de 6 et 10).
Puisque les sous-ensembles $\{1, 3\}$, $\{1, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$ ont une somme divisible par 4, alors les ensembles formés de tous leurs éléments et de certains éléments de l'ensemble $\{4, 8, 12, 16\}$ produiront un nouveau sous-ensemble dont la somme est divisible par 4.
Il reste à déterminer la somme de ces sommes de sous-ensembles.
On considère d'abord les sous-ensembles formés des deux éléments de $\{1, 3\}$ avec les éléments de chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$. On sait que les sommes de sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$ ont une somme de 320.
Lorsqu'on ajoute les éléments de $\{1, 3\}$ à chacun de ces sous-ensembles, on ajoute $1 + 3$, ou 4 à chaque somme de sous-ensemble.
Puisqu'il y a 16 sous-ensembles, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(4 \times 16) + 320$, ou 384.
De même, si on ajoute les éléments de $\{1, 7\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, cela ajoute $1 + 7$, ou 8 à chaque somme de sous-ensembles.

Puisqu'il y a 16 sous-ensembles, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(8 \times 16) + 320$, ou 448.
Si on ajoute les éléments de $\{3, 5\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(8 \times 16) + 320$, ou 448 .
Si on ajoute les éléments de $\{5, 7\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(12 \times 16) + 320$, ou 512.
Si on ajoute les éléments de $\{1, 3, 5, 7\}$ à chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de $(16 \times 16) + 320$, ou 576.
Si on ajoute les éléments de l'ensemble vide à $\{4, 8, 12, 16\}$ chacun des sous-ensembles de $\{4, 8, 12, 16\}$, les sommes de ces sous-ensembles ont une somme de 320
$((0 \times 16) + 320 = 320)$.
Puisque ce sont les seuls sous-ensembles de $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 16\}$ qui ont une somme divisible par 4, les sommes de sous-ensembles de cet ensemble ont une somme de
$384 + 448 + 448 + 512 + 576 + 320$, ou 2688.