Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2014

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 20 février 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On évalue d'abord le numérateur pour obtenir $\dfrac{15-3^2}{3} = \dfrac{15-9}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Réponse : (A)

2. Puisque $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$ et $10^5 = 100\,000$, alors 2014 est entre 10^3 et 10^4.

Réponse : (D)

3. Lorsque $x = 2$, on a $(x+2-x)(2-x-2) = (2+2-2)(2-2-2) = (2)(-2) = -4$.
On aurait pu simplifier $(x+2-x)(2-x-2)$ pour obtenir $(2)(-x)$, ou $-2x$, puis reporter $x = 2$ dans cette expression pour obtenir $-2(2)$, ou -4.

Réponse : (E)

4. Les diviseurs positifs de 24 sont $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ et 24.
Les paires de diviseurs qui donnent un produit de 24 sont 24×1, 12×2, 8×3 et 6×4.
On cherche deux entiers positifs x et y ayant un produit de 24 et une différence de 5.
Puisque $8 \times 3 = 24$ et $8 - 3 = 5$, alors $x = 8$ et $y = 3$.
Donc $x + y = 8 + 3$, ou $x + y = 11$.

Réponse : (B)

5. Puisque le carré de $WXYZ$ a une aire de 9, ses côtés ont une longueur de $\sqrt{9}$, ou 3.
Puisque W est le centre du cercle et que X est situé sur le cercle, alors WX est un rayon.
Le cercle a donc un rayon de 3.
Il a donc une aire de $\pi(3^2)$, ou 9π.

Réponse : (C)

6. On sait que 50 % correspond à $\frac{1}{2}$, tandis que 75 % correspond à $\frac{3}{4}$.
Puisque 50 % de N est égal à 16, alors la moitié de N est égal à 16. Donc $N = 2(16)$, ou $N = 32$.
Donc 75 % de N est égal à $\frac{3}{4}N$, ou $\frac{3}{4}(32)$, ce qui est égal à 24.

Réponse : (D)

7. *Solution 1*
L'angle SRP est un angle extérieur du triangle PQR.
Donc $\angle SRP = \angle RPQ + \angle RQP$, d'où $(180 - x)^\circ = 30^\circ + 2x^\circ$.
Donc $180 - x = 30 + 2x$, d'où $3x = 150$, ou $x = 50$.

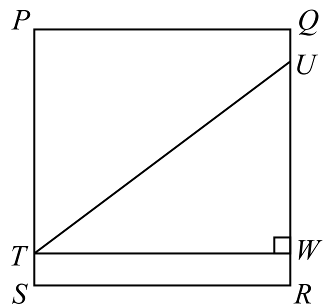
Solution 2
Puisque QRS est un segment de droite et que $\angle SRP = (180 - x)^\circ$, alors l'angle PRQ est l'angle supplémentaire de l'angle SRP. Donc $\angle PRQ = x^\circ$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°,
alors $\angle PRQ + \angle PQR + \angle RPQ = 180^\circ$. Donc $x^\circ + 2x^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.
D'après cette dernière équation, on a $3x = 150$, ou $x = 50$.

Réponse : (E)

8. On représente Alexa, Boris, Carla, Dan et Éric par les lettres A, B, C, D et E, respectivement.
On utilise le signe ($>$) pour représenter « est plus grand que » et le signe ($<$) pour représenter « est plus court que ».
D'après le premier boulet, $A > C$.
D'après le deuxième boulet, $D < E$ et $D > B$, d'où $E > D > B$.
D'après le troisième boulet, $E < C$, ou $C > E$.
Puisque $A > C$ et $C > E$ et $E > D > B$, alors $A > C > E > D > B$, ce qui indique que Boris est la personne la plus courte.

Réponse : (B)

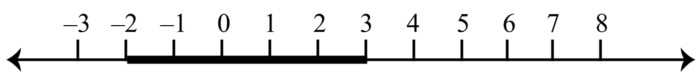
9. Au point T, on abaisse une perpendiculaire TW au côté QR.



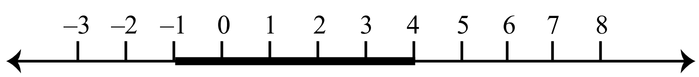
Puisque le quadrilatère $TWRS$ a trois angles droits (en W, R et S), il est un rectangle.
Donc $WR = TS = 1$ et $TW = SR = 8$.
Puisque $QU = 1$, alors $UW = QR - QU - WR$, d'où $UW = 8 - 1 - 1$, ou $UW = 6$.
Le triangle TWU est rectangle en W.
D'après le théorème de Pythagore, on a $TU^2 = TW^2 + UW^2$.
Donc $TU^2 = 8^2 + 6^2$, ou $TU^2 = 64 + 36$, ou $TU^2 = 100$.
Puisque $TU > 0$, alors $TU = \sqrt{100}$, ou $TU = 10$.

Réponse : (C)

10. Après la première rotation, l'image du segment est située entre -2 et 3.



Cette image subit une rotation de centre au point 1.
Puisque l'extrémité droite de cette image est à 2 unités à la droite de 1, son image, après la deuxième rotation sera à 2 unités à la gauche de 1.
L'extrémité gauche de cette dernière image est donc au point -1.
Puisque le segment a une longueur de 5, son extrémité droite sera au point $-1 + 5$, ou 4.



L'image, après la deuxième rotation, est située entre -1 et 4.

Réponse : (B)

11. Puisque $a = \dfrac{2}{3}b$, alors $3a = 2b$. Puisque $b \neq 0$, alors $a \neq 0$.

Donc $\dfrac{9a + 8b}{6a} = \dfrac{9a + 4(2b)}{6a} = \dfrac{9a + 4(3a)}{6a} = \dfrac{21a}{6a} = \dfrac{7}{2}$ (puisque $a \neq 0$).

On aurait pu écrire $\dfrac{9a + 8b}{6a} = \dfrac{3(3a) + 8b}{2(3a)} = \dfrac{3(2b) + 8b}{2(2b)} = \dfrac{14b}{4b} = \dfrac{7}{2}$ (puisque $b \neq 0$).

Réponse : (A)

12. Puisque $100 = 10^2$, alors $100^4 = (10^2)^4 = 10^8$.
On veut donc résoudre l'équation $10^x \cdot 10^5 = 10^8$, qui est équivalente à l'équation $10^{x+5} = 10^8$.
On a donc $x + 5 = 8$, ou $x = 3$.

Réponse : (E)

13. On remarque que la somme des chiffres du nombre 1000 n'est pas égale à 3. Tous les autres entiers dans l'intervalle donné ont deux ou trois chiffres.
Si la somme des chiffres d'un entier est égale à 3, aucun des chiffres ne peut être supérieur à 3.
Si un entier de deux chiffres est tel que la somme de ses chiffres est égale à 3, ses chiffres doivent être 1, 2 ou 3. Les entiers possibles sont 12, 21 et 30.
Si un entier de trois chiffres est tel que la somme de ses chiffres est égale à 3, alors son chiffre des centaines doit être 1, 2 ou 3.
Si le chiffre des centaines est 3, l'entier doit être 300, car la somme de ses chiffres est égale à 3.
Si le chiffre des centaines est 2, l'entier doit être 210 ou 201, car la somme de ses chiffres est égale à 3.
Si le chiffre des centaines est 1, les deux autres chiffres ont une somme de 2. Ces deux chiffres doivent donc être 2 et 0, 1 et 1, ou 0 et 2, ce qui donne les entiers 120, 111 ou 102.
En tout, il y a 9 entiers, entre 10 et 1000, dont la somme des chiffres est égale à 3.

Réponse : (D)

14. Soit x le nombre de jours où Paul travaillait.
Pour chacun de ces jours, il gagnait 100 $ et ne déboursait rien. Il a donc gagné un total de $100x$ dollars.
Puisque Paul a travaillé pendant x des 70 jours, il n'a pas travaillé pendant $70 - x$ jours.
Pour chacun de ces jours, il déboursait 20 $ pour ses repas. Il a donc déboursé un total de $20(70 - x)$ dollars pour ses repas.
Après 70 jours, l'argent qu'il a gagné moins l'argent qu'il a déboursé totalisait 5440 $.
Ceci correspond à $100x - 20(70 - x) = 5440$.
Donc $100x - 1400 + 20x = 5440$, d'où $120x = 6840$, ou $x = 57$.
Donc, Paul a travaillé pendant 57 des 70 jours.

(On aurait pu vérifier pour chacun des choix de réponse en calculant l'argent reçu et l'argent déboursé.)

Réponse : (D)

15. La première fois que la flèche tourne, il y a 4 résultats équiprobables, soit 1, 2, 3 et 4. Pour chacun de ces résultats, il y a 4 résultats équiprobables pour le deuxième tour, soit 1, 2, 3 et 4. Il y a donc 16 résultats équiprobables pour les deux tours de la flèche. Chacun de ces 16 résultats nous donne un produit, car Diane multiplie les deux numéros obtenus. On place les produits dans le tableau suivant. La colonne de gauche représente les résultats possibles lors du premier tour de la flèche et la rangée du dessus représente les résultats possibles lors du deuxième tour. Les produits correspondants se trouvent dans les cellules correspondantes du tableau :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Puisque les 16 résultats possibles sont équiprobables, les 16 produits le sont aussi.
Or, le produit 4 survient le plus souvent, soit trois fois. Il est donc le plus probable.

Réponse : (B)

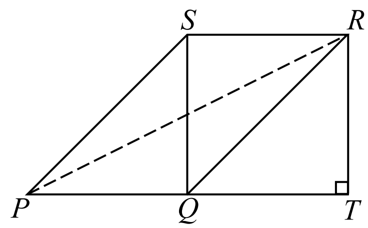
16. Puisque Jade n'a jamais dépassé la vitesse de 80 km/h pendant son voyage de 5 heures, alors la distance parcourue ne peut être supérieure à 5×80 km, ou 400 km.
Puisque le compteur kilométrique indiquait 13 831 km au départ, alors à l'arrivée, il ne peut indiquer plus de $(13\,831 + 400)$ km, ou 14 231 km.
Pour connaitre la vitesse moyenne maximale que Jade a pu atteindre, on déterminera la plus grande distance qu'elle a pu parcourir en 5 heures.
Puisque le compteur kilométrique indique un palindrome à l'arrivée, on cherche le plus grand palindrome inférieur à 14 231. Il s'agit de 14 141. (Pour le trouver, on cherche les palindromes supérieurs à 14 000 et inférieurs à 14 231. Ces palindromes doivent se terminer par les chiffres 41. Ils sont donc de la forme $14\,x41$. Le plus grand palindrome de cette forme, inférieur à 14 231, est 14 141.)
Puisque le compteur kilométrique ne peut dépasser 14 141, alors la distance maximale que Jade a pu parcourir en 5 heures est de $(14\,141 - 13\,831)$ km, ou 310 km. La vitesse moyenne maximale qu'elle a pu atteindre est de $\frac{310}{5}$ km/h, ou 62 km/h.

Réponse : (A)

17. Soit n le nombre d'employés dans le magasin de Sergio.
D'après le premier calcul, Sergio a déterminé que ses n employés avaient vendu en moyenne 75 items par employé, soit un total de $75n$ items.
Le lendemain, un employé a vendu 6 items, un employé a vendu 5 items, une employée a vendu 4 items et les $(n - 3)$ autres employés ont vendu 3 items.
À la fin de cette journée, le nombre total d'items vendus est de $75n + (6 + 5 + 4 + (n - 3)3)$, ou $75n + 15 + 3n - 9$, ou $78n + 6$.
Puisque la moyenne d'items vendus par employé est maintenant de 78,3, alors $\dfrac{78n + 6}{n} = 78{,}3$, ou $78n + 6 = 78{,}3n$. Donc $0{,}3n = 6$, d'où $n = 20$.
Il y a donc 20 employés en tout.

Réponse : (C)

18. Soit x mm la longueur des côtés du carré initial.
On prolonge PQ. Au point R, on abaisse une perpendiculaire à PQ, de manière qu'elle coupe le prolongement de PQ au point T.



Le quadrilatère $SRTQ$ est un carré, puisqu'il a des angles droits en S, Q et T (ce qui en fait un rectangle) et puisque $SR = SQ$ (ce qui fait du rectangle un carré).
Or, $RT = SQ = x$ mm et $PT = PQ + QT = 2x$ mm.
D'après le théorème de Pythagore, on a $PR^2 = PT^2 + RT^2$, d'où $90^2 = x^2 + (2x)^2$.
Donc $5x^2 = 8100$, ou $x^2 = 1620$.
L'aire du carré initial est de x^2 mm^2, ou 1620 mm^2.

Réponse : (B)

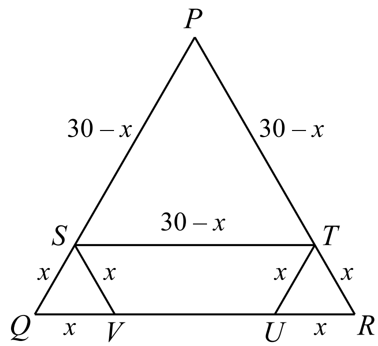
19. On considère trois entiers de trois chiffres, RST, UVW et XYZ.
L'entier RST a une valeur de $100R + 10S + T$, l'entier UVW a une valeur de $100U + 10V + W$ et l'entier XYZ a une valeur de $100X + 10Y + Z$.
Donc :

$$\begin{aligned} RST + UVW + XYZ &= 100R + 10S + T + 100U + 10V + W + 100X + 10Y + Z \\ &= 100(R + U + X) + 10(S + V + Y) + (T + W + Z) \end{aligned}$$

On remarque que les chiffres $R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ peuvent être n'importe quel chiffre de 0 à 9, à l'exception de R, U et X qui ne peuvent être 0.
Max veut que $100(R+U+X)+10(S+V+Y)+(T+W+Z)$ soit aussi grand que possible. Pour ce faire, il place les plus grands chiffres (9, 8 et 7) comme chiffres des centaines, les plus grands chiffres suivants (6, 5 et 4) comme chiffres des dizaines et les chiffres suivants (3, 2 et 1) comme chiffres des unités. On remarque que les chiffres doivent être différents et que la distribution des trois chiffres dans une même valeur positionnelle (centaines, dizaines ou unités) n'importe pas, puisqu'elle ne change pas la somme.
La somme de Max est donc de $100(9 + 8 + 7) + 10(6 + 5 + 4) + (3 + 2 + 1)$, ou $2400 + 150 + 6$, ou 2556.
Min Hee veut que $100(R + U + X) + 10(S + V + Y) + (T + W + Z)$ soit aussi petit que possible. Pour ce faire, elle place les plus petits chiffres permis (1, 2 et 3) comme chiffres des centaines, les plus petits chiffres suivants (0, 4 et 5) comme chiffres des dizaines et les chiffres suivants (6, 7 et 8) comme chiffres des unités.
La somme de Min Hee est donc de $100(1 + 2 + 3) + 10(0 + 4 + 5) + (6 + 7 + 8)$, ou $600 + 90 + 21$, ou 711.
La différence entre ces sommes est de $2556 - 711$, ou 1845.

Réponse : (C)

20. Puisque $PQ = QR = RP$, le triangle PQR est équilatéral et tous ses angles mesurent 60°.
Puisque ST est parallèle à QR, que SV est parallèle à PR et que TU est parallèle à PQ, alors tous les angles des triangles PST, SQV et TUR mesurent 60°. Ces triangles sont donc équilatéraux.
Soit $SQ = x$.
Puisque le triangle SQV est équilatéral, alors $QV = VS = SQ = x$.
Puisque $PQ = 30$, alors $PS = 30 - x$.
Puisque le triangle PST est équilatéral, alors $ST = TP = PS = 30 - x$.
Puisque $PR = 30$, alors $TR = 30 - (30 - x) = x$.
Puisque le triangle TUR est équilatéral, alors $TU = UR = TR = x$.



Puisque $VS + ST + TU = 35$, alors $x + (30 - x) + x = 35$, d'où $30 + x = 35$, ou $x = 5$.
Donc $VU = QR - QV - UR$, d'où $VU = 30 - x - x$, ou $VU = 30 - 5 - 5$, ou $VU = 20$.

Réponse : (D)

21. Lorsqu'on retire 2 kg d'arachides de la boite qui contenait 10 kg d'arachides, il reste 8 kg d'arachides dans la boite.
Puisqu'on ajoute 2 kg de raisins secs, il y a 2 kg de raisins secs dans la boite.
On mélange bien les raisins secs et les arachides.
On retire ensuite 2 kg de ce mélange, ce qui représente un cinquième de la masse, on retire donc un cinquième de la masse d'arachides (c.-à-d. $\frac{8}{5}$ kg) et un cinquième de la masse des raisins secs (c.-à-d. $\frac{2}{5}$ kg).
Dans la boite, il reste $(8 - \frac{8}{5})$ kg, ou $\frac{32}{5}$ kg d'arachides et $(2 - \frac{2}{5})$ kg, ou $\frac{8}{5}$ kg de raisins secs.
Lorsqu'on ajoute 2 kg de raisins secs, la masse de raisins secs dans la boite est de $(\frac{8}{5} + 2)$ kg, ou $\frac{18}{5}$ kg. Il y a donc $\frac{32}{5}$ kg d'arachides et $\frac{18}{5}$ kg de raisins secs dans la boite.
Le rapport des masses est donc de $\frac{32}{5} : \frac{18}{5}$, ou 32 : 18, ou 16 : 9.

Réponse : (E)

22. Lorsque Julie se déplace de J à G, soit x km la distance parcourue en montant, y km la distance parcourue sur terrain plat et z km la distance parcourue en descendant.
Donc en se déplaçant de G à J, elle parcourt z km en montant, y km sur terrain plat et x km en descendant. En effet, ce qu'elle parcourt en montant à l'aller est parcouru en descendant au retour et ce qu'elle parcourt en descendant à l'aller est parcouru en montant au retour.
On sait que Julie se déplace à une vitesse de 77 km/h sur terrain plat, de 63 km/h en montant et de 99 km/h en descendant.
Lorsque la distance est constante, on a vitesse $= \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$ ou distance = vitesse × temps ou temps $= \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$. D'après cette dernière formule, en se déplaçant de J à G, Julie met $\frac{x}{63}$ heures à se déplacer en montant, $\frac{y}{77}$ heures à se déplacer sur terrain plat et $\frac{z}{99}$ heures à se déplacer en descendant.
On sait qu'elle met 3 heures et 40 minutes (c.-à-d. $3\frac{2}{3}$ heures ou $\frac{11}{3}$ heures) pour se rendre de J à G. Donc :

$$\frac{x}{63}+\frac{y}{77}+\frac{z}{99}=\frac{11}{3}$$

De la même façon, lorsque Julie revient de G à J, on a :

$$\frac{x}{99}+\frac{y}{77}+\frac{z}{63}=\frac{13}{3}$$

On cherche la distance totale de J à G, qui est égale à $(x+y+z)$ km. On doit donc déterminer la valeur de $x+y+z$.
On additionne les deux équations précédentes, membre par membre, et on simplifie pour obtenir :

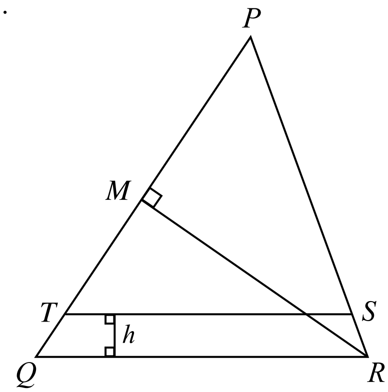
$$\begin{aligned}
\frac{x}{63}+\frac{x}{99}+\frac{y}{77}+\frac{y}{77}+\frac{z}{99}+\frac{z}{63} &= \frac{24}{3}\\
x\left(\frac{1}{63}+\frac{1}{99}\right)+y\left(\frac{1}{77}+\frac{1}{77}\right)+z\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{63}\right) &= 8\\
x\left(\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}\right)+\frac{2}{77}y+z\left(\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 9}\right) &= 8\\
x\left(\frac{11}{7\cdot 9\cdot 11}+\frac{7}{7\cdot 9\cdot 11}\right)+\frac{2}{77}y+z\left(\frac{7}{7\cdot 9\cdot 11}+\frac{11}{7\cdot 9\cdot 11}\right) &= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{18}{7\cdot 9\cdot 11}\right)+\frac{2}{77}y+z\left(\frac{18}{7\cdot 9\cdot 11}\right) &= 8\\
x\left(\frac{2}{7\cdot 11}\right)+\frac{2}{77}y+z\left(\frac{2}{7\cdot 11}\right) &= 8\\
\frac{2}{77}(x+y+z) &= 8
\end{aligned}$$

Donc $x+y+z=\frac{77}{2}\cdot 8$, ou $x+y+z=77\cdot 4$, ou $x+y+z=308$.
La distance de J à G est donc de 308 km.

Réponse : (C)

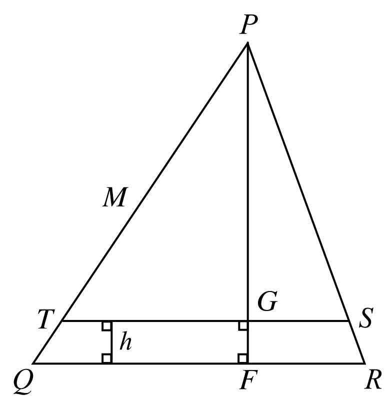
23. Soit S et T les deux sommets indiqués dans la figure ci-dessous.
On calcule d'abord l'aire du triangle PQR.
Au point R, on abaisse une perpendiculaire à PQ.
Puisque $PR = QR$, le triangle PQR est isocèle et la perpendiculaire de R à PQ coupe PQ en son milieu M.
Donc, $PM = MQ = \frac{1}{2}(150) = 75$.



D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$RM^2 = RQ^2 - MQ^2 = 125^2 - 75^2 = 15\,625 - 5625 = 10\,000$$

Puisque $RM > 0$, alors $RM = \sqrt{10\,000}$, ou $RM = 100$.
Le triangle PQR a donc une aire de $\frac{1}{2}(RM)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}(100)(150)$, ou 7500.
Soit F le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur QR. Soit G le point où PF coupe TS (à un angle de 90°).

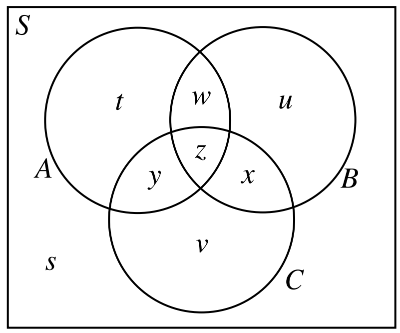


L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(QR)(PF)$ également.
Donc $\frac{1}{2}(125)(PF) = 7500$, d'où $PF = \frac{15\,000}{125}$, ou $PF = 120$.
Puisque TS est parallèle à QR, alors $\angle PTS = \angle PQR$ et $\angle PST = \angle PRQ$.
Les triangles PTS et PQR sont donc semblables.
Puisque les quatre sections du triangle PQR ont la même aire, chacune a une aire égale à un quart de l'aire du triangle. Donc, l'aire du triangle PTS est égale à trois quarts de l'aire du triangle PQR.
Les dimensions du triangle PTS sont donc $\sqrt{\frac{3}{4}}$, ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de celles du triangle PQR. (De façon générale, si les aires de deux triangles semblables ont un rapport de $k : 1$, alors les longueurs de deux côtés correspondants ont un rapport de $\sqrt{k} : 1$.)
Donc $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}PF$, d'où $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}(120)$, ou $PG = 60\sqrt{3}$.
Puisque TS est parallèle à QR, alors $h = GF = PF - PG$, d'où $h = 120 - 60\sqrt{3}$, ou $h \approx 16{,}077$.
Parmi les choix de réponse, la hauteur est plus près de 16,1.

Réponse : (E)

24. Si on doit placer n boules dans n boites, une boule par boite sans restrictions, alors le nombre de façons de le faire est égal à $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. (En effet, il y a n choix pour la boule qui ira dans la boite 1 ; pour chaque choix, il y a $n-1$ choix pour la boule qui ira dans la boite 2 ; pour chacune de ces paires de choix, il y a $n-2$ choix pour la boule qui ira dans la boite 3, et ainsi de suite. En tout, il y a $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$ choix.)

On trace un diagramme de Venn dans lequel S représente toutes les façons de placer 8 boules dans 8 boites sans restrictions, le cercle A représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1, le cercle B représente les façons de placer les boules lorsque la boule 2 est dans la boite 2 et le cercle C représente les façons de placer les boules lorsque la boule 3 est dans la boite 3.



Dans le diagramme, s représente le nombre de façons de placer les boules lorsque la boule 1 n'est pas dans la boite 1 (s est à l'extérieur du cercle A), la boule 2 n'est pas dans la boite 2 (s est à l'extérieur du cercle B) et la boule 3 n'est pas dans la boite 3 (s est à l'extérieur du cercle C). On cherche la valeur de s.
Le nombre de façons dans S est égal à $8!$.
Le cercle A représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1 et les 7 autres boules sont placées sans restrictions. Il y a $7!$ façons de le faire.
De même, il y a $7!$ façons dans le cercle B et $7!$ façons dans le cercle C.
Donc $t + w + y + z = u + w + x + z = v + x + y + z = 7!$.
La partie commune aux cercles A et B représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1, la boule 2 est dans la boite 2 et les 6 autres boules sont placées sans restrictions. Il y a $6!$ façons de le faire.
De même, il y a $6!$ façons dans l'intersection des cercles A et C, et $6!$ façons dans l'intersection des cercles B et C.
Donc $w + z = y + z = x + z = 6!$.
L'intersection des trois cercles représente les façons de placer les boules lorsque la boule 1 est dans la boite 1, la boule 2 est dans la boite 2, la boule 3 est dans la boite 3 et les 5 autres boules sont placées sans restrictions. Il y a $5!$ façons de le faire.
Donc $z = 5!$.
Puisque $z = 5!$, alors $w = x = y = 6! - 5!$.
De plus, $t = u = v$, d'où $t = 7! - 2(6! - 5!) - 5!$, ou $t = 7! - 2(6!) + 5!$.
Donc :

$$\begin{aligned} s &= 8! - (t + u + v + w + x + y + z) \\ &= 8! - 3(7! - 2(6!) + 5!) - 3(6! - 5!) - 5! \\ &= 8! - 3(7!) + 6(6!) - 3(5!) - 3(6!) + 3(5!) - 5! \\ &= 8! - 3(7!) + 3(6!) - 5! \end{aligned}$$

Or $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$. Donc $6! = 6(5!) = 6(120) = 720$, $7! = 7(6!) = 7(720) = 5040$ et $8! = 8(7!) = 8(5040) = 40\,320$.

Donc $s = 40\,320 - 3(5040) + 3(720) - 120$, ou $s = 27\,240$.
Il y a donc 27 240 façons de placer les boules selon les restrictions données.

Voici une autre façon de calculer la valeur de s en simplifiant de façon algébrique :

$$\begin{aligned} s &= 8! - (t+u+v+w+x+y+z) \\ &= 8! - (t+w+y+z) - (u+w+x+z) - (v+x+y+z) + w + x + y + 2z \\ &= 8! - (t+w+y+z) - (u+w+x+z) - (v+x+y+z) + (w+z) + (x+z) + (y+z) - z \\ &= 8! - 7! - 7! - 7! + 6! + 6! + 6! - 5! \\ &= 8! - 3(7!) + 3(6!) - 5! \end{aligned}$$

Cette expression donne la même valeur, 27 240.

Réponse : (A)

25. On traite d'abord des conditions données au sujet de la longueur et de la pente de PQ. On simplifiera ensuite l'expresssion $r + s + t + u = 27$. On utilisera ensuite le fait que les points P et Q sont situés sur la parabole donnée.

Puisque la pente de PQ est positive, alors un des points est situé « à la droite » de l'autre point et « plus haut » que l'autre point.
On peut supposer que Q est situé « à la droite » de P et « plus haut » que P.
On a donc $u > s$ et $t > r$.
Puisque PQ a une pente de $\frac{12}{5}$, alors $\dfrac{u-s}{t-r} = \dfrac{12}{5}$. Il existe donc un nombre réel k ($k > 0$) tel que $u - s = 12k$ et $t - r = 5k$.
Puisque $PQ = 13$, alors $(u-s)^2 + (t-r)^2 = 13^2$, ou $(12k)^2 + (5k)^2 = 169$.
Donc $144k^2 + 25k^2 = 169$, d'où $169k^2 = 169$, ou $k^2 = 1$. Puisque $k > 0$, alors $k = 1$.
Donc $u - s = 12$ (ou $u = s + 12$) et $t - r = 5$ (ou $t = r + 5$).
P et Q ont donc pour coordonnées respectives (r, s) et $(r + 5, s + 12)$.
(On a donc éliminé deux inconnues du problème.)

Il faudra tôt ou tard utiliser l'équation $r + s + t + u = 27$.
Puisque $t = r + 5$ et $u = s + 12$, l'équation devient $r + s + r + 5 + s + 12 = 27$, ou $2r + 2s = 10$, ou $r + s = 5$.
On utilisera cette forme simplifiée un peu plus loin.

Puisque $P(r, s)$ et $Q(r + 5, s + 12)$ sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2 - \frac{1}{5}mx + \frac{1}{5}n$, alors :

$$\begin{aligned} s &= r^2 - \tfrac{1}{5}mr + \tfrac{1}{5}n \\ s + 12 &= (r+5)^2 - \tfrac{1}{5}m(r+5) + \tfrac{1}{5}n \end{aligned}$$

On traite m et n comme des constantes connues, tandis que l'on considère r et s comme des inconnues dont on cherche les valeurs.
On veut déterminer le nombre de couples (m, n) d'entiers strictement positifs ($n \le 1000$) pour lesquels une solution (r, s) du système d'équation satisfait à la condition $r + s = 5$.
On résout le système d'équations.
On développe le membre de droite de la deuxième équation :

$$s + 12 = r^2 + 10r + 25 - \tfrac{1}{5}mr - m + \tfrac{1}{5}n$$

On soustrait la première équation, membre par membre, pour obtenir $12 = 10r + 25 - m$, d'où $r = \frac{1}{10}(m - 13)$.

On reporte $r = \frac{1}{10}(m-13)$ dans la première équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} s &= \left(\tfrac{1}{10}(m-13)\right)^2 - \tfrac{1}{5}m\left(\tfrac{1}{10}(m-13)\right) + \tfrac{1}{5}n \\ &= \tfrac{1}{100}(m^2-26m+169) - \tfrac{1}{50}(m^2-13m) + \tfrac{1}{5}n \\ &= \tfrac{1}{100}(m^2-26m+169-2(m^2-13m)+20n) \\ &= \tfrac{1}{100}(-m^2+169+20n) \end{aligned}$$

On remarque que chaque couple (m, n) donne une solution unique (r, s).

On détermine maintenant le nombre de couples (m, n) d'entiers strictement positifs $(n \leq 1000)$ pour lesquels $r + s = 5$ $(r = \frac{1}{10}(m-13)$ et $s = \frac{1}{100}(-m^2+169+20n))$.

On reporte $r = \frac{1}{10}(m-13)$ et $s = \frac{1}{100}(-m^2+169+20n))$ dans l'équation $r+s=5$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} r+s &= 5 \\ \tfrac{1}{10}(m-13) + \tfrac{1}{100}(-m^2+169+20n) &= 5 \\ 10m-130-m^2+169+20n &= 500 \\ 20n &= m^2-10m+461 \\ 20n &= (m-5)^2+436 \qquad \text{(On a complété le carré)} \end{aligned}$$

Il reste donc à déterminer le nombre de couples (m, n) d'entiers strictement positifs $(n \leq 1000)$ qui vérifient l'équation $20n = (m-5)^2 + 436$.
Puisque $20n$ et 436 sont tous deux des entiers pairs, alors $(m-5)^2$ est un entier pair. Donc, $m-5$ est un entier pair, ce qui indique que m est impair. (Si $m-5$ était impair, alors $(m-5)^2$ serait impair.)
Posons $m = 2M - 1$, M étant un entier strictement positif quelconque.
On reporte $m = 2M-1$ dans l'équation $20n = (m-5)^2+436$ pour obtenir $20n = (2M-6)^2+436$, ou $20n = 4(M-3)^2 + 436$, ou $5n = (M-3)^2 + 109$.
On veut donc déterminer le nombre de couples (M, n) d'entiers strictement positifs $(n \leq 1000)$ qui vérifient l'équation $5n = (M-3)^2 + 109$.
Cela équivaut à déterminer le nombre de valeurs entières strictement positives de M pour lesquelles le membre de droite est un multiple de 5 inférieur ou égal à 5000, car chaque telle valeur de M donnera une valeur entière strictement positive de n inférieure ou égale à 1000.
Lorsque $M = 1$, le membre de droite est égal à 113, ce qui n'est pas un multiple de 5.
Lorsque $M = 2$, le membre de droite est égal à 110, ce qui est un multiple de 5. (On obtient $n = 22$.)
Lorsque $M \geq 3$, on considère le chiffre des unités de $M-3$, de $(M-3)^2$ et de $(M-3)^2 + 109$:

$M-3$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(M-3)^2$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$(M-3)^2+109$	9	0	3	8	5	4	5	8	3	0

Toute valeur entière strictement positive de M pour laquelle $M-3$ a un chiffre des unités égal à 1, 4, 6, ou 9 produit un membre de droite qui est divisible par 5. En effet, dans chacun de ces cas, l'expression $(M-3)^2 + 109$ a un chiffre des unités égal à 0 ou à 5 et elle est donc divisible par 5.
On a $(M-3)^2 + 109 \leq 5000$ lorsque $(M-3)^2 \leq 4891$.
Puisque $\sqrt{4891} \approx 69{,}94$ et que $M-3$ est un entier strictement positif, alors $M-3 \leq 69$.
Les valeurs de M que nous cherchons sont $M = 2$ et chaque entier strictement positif M $(0 \leq M-3 \leq 69)$ pour lequel $M-3$ a un chiffre des unités égal à 1, 4, 6 ou 9.

Il y a 28 entiers M dans cette dernière liste (quatre chacun lorsque $M - 3$ est dans l'intervalle de 0 à 9, de 10 à 19, de 20 à 29, de 30 à 39, de 40 à 49, de 50 à 59 et de 60 à 69). En tout, il y a donc 29 valeurs de M.

Il y a donc 29 couples (m, n) qui vérifient la condition donnée.

Réponse : (D)