Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2014

le mardi 15 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 16 avril 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On a : $\dfrac{\sqrt{16}+\sqrt{9}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4+3}{\sqrt{25}} = \dfrac{7}{5}$.

   (b) Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors $(x-10)^\circ + (x+10)^\circ + x^\circ = 180^\circ$, ou $(x-10)+(x+10)+x = 180$.
   Donc $3x = 180$, d'où $x = 60$.

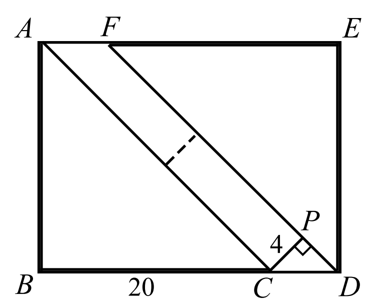
   (c) Supposons que Bart gagne x \$ l'heure. En 4 heures, il gagne $4 \times x$ \$, ou $4x$ \$.
   Lisa gagne donc $2x$ \$ l'heure. En 6 heures, elle gagne $6 \times 2x$ \$, ou $12x$ \$.
   Puisqu'ils gagnent 200 \$ en tout, alors $4x + 12x = 200$, ou $16x = 200$.
   Donc $x = 12{,}5$.
   Puisque $2x = 25$, alors Lisa gagne 25 \$ l'heure.

2. (a) Le périmètre du demi-disque est égal à la longueur du diamètre plus celle du demi-cercle.
   Puisque le demi-disque a un rayon de 10, il a un diamètre de 20.
   Un cercle ayant un diamètre de 20 a une circonférence de $\pi(20)$, ou 20π. La longueur du demi-cercle est donc la moitié de 20π, ou 10π.
   Le demi-disque a donc un périmètre de $10\pi + 20$.

   (b) La parabole d'équation $y = 10(x+2)(x-5)$ a pour abscisses à l'origine -2 et 5. Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(-2,0)$ et $(5,0)$, nommés P et Q.
   Puisque le segment PQ est horizontal, sa longueur est égale à $5-(-2)$, ou 7.

   (c) La droite qui passe par les points $C(0,60)$ et $D(30,0)$ a pour pente $\dfrac{60-0}{0-30}$, ou $\dfrac{60}{-30}$, ou -2.
   Puisque cette droite passe par le point $C(0,60)$, elle a une ordonnée à l'origine de 60.
   La droite a donc pour équation $y = -2x + 60$.
   On cherche donc le point d'intersection E des droites d'équations $y = -2x + 60$ et $y = 2x$.
   À ce point, la valeur de y est la même pour chaque équation.
   On a donc $-2x + 60 = 2x$, d'où $4x = 60$, ou $x = 15$.
   On reporte $x = 15$ dans l'équation $y = 2x$ et on obtient $y = 2(15)$, ou $y = 30$.
   Les coordonnées de E sont $(15, 30)$.

3. (a) On sait que $BD = BC + CD$ et que $BC = 20$ cm. On doit donc déterminer CD.
   Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP à DF.
   Puisque AC et DF sont parallèles, alors CP est également perpendiculaire à AC.
   Il y a une distance de 4 cm entre AC et DF. Donc $CP = 4$ cm.
   Or, le triangle ABC est rectangle isocèle. Donc $\angle ACB = 45^\circ$.



   Donc $\angle PCD = 180^\circ - \angle ACB - \angle PCA$, d'où $\angle PCD = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, ou $\angle PCD = 45^\circ$.
   Puisque le triangle CPD est rectangle en P et que $\angle PCD = 45^\circ$, il est également un triangle rectangle isocèle.
   Donc $CD = \sqrt{2}CP$, d'où $CD = 4\sqrt{2}$ cm.
   Enfin $BD = BC + CD$, d'où $BD = (20 + 4\sqrt{2})$ cm.

(b) On manipule l'équation, tout en notant que $x \neq 0$ et $x \neq -\frac{1}{2}$, puisque les dénominateurs ne peuvent égaler zéro :

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+4}{2x+1} &= \frac{4}{x} \\ x(x^2+x+4) &= 4(2x+1) \\ x^3+x^2+4x &= 8x+4 \\ x^3+x^2-4x-4 &= 0 \\ x^2(x+1)-4(x+1) &= 0 \\ (x+1)(x^2-4) &= 0 \\ (x+1)(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$. On peut vérifier que chaque valeur satisfait à l'équation donnée.

4. (a) *Solution 1*

Puisque $900 = 30^2$ et que $30 = 2 \times 3 \times 5$, alors $900 = 2^2 3^2 5^2$.
Les diviseurs positifs de 900 sont les entiers de la forme $d = 2^a 3^b 5^c$, a, b et c étant chacun égal à 0, 1 ou 2.
Un diviseur d est un carré parfait si chaque exposant dans sa factorisation première est pair.
Donc, d est un carré parfait si a, b et c égalent 0 ou 2.
Il y a donc 2 valeurs possibles de a et dans chaque cas, 2 valeurs possibles de b. Dans chaque cas, il y a aussi 2 valeurs possibles de c. En tout, il y a $2 \times 2 \times 2$ valeurs possibles, ou 8 valeurs possibles de d.
Ces valeurs sont $2^0 3^0 5^0 = 1$, $2^2 3^0 5^0 = 4$, $2^0 3^2 5^0 = 9$, $2^0 3^0 5^2 = 25$, $2^2 3^2 5^0 = 36$, $2^2 3^0 5^2 = 100$, $2^0 3^2 5^2 = 225$ et $2^2 3^2 5^2 = 900$.
Il y a donc 8 diviseurs positifs de 900 qui sont des carrés parfaits.

Solution 2

Les diviseurs positifs de 900 sont :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900$$

Parmi ces nombres, 1, 4, 9, 25, 36, 100, 225 et 900 sont des carrés parfaits ($1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 6^2$, $10^2, 15^2$ et 30^2, respectivement).
Il y a donc 8 diviseurs positifs de 900 qui sont des carrés parfaits.

(b) Dans le triangle isocèle ABC, on sait que $\angle ABC = \angle ACB$. Les côtés opposés à ces angles sont donc égaux. Donc $AC = AB$.
Or, le triangle a pour sommets $A(k, 3)$, $B(3, 1)$ et $C(6, k)$. Donc :

$$\begin{aligned} AC &= AB \\ \sqrt{(k-6)^2+(3-k)^2} &= \sqrt{(k-3)^2+(3-1)^2} \\ (k-6)^2+(3-k)^2 &= (k-3)^2+(3-1)^2 \\ (k-6)^2+(k-3)^2 &= (k-3)^2+2^2 \\ (k-6)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Donc $k - 6 = 2$ ou $k - 6 = -2$, d'où $k = 8$ ou $k = 4$.
On peut vérifier que chaque valeur satisfait à $AC = AB$.

5. (a) La bouteille A contient 40 g de liquide dont 10 % d'acide.
Elle contient donc $0{,}1 \times 40$ g, ou 4 g d'acide et $(40-4)$ g, ou 36 g d'eau.
La bouteille B contient 50 g de liquide dont 20 % d'acide.
Elle contient donc $0{,}2 \times 50$ g, ou 10 g d'acide et $(50-10)$ g, ou 40 g d'eau.
La bouteille C contient 50 g de liquide dont 30 % d'acide.
Elle contient donc $0{,}3 \times 50$ g, ou 15 g d'acide et $(50-15)$ g, ou 35 g d'eau.
En tout, les trois bouteilles contiennent $(40+50+50)$ g, ou 140 g de liquide, dont $(4+10+15)$ g, ou 29 g d'acide et $(140-29)$ g, ou 111 g d'eau.
La chimiste crée un mélange de 60 g de liquide dont 25 % d'acide.
Ce mélange contient donc $0{,}25 \times 60$ g, ou 15 g d'acide et $(60-15)$ g, ou 45 g d'eau.
Puisque les trois bouteilles contenaient 140 g de liquide au départ et que le nouveau mélange contient 60 g de liquide, il reste donc $(140-60)$ g, ou 80 g de liquide dans les trois bouteilles.
Puisque les trois bouteilles contenaient au départ 29 g d'acide et que le mélange contient 15 g d'acide, il reste donc $(29-15)$ g, ou 14 g d'acide dans les bouteilles.
Le nouveau mélange formé du restant des liquides des trois bouteilles contient donc $\dfrac{14 \text{ g}}{80 \text{ g}}$ d'acide, ou 0,175 d'acide, ou 17,5 % d'acide.

(b) Puisque $3x+4y=10$, alors $4y=10-3x$.
Lorsque $3x+4y=10$, on a :

$$\begin{aligned}
x^2+16y^2 &= x^2+(4y)^2 \\
&= x^2+(10-3x)^2 \\
&= x^2+(9x^2-60x+100) \\
&= 10x^2-60x+100 \\
&= 10(x^2-6x+10) \\
&= 10(x^2-6x+9+1) \\
&= 10((x-3)^2+1) \\
&= 10(x-3)^2+10
\end{aligned}$$

Puisque $(x-3)^2 \geq 0$, la plus petite valeur possible de $10(x-3)^2+10$ est $10(0)+10$, ou 10.
Cette valeur est atteinte lorsque $(x-3)^2=0$, c'est-à-dire lorsque $x=3$.
Donc, lorsque $3x+4y=10$, l'expression x^2+16y^2 a une valeur minimale de 10.

6. (a) *Solution 1*
Soit d le nombre de boules dorées dans le sac.
On suppose que Firmin plonge son bras dans le sac et sort deux boules l'une après l'autre.
Il y a 40 choix pour la première boule et dans chaque cas, 39 choix pour la deuxième boule.
En tout, il y a 40(39) choix de deux boules l'une après l'autre.
Si Firmin sort deux boules dorées, il y a d choix pour la première boule dorée et dans chaque cas, $d-1$ choix pour la deuxième boule dorée. En tout, il y a $d(d-1)$ choix de deux boules dorées l'une après l'autre.
On sait que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\dfrac{5}{12}$.
Or, il y a 40(39) choix équiprobables de deux boules et $d(d-1)$ choix favorables de deux boules dorées. Donc $\dfrac{d(d-1)}{40(39)} = \dfrac{5}{12}$, ce qui est équivalent à $d(d-1) = \dfrac{5}{12}(40)(39)$, ou $d(d-1) = 650$.

On cherche deux entiers consécutifs ayant un produit de 650. Puisque $\sqrt{650} = 25{,}49\ldots$, alors les deux entiers sont probablement 25 et 26. On vérifie que $25 \times 26 = 650$.
Donc $d = 26$. (Ou $d^2 - d - 650 = 0$, d'où $(d-26)(d+25) = 0$. Donc $d = 26$ ou $d = -25$. Puisque $d > 0$, alors $d = 26$.)
Il y a donc 26 boules dorées dans le sac.

Solution 2
Soit d le nombre de boules dorées dans le sac.
On suppose que Firmin plonge son bras dans le sac et sort deux boules simultanément.
Puisqu'il y a 40 boules dans le sac, il y a $\binom{40}{2}$ choix possibles de deux boules.
Puisqu'il y a d boules dorées dans le sac, il y a $\binom{d}{2}$ choix possibles de deux boules dorées.
On sait que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\frac{5}{12}$.
Or, il y a $\binom{40}{2}$ choix équiprobables possibles de deux boules et $\binom{d}{2}$ choix favorables de deux boules dorées. Donc $\dfrac{\binom{d}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{5}{12}$, ce qui est équivalent à $\binom{d}{2} = \dfrac{5}{12}\binom{40}{2}$.
Puisque $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, l'équation précédente est équivalente à $\dfrac{d(d-1)}{2} = \dfrac{5}{12}\dfrac{40(39)}{2}$, ou $\dfrac{d(d-1)}{2} = 325$.
Donc $d(d-1) = 650$.
On cherche deux entiers consécutifs ayant un produit de 650. Puisque $\sqrt{650} = 25{,}49\ldots$, alors les deux entiers sont probablement 25 et 26. On vérifie que $25 \times 26 = 650$.
Donc $d = 26$. (Ou $d^2 - d - 650 = 0$, d'où $(d-26)(d+25) = 0$. Donc $d = 26$ ou $d = -25$. Puisque $d > 0$, alors $d = 26$.)
Il y a donc 26 boules dorées dans le sac.

(b) Soit a le premier terme de la suite géométrique et r la raison géométrique (la constante utilisée pour multiplier chaque terme).
La suite de n termes est donc $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$.
En général, le $k^{\text{ième}}$ terme est $t_k = ar^{k-1}$; donc le $n^{\text{ième}}$ terme est $t_n = ar^{n-1}$.
Puisque $t_1 t_n = 3$, alors $a \cdot ar^{n-1} = 3$, ou $a^2 r^{n-1} = 3$.
Puisque $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} t_n = 59\,049$, alors :

$$\begin{aligned}
(a)(ar)\cdots(ar^{n-2})(ar^{n-1}) &= 59\,049 \\
a^n r r^2 \cdots r^{n-2} r^{n-1} &= 59\,049 \qquad \text{(puisque le facteur } a \text{ parait } n \text{ fois dans le M.G.)} \\
a^n r^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)} &= 59\,049 \\
a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)(n)} &= 59\,049
\end{aligned}$$

puisque $1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n)$.
Puisque $a^2 r^{n-1} = 3$, alors $(a^2 r^{n-1})^n = 3^n$, ou $a^{2n} r^{(n-1)(n)} = 3^n$.
Puisque $a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)(n)} = 59\,049$, alors $\left(a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)(n)}\right)^2 = 59\,049^2$, ou $a^{2n} r^{(n-1)(n)} = 59\,049^2$.
En comparant les équations des deux lignes précédentes, on obtient $3^n = 59\,049^2$.

Or :

$$59\,049 = 3(19\,683) = 3^2(6561) = 3^3(2187) = 3^4(729) = 3^5(243) = 3^6(81) = 3^6 3^4 = 3^{10}$$

Puisque $59\,049 = 3^{10}$, alors $59\,049^2 = 3^{20}$, d'où $3^n = 3^{20}$, ou $n = 20$.

7. (a) Soit $a = x - 2013$ et $b = y - 2014$.
L'équation donnée devient $\dfrac{ab}{a^2+b^2} = -\dfrac{1}{2}$, d'où $2ab = -a^2 - b^2$, ou $a^2 + 2ab + b^2 = 0$.
Cette équation est équivalente à $(a+b)^2 = 0$ ou $a + b = 0$.
On reporte $a = x - 2013$ et $b = y - 2014$ dans cette équation pour obtenir
$x - 2013 + y - 2014 = 0$, ou $x + y = 4027$.

(b) Soit $a = \log_{10} x$.
L'équation $(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 10\,000$ devient $a^{\log_{10} a} = 10^4$.
On prend le logarithme de base 10 de chaque membre de l'équation, tout en utilisant le fait que $\log_{10}(a^b) = b \log_{10} a$, pour obtenir $(\log_{10} a)(\log_{10} a) = 4$ ou $(\log_{10} a)^2 = 4$.
Donc $\log_{10} a = \pm 2$, d'où $\log_{10}(\log_{10} x) = \pm 2$.

Si $\log_{10}(\log_{10} x) = 2$, alors $\log_{10} x = 10^2 = 100$, d'où $x = 10^{100}$.
Si $\log_{10}(\log_{10} x) = -2$, alors $\log_{10} x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$, d'où $x = 10^{1/100}$.
Les nombres réels x qui vérifient l'équation sont 10^{100} et $10^{1/100}$.

On peut vérifier :
Si $x = 10^{100}$, alors $\log_{10} x = 100$.
Donc $(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 100^{\log_{10} 100} = 100^2 = 10\,000$.
Si $x = 10^{1/100}$, alors $\log_{10} x = 1/100 = 10^{-2}$.
Donc $(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = (10^{-2})^{\log_{10}(10^{-2})} = (10^{-2})^{-2} = 10^4 = 10\,000$.

8. (a) On utilise la loi du cosinus dans le triangle ABD pour déterminer la longueur de BD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos(\angle BAD)$$

On sait que $AB = 75$ and $AD = 20$. Il nous faut la valeur de $\cos(\angle BAD)$.
Or :

$$\begin{aligned}\cos(\angle BAD) &= \cos(\angle BAC + \angle EAD)\\ &= \cos(\angle BAC)\cos(\angle EAD) - \sin(\angle BAC)\sin(\angle EAD)\\ &= \frac{AC}{AB}\frac{AD}{AE} - \frac{BC}{AB}\frac{ED}{AE}\end{aligned}$$

puisque les triangles ABC et ADE sont rectangles.
Puisque $AB = 75$ et $BC = 21$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{75^2 - 21^2} = \sqrt{5625 - 441} = \sqrt{5184} = 72$$

puisque $AC > 0$.
Puisque $AC = 72$ et $CE = 47$, alors $AE = AC - CE$, d'où $AE = 25$.
Puisque $AE = 25$ et $AD = 20$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$$

puisque $ED > 0$.

Donc :

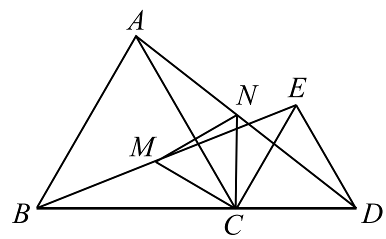
$$\cos(\angle BAD) = \frac{AC}{AB}\frac{AD}{AE} - \frac{BC}{AB}\frac{ED}{AE} = \frac{72}{75}\frac{20}{25} - \frac{21}{75}\frac{15}{25} = \frac{1440-315}{75(25)} = \frac{1125}{75(25)} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos(\angle BAD) \\ &= 75^2 + 20^2 - 2(75)(20)(\tfrac{3}{5}) \\ &= 5625 + 400 - 1800 \\ &= 4225 \end{aligned}$$

Puisque $BD > 0$, alors $BD = \sqrt{4225}$, ou $BD = 65$.

(b) *Solution 1*
On considère les triangles BCE et ACD.



Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $BC = AC$.
Puisque le triangle ECD est équilatéral, alors $CE = CD$.
Puisque BCD est un segment de droite et que $\angle ECD = 60^\circ$, alors $\angle BCE = 180^\circ - \angle ECD$, d'où $\angle BCE = 120^\circ$.
Puisque BCD est un segment de droite et que $\angle BCA = 60^\circ$, alors $\angle ACD = 180^\circ - \angle BCA$, d'où $\angle ACD = 120^\circ$.
Les triangles BCE et ACD sont donc isométriques (côté-angle-côté).
Puisque les triangles BCE et ACD sont isométriques et que les segments CM et CN relient le sommet C au milieu du côté opposé dans chaque triangle, alors $CM = CN$.
Puisque $\angle ECD = 60^\circ$, alors le triangle ACD est l'image du triangle BCE par une rotation de centre C de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le segment CN est l'image du segment CM par cette rotation de 60°.
Donc $\angle MCN = 60^\circ$.
Or, puisque $CM = CN$ et que $\angle MCN = 60^\circ$, alors :

$$\angle CMN = \angle CNM = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle MCN) = 60^\circ$$

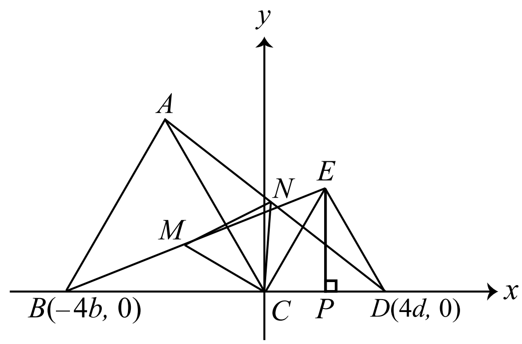
Le triangle MNC est donc équilatéral.

Solution 2

On fait appel à un repère cartésien.

On place le repère de manière que l'origine $(0, 0)$ soit au point C et que le segment BCD soit sur l'axe des abscisses. On attribue au point B les coordonnées $(-4b, 0)$ et au point D les coordonnées $(4d, 0)$, b et d étant des nombres strictement positifs.

Au point E, on abaisse une perpendiculaire EP à CD.



Puisque le triangle ECD est équilatéral, alors P est le milieu du segment CD.

Puisque C et D ont pour coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(4d, 0)$, alors P a pour coordonnées $(2d, 0)$.

Puisque le triangle ECD est équilatéral, alors $\angle ECD = 60°$. Le triangle EPC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90° et on a donc $EP = \sqrt{3}CP$, d'où $EP = 2\sqrt{3}d$.

E a donc pour coordonnées $(2d, 2\sqrt{3}d)$.

De même, on peut démontrer que A a pour coordonnées $(-2b, 2\sqrt{3}b)$.

Or, M est le milieu du segment BE et les points B et E ont pour coordonnées respectives $(-4b, 0)$ et $(2d, 2\sqrt{3}d)$. M a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-4b + 2d), \frac{1}{2}(0 + 2\sqrt{3}d)\right)$, ou $(-2b + d, \sqrt{3}d)$.

De plus, N est le milieu du segment AD et les points A et D ont pour coordonnées respectives $(-2b, 2\sqrt{3}b)$ et $(4d, 0)$. N a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-2b + 4d), \frac{1}{2}(2\sqrt{3}b + 0)\right)$, ou $(-b + 2d, \sqrt{3}b)$.

On montrera que le triangle MNC est équilatéral en montrant que $CM = CN = MN$, ou que $CM^2 = CN^2 = MN^2$:

$$\begin{aligned}
CM^2 &= (-2b + d - 0)^2 + (\sqrt{3}d - 0)^2 \\
&= (-2b + d)^2 + (\sqrt{3}d)^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + d^2 + 3d^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + 4d^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CN^2 &= (-b + 2d - 0)^2 + (\sqrt{3}b - 0)^2 \\
&= (-b + 2d)^2 + (\sqrt{3}b)^2 \\
&= b^2 - 4bd + 4d^2 + 3b^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + 4d^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MN^2 &= ((-2b + d) - (-b + 2d))^2 + (\sqrt{3}d - \sqrt{3}b)^2 \\
&= (-b - d)^2 + 3(d - b)^2 \\
&= b^2 + 2bd + d^2 + 3d^2 - 6bd + 3b^2 \\
&= 4b^2 - 4bd + 4d^2
\end{aligned}$$

Donc $CM^2 = CN^2 = MN^2$ et le triangle MNC est donc équilatéral.

9. (a) Soit $S = \sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \sin^6 3^\circ + \cdots + \sin^6 87^\circ + \sin^6 88^\circ + \sin^6 89^\circ$.
Puisque $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$, alors $\sin^6\theta = \cos^6(90^\circ - \theta)$. Donc :

$$\begin{aligned}
S &= \sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \cdots + \sin^6 44^\circ + \sin^6 45^\circ \\
&\qquad + \cos^6(90^\circ - 46^\circ) + \cos^6(90^\circ - 47^\circ) + \cdots + \cos^6(90^\circ - 89^\circ) \\
&= \sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \cdots + \sin^6 44^\circ + \sin^6 45^\circ + \cos^6 44^\circ + \cos^6 43^\circ + \cdots + \cos^6 1^\circ \\
&= (\sin^6 1^\circ + \cos^6 1^\circ) + (\sin^6 2^\circ + \cos^6 2^\circ) + \cdots + (\sin^6 44^\circ + \cos^6 44^\circ) + \sin^6 45^\circ
\end{aligned}$$

Puisque $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\sin^6 45^\circ = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
Or :

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy)$$

On reporte $x = \sin^2\theta$ et $y = \cos^2\theta$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= (x+y)((x+y)^2 - 3xy) \\
\sin^6\theta + \cos^6\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)((\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta) \\
\sin^6\theta + \cos^6\theta &= 1(1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta)
\end{aligned}$$

puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned}
S &= (\sin^6 1^\circ + \cos^6 1^\circ) + (\sin^6 2^\circ + \cos^6 2^\circ) + \cdots + (\sin^6 44^\circ + \cos^6 44^\circ) + \sin^6 45^\circ \\
&= (1 - 3\sin^2 1^\circ \cos^2 1^\circ) + (1 - 3\sin^2 2^\circ \cos^2 2^\circ) + \cdots + (1 - 3\sin^2 44^\circ \cos^2 44^\circ) + \tfrac{1}{8} \\
&= 44 - (3\sin^2 1^\circ \cos^2 1^\circ + 3\sin^2 2^\circ \cos^2 2^\circ + \cdots + 3\sin^2 44^\circ \cos^2 44^\circ) + \tfrac{1}{8} \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(4\sin^2 1^\circ \cos^2 1^\circ + 4\sin^2 2^\circ \cos^2 2^\circ + \cdots + 4\sin^2 44^\circ \cos^2 44^\circ)
\end{aligned}$$

Puisque $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, alors $4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta$. Donc :

$$\begin{aligned}
S &= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(4\sin^2 1^\circ \cos^2 1^\circ + 4\sin^2 2^\circ \cos^2 2^\circ + \cdots + 4\sin^2 44^\circ \cos^2 44^\circ) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ + \cdots + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 44^\circ + \\
&\qquad \cos^2(90^\circ - 46^\circ) + \cdots + \cos^2(90^\circ - 86^\circ) + \cos^2(90^\circ - 88^\circ)) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ + \cdots + \cos^2 4^\circ + \cos^2 2^\circ) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}((\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ)) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{3}{4}(22) \qquad (\text{puisque } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\
&= \tfrac{353}{8} - \tfrac{132}{8} \\
&= \tfrac{221}{8}
\end{aligned}$$

Puisqu'on cherche $S = \dfrac{m}{n}$, on peut choisir $m = 221$ et $n = 8$.

(b) On montrera d'abord, de deux façons différentes, que $f(n) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.

<u>1re méthode</u>
Soit un entier formé de n chiffres tel que la somme de ces chiffres est égale à 5. Voici les choix possibles de chiffres non nuls qui ont une somme de 5 :

$$5 \quad 4,1 \quad 3,2 \quad 3,1,1 \quad 2,2,1 \quad 2,1,1,1 \quad 1,1,1,1,1$$

Chaque choix peut correspondre à plus d'un entier de n chiffres, car les chiffres non nuls peuvent être placés dans plus d'une position. Pour chaque choix, on compte le nombre d'entiers possibles de n chiffres en déterminant le nombre a d'arrangements des chiffres non nuls (p. ex., dans le cas des chiffres 4 et 1, il y a 2 arrangements, soit 1 4 et 4 1). Le premier chiffre d'un tel arrangement sera le premier des n chiffres de l'entier à partir de la gauche. Pour chacun des a arrangements, on comptera ensuite le nombre b de façons de placer les autres chiffres non nuls dans les $n-1$ positions qui restent (p. ex., pour l'arrangement 1 4, le chiffre 1 occupe la 1re position et le chiffre 4 peut occuper n'importe quelle des $n-1$ positions suivantes ; ainsi $b = n-1$). Les autres positions seront occupées par le chiffre 0. Pour chaque choix, le nombre d'entiers sera égal à ab. On résume les cas au moyen d'un tableau. Chaque total est indiqué et développé sous la forme d'une fraction ayant un dénominateur de 24 :

Choix des chiffres non nuls qui ont une somme de 5	a	b	ab
5	1	1	$1 = \dfrac{24}{24}$
$4, 1$	2	$(n-1)$	$2(n-1) = \dfrac{48n-48}{24}$
$3, 2$	2	$(n-1)$	$2(n-1) = \dfrac{48n-48}{24}$
$3, 1, 1$	3	$\binom{n-1}{2}$	$3\binom{n-1}{2} = \dfrac{36n^2-108n+72}{24}$
$2, 2, 1$	3	$\binom{n-1}{2}$	$3\binom{n-1}{2} = \dfrac{36n^2-108n+72}{24}$
$2, 1, 1, 1$	4	$\binom{n-1}{3}$	$4\binom{n-1}{3} = \dfrac{16n^3-96n^2+176n-96}{24}$
$1, 1, 1, 1, 1$	1	$\binom{n-1}{4}$	$\binom{n-1}{4} = \dfrac{n^4-10n^3+35n^2-50n+24}{24}$

(On remarque que dans les 2e et 3e choix, il faut que $n \geq 2$; dans les 4e et 5e choix, il faut que $n \geq 3$; dans le 6e choix, il faut que $n \geq 4$; dans le 7e choix, il faut que $n \geq 5$. Or dans chaque cas, la formule peut tout de même servir, car pour chaque valeur inférieure de n, la formule donne une valeur de 0. Dans le 1er choix, on dit que $b = 1$, puisqu'on doit avoir ab=1, car il n'y a qu'un nombre possible, soit le nombre formé du chiffre 5 suivi de $n-1$ zéros.)

$f(n)$ est la somme des expressions dans la dernière colonne du tableau. Donc :

$$f(n) = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

2e méthode

On établit d'abord une correspondance entre chaque entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5 et chaque arrangement de cinq 1 et $(n-1)$ X qui commence par le chiffre 1.

On comptera ensuite les entiers en comptant les arrangements.

Étant donné un entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5, on écrit un arrangement en suivant la règle suivante :

> Le nombre de chiffres 1 à la gauche du premier X correspond au premier chiffre de l'entier, le nombre de chiffres 1 entre le premier X et le deuxième X correspond au deuxième chiffre de l'entier et ainsi de suite. Ainsi le nombre de chiffres 1 à la droite du $(n-1)^{\text{ième}}$ X représente le $n^{\text{ième}}$ chiffre de l'entier.

Par exemple, l'entier 1010020001 correspond à l'arrangement 1XX1XXX11XXXX1.
Ainsi chaque entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5 correspond à un arrangement de ce type.
De la même façon, chaque arrangement de ce type correspond à un entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5. Il suffit de compter le nombre de chiffres 1 avant le premier X et d'écrire ce nombre comme premier chiffre de l'entier, de compter le nombre de chiffres 1 entre le premier X et le deuxième X et d'écrire ce nombre comme deuxième chiffre de l'entier, ainsi de suite. Puisque cinq chiffres 1 sont utilisés, on obtient un entier de n chiffres dont les chiffres ont une somme de 5.
Il y a donc une correspondance biunivoque entre les entiers et les arrangements.
Donc $f(n)$, qui représente le nombre de tels entiers dont les n chiffres ont une somme de 5, représente aussi le nombre de tels arrangements.
Chaque arrangement est composé de 5 chiffres 1 et de $n-1$ X et chaque arrangement commence par un chiffre 1. Pour compter le nombre de tels arrangements, il faut compter le nombre de permutations de $n-1$ X et de 4 chiffres 1. Ceci correspond au nombre de façons de choisir les 4 positions des chiffres 1 parmi les $n+3$ positions disponibles (car $(n-1)+4=n+3$). Ce nombre correspond à $\binom{n+3}{4}$.
Donc $f(n)=\binom{n+3}{4}=\dfrac{(n+3)!}{4!(n-1)!}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)(n)}{4!}=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.

On doit maintenant déterminer combien des entiers n, de 1 à 2014, sont tels que le chiffre des unités de $f(n)$ est égal à 1.
On sait que $f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ est un entier pour toute valeur entière positive de n, car il correspond au nombre d'objets ayant une certaine propriété.
Si le chiffre des unités de n est 0 ou 5, alors n est un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de n est 2 ou 7, alors $n+3$ est un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de n est 3 ou 8, alors $n+2$ est un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de n est 4 ou 9, alors $n+1$ est un multiple de 5.
Donc si le chiffre des unités de n est 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ou 9, alors $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 5 et $f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ est aussi un multiple de 5, puisque le dénominateur ne contient aucun diviseur 5 qui peut diviser le facteur 5 du numérateur.
Donc si le chiffre des unités de n est 0, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ou 9, alors $f(n)$ est divisible par 5 et il ne peut donc pas avoir un chiffre des unités égal à 1.

Il reste à considérer les cas où le chiffre des unités de n est 1 ou 6 ; ce sont les seules valeurs qui pourraient faire en sorte que $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1.
On remarque que $3f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$, ce qui est un entier positif pour toute valeur entière positive de n.

On remarque aussi que si $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1, alors $3f(n)$ a un chiffre des unités égal à 3, et que si $3f(n)$ a un chiffre des unités égal à 3, alors $f(n)$ doit avoir un chiffre des unités égal à 1.
Donc, déterminer le nombre de valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1 est équivalent à déterminer le nombre de valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$ a un chiffre des unités égal à 3.

On considère les entiers n en groupes de 40. (Ce choix est intuitif, puisque le problème semble traiter des multiples de 5 et des multiples de 8 et $5 \times 8 = 40$.)
Si n a un chiffre des unités égal à 1, on doit avoir $n = 40k + 1$ ou $n = 40k + 11$ ou $n = 40k + 21$ ou $n = 40k + 31$, k étant un entier supérieur ou égal à 0.
Si n a un chiffre des unités égal à 6, on doit avoir $n = 40k + 6$ ou $n = 40k + 16$ ou $n = 40k + 26$ ou $n = 40k + 36$, k étant un entier supérieur ou égal à 0.

Si $n = 40k + 1$, alors :

$$\begin{aligned} 3f(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8} \\ &= \frac{(40k+1)(40k+2)(40k+3)(40k+4)}{8} \\ &= (40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1) \end{aligned}$$

Or $40k+1$ a un chiffre des unités égal à 1, $20k+1$ a un chiffre des unités égal à 1, $40k+3$ a un chiffre des unités égal à 3 et $10k+1$ a un chiffre des unités égal à 1. Donc, le produit de ces expressions a un chiffre des unités égal à $(1)(1)(3)(1)$, ou 3.
On traite les sept autres cas de la même façon et on résume les résultats dans le tableau suivant :

n	$3f(n)$ simplifié	chiffre des unités de $3f(n)$
$40k+1$	$(40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1)$	3
$40k+11$	$(40k+11)(10k+3)(40k+13)(20k+7)$	3
$40k+21$	$(40k+21)(20k+11)(40k+23)(10k+6)$	8
$40k+31$	$(40k+31)(10k+8)(40k+33)(20k+17)$	8
$40k+6$	$(20k+3)(40k+7)(10k+2)(40k+9)$	8
$40k+16$	$(10k+4)(40k+17)(20k+9)(40k+19)$	8
$40k+26$	$(20k+13)(40k+27)(10k+7)(40k+29)$	3
$40k+36$	$(10k+9)(40k+37)(20k+19)(40k+39)$	3

(On remarque, par exemple, que si $n = 40k + 16$, la forme simplifiée de $3f(n)$ est $(10k + 4)(40k + 17)(20k + 9)(40k + 19)$, de sorte que le chiffre des unités de $3f(n)$ est le chiffre des unités de $(4)(7)(9)(9)$, c'est-à-dire le chiffre des unités de 2268, qui est 8.)

Donc, $f(n)$ a un chiffre des unités égal à 1 lorsque $n = 40k + 1$ ou $n = 40k + 11$ ou $n = 40k + 26$ ou $n = 40k + 36$, k étant un entier supérieur ou égal à 0.
Il y a 4 telles valeurs de n entre chaque paire de multiples consécutifs de 40.
Puisque $2000 = 50 \times 40$, alors 2000 est le 50$^{\text{e}}$ multiple de 40. Il y a donc 50×4 entiers n, ou 200 entiers n inférieurs à 2000 pour lesquels le chiffre des unités de $f(n)$ est égal à 1.
De 2000 à 2014, il y a deux autres entiers, soit $n = 40(50) + 1$ et $n = 40(50) + 11$, ou $n = 2001$ et $n = 2011$.
En tout, 202 des entiers $f(1), f(2), \ldots, f(2014)$ ont un chiffre des unités égal à 1.

10. Dans cette solution, on utilise BH pour représenter « bonbon haricot » ou « bonbons haricots ». On utilise T1 pour représenter un « mouvement de Type 1 », T2 pour représenter un « mouvement de Type 2 » et ainsi de suite.
On utilise P0 pour représenter « position 0 », P1 pour représenter « position 1 » et ainsi de suite.
À n'importe quel moment donné, on représente les positions des BH par un n-uplet d'entiers non négatifs qui indiquent les nombres de BH respectifs en P0, P1, P2, etc. Par exemple, le quadruplet $(0, 0, 1, 2, 1)$ indique 0 BH en P0, 0 BH en P1, 1 BH en P2, 2 BH en P3 et 1 BH en P4.
   (a) On procède à rebours à partir de l'état final $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$.
   Le seul mouvement qui aurait pu mener à 1 BH en P5 est T5.
   Si on annule ce mouvement, on enlève 1 BH de P5 et on ajoute 1 BH à P4 et 1 BH à P3, ce qui donne les positions $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$.
   Le seul mouvement qui aurait pu mener à 1 BH en P4 est T4.
   Si on annule ce mouvement, on enlève 1 BH de P4 et on ajoute 1 BH à P2 et 1 BH à P3, ce qui donne les positions $(0, 0, 1, 2, 0, 0)$.
   Les seuls mouvements qui auraient pu mener à 2 BH en P3 sont 2 T3.
   Si on annule ces mouvements, on enlève 2 BH de P3 et on ajoute 2 BH à P1 et 2 BH à P2, ce qui donne les positions $(0, 2, 3, 0, 0, 0)$.
   Les seuls mouvements qui auraient pu mener à 3 BH en P2 sont 3 T2.
   Si on annule ces mouvements, on arrive aux positions $(3, 5, 0, 0, 0, 0)$.
   Les seuls mouvements qui auraient pu mener à 5 BH en P1 sont 5 T1.
   Si on annule ces mouvements, on enlève 5 BH de P1 et on ajoute 10 BH à P0, ce qui donne les positions $(13, 0, 0, 0, 0, 0)$.
   Donc si $N = 13$, Fanny peut gagner la joute en faisant les mouvements précédents dans l'ordre inverse.
   Ainsi à partir de $(13, 0, 0, 0, 0, 0)$, 5 T1 donneront $(3, 5, 0, 0, 0, 0)$, puis 3 T2 donneront $(0, 2, 3, 0, 0, 0)$, puis 2 T3 donneront $(0, 0, 1, 2, 0, 0)$, puis T4 donnera $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$ et T5 donnera $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$.
   (b) Considérations initiales
   Premièrement, on remarque que si Fanny a N BH au départ (N étant un entier fixe strictement positif quelconque), alors la joute est terminée après au plus $N-1$ mouvements (puisqu'elle mange exactement un BH à chaque mouvement).
   Deuxièmement, on remarque que les positions des BH à l'état final de même qu'à n'importe quel état intermédiaire (c.-à-d. après un certain nombre de mouvements) doivent être dans la liste P0, P1, …, P$(N-1)$, puisque chaque BH peut se déplacer d'au plus 1 position vers la droite lors d'un mouvement ; donc aucun BH ne peut se déplacer de plus de $N-1$ positions vers la droite dans au plus $N-1$ mouvements.
   Ainsi si on a N BH au départ, n'importe quel état peut être représenté par un N-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$, a_i étant le nombre de BH en Pi dans cet état.

   Suite de Fibonacci et Propriété importante #1 (PI1)
   La suite de Fibonacci, $F_1, F_2, F_3, \ldots$, est définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$.
   Le nombre initial N de BH et le nombre de BH dans diverses positions sont reliés au moyen de la suite de Fibonacci de la façon suivante :
   À n'importe quel moment entre l'état initial (N BH en P0) et l'état final, s'il y a a_i BH en Pi pour chaque i de 0 à $N-1$, alors :

$$N = a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1} \qquad (*)$$

En effet :

- La formule est vraie pour l'état initial, car on a alors $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1}) = (N, 0, \ldots, 0, 0)$ et $F_2 = 1$. Donc, le membre de droite de $(*)$ est égal à $N(1) + 0$, ou N.
- Un T1 ne change pas la valeur du membre de droite de $(*)$: Puisqu'un T1 change l'état $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ à l'état $(a_0 - 2, a_1 + 1, a_2, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$, le membre de droite de $(*)$ change de
$$a_0F_2 + a_1F_3 + a_2F_4 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1}$$
à
$$(a_0 - 2)F_2 + (a_1 + 1)F_3 + a_2F_4 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1},$$
soit une différence de $-2F_2 + F_3$, ou $-2(1) + 2$, ou 0.
- Un Ti $(i \geq 2)$ ne change pas la valeur du membre de droite de $(*)$: Puisqu'un Ti change l'état $(a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ à l'état $(a_0, a_1, \ldots, a_{i-2} - 1, a_{i-1} - 1, a_i + 1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$, le membre de droite de $(*)$ change de
$$a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + a_{i-2}F_i + a_{i-1}F_{i+1} + a_iF_{i+2} + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1}$$
à
$$a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + (a_{i-2} - 1)F_i + (a_{i-1} - 1)F_{i+1} + (a_i + 1)F_{i+2} + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1},$$
soit une différence de $-F_i - F_{i+1} + F_{i+2}$, ou 0 puisque $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$.

Ceci nous confirme que le membre de droite de $(*)$ commence à N et ne change pas après n'importe quel mouvement.
Donc lors de n'importe quel état $(a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1})$ après un départ de N BH en P0, il est vrai que :

$$N = a_0F_2 + a_1F_3 + \cdots + a_{N-2}F_N + a_{N-1}F_{N+1} \qquad (*)$$

Pour montrer qu'il n'y a qu'un état final possible lorsque Fanny peut gagner la joute, on supposera qu'il y a deux état finals à partir de N BH et on montrera que les deux sont les mêmes.

Propriété importante #2 (PI2)
On fait appel à une propriété des nombres de Fibonacci selon laquelle deux sommes de trois nombres non consécutifs de Fibonacci ou moins ne peuvent être égales si les nombres de Fibonacci utilisés dans les sommes ne sont pas les mêmes :

> Soit x, y, z des entiers strictement positifs de manière que $2 \leq x < y < z$ et que x, y, z ne comportent aucune paire d'entiers consécutifs.
> Alors $F_z < F_y + F_z < F_x + F_y + F_z < F_{z+1}$.

Puisque chaque nombre de Fibonacci est un entier strictement positif, alors $F_z < F_y + F_z < F_x + F_y + F_z$. On doit donc démontrer que $F_x + F_y + F_z < F_{z+1}$:

> Puisque x, y, z ne comportent aucune paire d'entiers consécutifs et que $x < y < z$, alors $y < z - 1$.
> Puisque y et z sont des entiers strictement positifs, alors $y \leq z - 2$.
> On a aussi $x < y - 1 \leq z - 3$.

Puisque x et z sont des entiers tels que $x < z - 3$, alors $x \leq z - 4$.
Puisque la suite de Fibonacci est croissante à partir de F_2, alors :

$$F_x + F_y + F_z \leq F_{z-4} + F_{z-2} + F_z < F_{z-3} + F_{z-2} + F_z = F_{z-1} + F_z = F_{z+1}$$

Puisqu'il y a un signe $<$ dans cette série d'égalités et d'inégalités, alors $F_x + F_y + F_z < F_{z+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Suite de la démonstration

D'après l'énoncé du problème, on a une position gagnante à l'état final s'il reste au plus trois BH, chacun dans une position distincte, de manière qu'il n'y ait pas de bonbons en positions consécutives.

On suppose qu'à partir de N BH en P0, on peut obtenir un état final avec $a_d = 1$, a_b et a_c étant chacun égal à 0 ou à 1 et tous les autres a_i étant nuls, et un autre état final avec $a_D = 1$, a_B et a_C étant chacun égal à 0 ou à 1 et tous les autres a_i étant nuls.

D'après PI1, on a $N = a_bF_{b+2} + a_cF_{c+2} + F_{d+2}$ et $N = a_BF_{B+2} + a_CF_{C+2} + F_{D+2}$, d'où $a_bF_{b+2} + a_cF_{c+2} + F_{d+2} = a_BF_{B+2} + a_CF_{C+2} + F_{D+2}$.

On soustrait de cette dernière équation des nombres de Fibonacci qui se trouvent dans chaque membre. (On rappelle que chaque terme de chaque membre est soit un nombre de Fibonacci, soit un 0 et que les nombres de Fibonacci dans un même membre de l'équation sont distincts.)

S'il ne reste aucun nombre de Fibonacci dans chaque membre, alors les deux états finals sont les mêmes.

S'il reste des nombres de Fibonacci dans un membre ou l'autre de l'équation, il doit y en avoir dans les deux membres, autrement on aurait un nombre non nul dans un membre égal à 0 dans l'autre.

Soit F_k le plus grand nombre de Fibonacci dans le membre de gauche (M.G.) et F_m le plus grand nombre de Fibonacci dans le membre de droite (M.D.).

Puisqu'on a soustrait les nombres communs aux deux membres, alors $k \neq m$. On peut supposer que $k < m$. Puisque k et m sont des entiers, alors $k \leq m - 1$.

On remarque que le M.D. doit être supérieur ou égal à F_m, puisqu'il inclut F_m.

Puisque le M.G. comprend au plus trois nombres de Fibonacci et que ceux-ci ne peuvent être consécutifs (puisque b, c, d ne sont pas consécutifs) et que le plus grand est F_k, alors d'après PI2, le M.G. est inférieur à F_{k+1}.

Puisque $k + 1 \leq m$, le M.G. est inférieur à F_m.

Puisque le M.G. est inférieur à F_m et que le M.D. est supérieur ou égal à F_m, on a une contradiction, puisque on doit avoir M.G. = M.D.

Donc, il ne peut rester de nombres de Fibonacci dans un membre ou dans l'autre.

En d'autres mots, les positions des BH dans les deux états finals sont les mêmes et il ne peut donc y avoir qu'un état final.

Donc si Fanny peut gagner la joute, il n'y a qu'un état final possible.

(c) D'après l'énoncé du problème et PI1, on sait que Fanny peut seulement gagner une joute qui commence avec N BH en P0 si N est égal à la somme d'au plus trois nombres de Fibonacci distincts parmi lesquels il n'y a pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.

Pour déterminer l'entier positif N le plus près de 2014 pour lequel Fanny peut gagner la joute, on déterminera l'entier positif le plus près de 2014 qui peut être exprimé comme la somme d'au plus trois nombres de Fibonacci, parmi lesquels il n'y a pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.

On écrit les nombres de Fibonacci jusqu'à ce qu'on en obtienne un qui est supérieur à 2014 :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584$$

On remarque que $1597 + 377 + 34 = 2008$, ce qui est à une distance de 6 du nombre 2014. On démontrera qu'il est impossible d'obtenir une somme plus près de 2014. En d'autres mots, on démontrera qu'il est impossible d'obtenir une somme égale à un entier de 2009 à 2019.

Supposons que l'on puisse obtenir une somme égale à un entier de 2009 à 2019.
Le nombre de Fibonacci 2584 est trop grand pour paraître dans la somme.
Si la somme n'inclut aucun nombre de Fibonacci supérieur à 987, alors la plus grande somme que l'on puisse obtenir est $987 + 377 + 144 = 1508$, ce qui n'est pas suffisant.
Donc, il faut inclure le nombre 1597 pour atteindre une somme égale à un entier de 2009 à 2019.
Or, 1587 seul est insuffisant. Si on ajoute un ou deux nombres de Fibonacci, leur somme doit être dans l'intervalle de $2009 - 1597$ à $2019 - 1597$, c'est-à-dire de 412 à 422.
On ne peut utiliser un nombre de Fibonacci supérieur à 377, sinon la somme serait trop grande.
Si la somme de un ou des deux nombres est supérieure à 233, alors la somme est au plus égale à $233 + 89$, ou 322, ce qui n'est pas dans l'intervalle voulu.
On doit donc inclure 377 dans la somme qui reste.
Le nombre ou les deux nombres de Fibonacci que l'on ajoute à la somme doivent avoir une somme dans l'intervalle de $412 - 377$ à $422 - 377$, ou de 35 à 45.
Il n'y a aucun nombre de Fibonacci dans cet intervalle. Donc, il est impossible d'obtenir une somme d'au plus trois nombres de Fibonacci, parmi lesquels il n'y a pas deux nombres consécutifs, de manière à obtenir une somme plus près de 2014 que 2008.

On remarque que $2008 = 1597 + 377 + 34$. Puisque $F_9 = 34$, $F_{14} = 377$ et $F_{17} = 1597$, la position gagnante correspondante serait formée de 1 BH dans chacune de P7, P12 et P15.
Pour compléter la démonstration, il faut montrer qu'il est possible d'atteindre cet état :

> On commence par l'état final avec un 1 BH dans chacune de P7, P12 et P15 et on procède à rebours comme dans la partie (a).
> Puisqu'il y a 1 BH en P15, il doit provenir d'un T15.
> Si on annule ce mouvement, on obtient 1 BH dans chacune de P7, P12, P13 et P14. On remarque que le BH le plus à droite est en P14.
> Puisqu'il y a 1 BH en P14, il doit provenir d'un T14.
> On annule ce mouvement et on annule les mouvements qui ont mené à un BH dans la position la plus à droite. Ainsi on ramène progressivement tous les BH en P0.
> Pour gagner la joute où $N = F_9 + F_{14} + F_{17}$, Fanny utilise les mêmes mouvements dans l'ordre inverse, comme dans la partie (a).
> De cette manière, elle atteindra un état final avec 1 BH dans chacune de P7, P12 et P15.

Donc si $N = F_9 + F_{14} + F_{17}$, Fanny peut gagner la joute.
Donc, $N = 2008$ est l'entier positif le plus près de 2014 pour lequel Fanny peut gagner la joute en commençant avec N BH en P0.