Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 15 avril 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 16 avril 2014
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 2 heures et demie
Nombre de questions : 10
L'utilisation d'une calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
Chaque question vaut 10 points.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

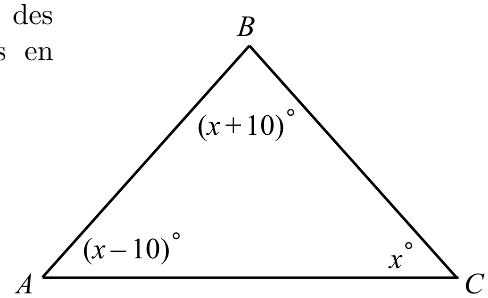
REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles
Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

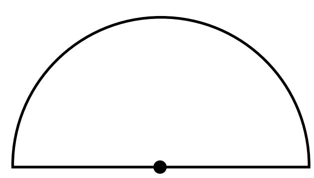
1. (a) Quelle est la valeur de $\dfrac{\sqrt{16}+\sqrt{9}}{\sqrt{16+9}}$?

   (b) Dans la figure ci-contre, les mesures des angles du triangle ABC sont données en fonction de x. Quelle est la valeur de x ?



   (c) Lisa gagne deux fois plus de l'heure que Bart. Lisa travaille 6 heures et Bart travaille 4 heures. Ils gagnent 200 $ en tout. Combien Lisa gagne-t-elle de l'heure ?

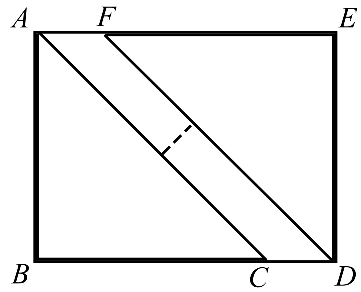
2. (a) Le demi-disque ci-contre a un rayon de 10. Quel est le périmètre du demi-disque ?



   (b) La parabole d'équation $y = 10(x+2)(x-5)$ coupe l'axe des abscisses aux points P et Q. Quelle est la longueur du segment de droite PQ ?

   (c) La droite d'équation $y = 2x$ coupe au point E le segment de droite qui joint les points $C(0, 60)$ et $D(30, 0)$. Déterminer les coordonnées de E.

3. (a) Jean fait cuire deux grands biscuits identiques de forme triangulaire, soit les triangles ABC et DEF. Chaque biscuit a la forme d'un triangle rectangle isocèle. Les cathètes (petits côtés) de chaque triangle ont une longueur de 20 cm. Il place les biscuits sur un plateau rectangulaire de manière que les points A, B, D et E soient les sommets du rectangle, comme dans la figure ci-contre. Sachant qu'il y a une distance de 4 cm entre les côtés parallèles AC et DF, quelle est la largeur BD du plateau ?



(b) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $\dfrac{x^2+x+4}{2x+1} = \dfrac{4}{x}$.

4. (a) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 900, y inclus 1 et 900, qui sont des carrés parfaits. (Un *diviseur positif* de 900 est un entier positif qui divise 900 tout en laissant un reste de 0.)

(b) Les points $A(k, 3)$, $B(3, 1)$ et $C(6, k)$ forment un triangle isocèle. Sachant que $\angle ABC = \angle ACB$, déterminer toutes les valeurs possibles de k.

5. (a) Une chimiste a trois bouteilles qui contiennent chacune un mélange d'acide et d'eau :

- la bouteille A contient 40 g de liquide dont 10 % d'acide,
- la bouteille B contient 50 g de liquide dont 20 % d'acide et
- la bouteille C contient 50 g de liquide dont 30 % d'acide.

Elle utilise les mélanges de chaque bouteille pour créer un mélange de 60 g de liquide dont 25 % d'acide. Elle mélange ensuite le restant des liquides des trois bouteilles pour créer un nouveau mélange. Quel pourcentage de ce nouveau mélange est formé d'acide ?

(b) On considère des nombres réels x et y tels que $3x + 4y = 10$. Déterminer la plus petite valeur possible de l'expression $x^2 + 16y^2$.

6. (a) Dans un sac, il y a 40 boules, chacune étant noire ou dorée. Firmin plonge son bras dans le sac et en sort deux boules au hasard. Chaque boule du sac a la même chance d'être choisie. Sachant que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\frac{5}{12}$, combien des 40 boules sont dorées ?

(b) Dans une suite géométrique de n termes $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$, on a $t_1 t_n = 3$. De plus, le produit des n termes est égal à 59 049 (c.-à-d. que $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} t_n = 59\,049$). Déterminer la valeur de n.

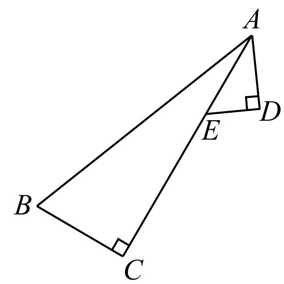
(Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme après le premier est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

7. (a) Sachant que $\dfrac{(x-2013)(y-2014)}{(x-2013)^2+(y-2014)^2} = -\dfrac{1}{2}$, quelle est la valeur de $x+y$?

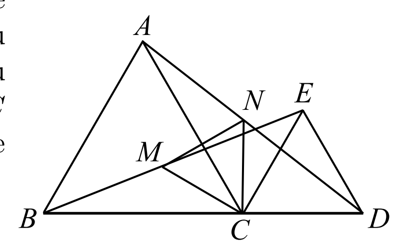
(b) Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels :

$$(\log_{10} x)^{\log_{10}(\log_{10} x)} = 10\,000$$

8. (a) Dans la figure ci-contre, $\angle ACB = \angle ADE = 90°$. Sachant que $AB = 75$, $BC = 21$, $AD = 20$ et $CE = 47$, déterminer la longueur exacte de BD.



(b) Dans la figure ci-contre, le point C est situé sur le segment BD, le point M est le milieu du segment BE et le point N est le milieu du segment AD. De plus, les triangles ABC et ECD sont équilatéraux. Démontrer que le triangle MNC est équilatéral.



9. (a) Sans utiliser une calculatrice, déterminer des entiers strictement positifs m et n pour lesquels :

$$\sin^6 1° + \sin^6 2° + \sin^6 3° + \cdots + \sin^6 87° + \sin^6 88° + \sin^6 89° = \frac{m}{n}$$

(L'addition dans le membre de gauche de l'équation est formée de 89 termes de la forme $\sin^6 x°$, x prenant chaque valeur entière positive de 1 à 89.)

(b) On considère les entiers strictement positifs formés d'exactement n chiffres. $f(n)$ représente le nombre de tels entiers dont les n chiffres ont une somme de 5. Déterminer combien des 2014 entiers $f(1), f(2), \ldots, f(2014)$ ont un chiffre des unités égal à 1, tout en justifiant sa démarche.

10. Fanny s'adonne à un jeu avec des bonbons haricots sur une droite numérique. Au départ, elle a N bonbons, tous en position 0. À chaque tour, elle doit choisir un des mouvements suivants :

- Type 1 : Elle enlève deux bonbons de la position 0, en mange un, et place l'autre en position 1.
- Type i, i étant un entier et $i \geq 2$: Elle enlève un bonbon de la position $i-2$ et un bonbon de la position $i-1$, en mange un, et place l'autre en position i.

Lorsqu'il devient impossible de jouer davantage, les positions des bonbons forment ce qu'on appellera *l'état final*. Lorsque l'état final est atteint, on dit que Fanny a gagné la joute s'il reste au plus trois bonbons, chacun dans une position distincte, de manière qu'il n'y ait pas de bonbons en positions consécutives. Par exemple, si $N = 7$, Fanny gagne la joute avec la suite de mouvements suivants

Type 1, Type 1, Type 2, Type 1, Type 3,

ce qui fait que dans l'état final, il y a des bonbons en positions 1 et 3. Une suite différente de mouvements avec $N = 7$ pourrait ne pas être gagnante.

(a) Déterminer un entier N pour lequel il est possible de gagner la joute de manière qu'à l'état final, il reste un bonbon en position 5 et aucun autre bonbon dans une autre position.

(b) Supposons que Fanny commence la partie avec un entier particulier inconnu N strictement positif. Démontrer que si Fanny peut gagner la joute, alors il n'y a qu'un état final possible.

(c) Déterminer l'entier strictement positif N le plus près de 2014 pour lequel Fanny peut gagner la joute, tout en justifiant sa démarche.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2014!
En 2013, plus de 17 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2014.

Visitez notre site Web pour

– des copies gratuites des concours précédents
– des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
– des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

– obtenir des renseignements au sujet des concours de 2014/2015
– vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
– trouver les résultats de votre école
– vous inscrire au Problème de la semaine
– obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)