Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2014

(10e année – Secondaire IV)

le jeudi 20 février 2014

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 février 2014

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On change l'ordre des termes pour obtenir $2000 + 200 - 80 - 120$.
Puisque $200 - 80 - 120 = 0$, alors $2000 + 200 - 80 - 120 = 2000$.
On aurait pu traiter chaque opération dans l'ordre pour obtenir :

$$2000 - 80 + 200 - 120 = 1920 + 200 - 120 = 2120 - 120 = 2000$$

Réponse : (A)

2. Puisque $(2)(3)(4) = 6x$, alors $6(4) = 6x$. On divise chaque membre de l'équation par 6 pour obtenir $x = 4$.

Réponse : (E)

3. Le troisième angle du triangle est opposé par le sommet à un angle de $40°$. Il mesure donc $40°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$, alors $40° + 60° + x° = 180°$, d'où $100 + x = 180$.
Donc $x = 80$.

Réponse : (C)

4. La ligne qui représente une température de $3\,°C$ est la droite horizontale à mi-chemin entre les marques de $2\,°$ et $4\,°$ sur l'axe vertical.
Deux points sur cette droite représentent des données : un à 14 h et un à 21 h.
L'heure demandée est 21 h.

Réponse : (A)

5. Puisque $2n + 5 = 16$, alors $2n + 5 - 5 = 16 - 5$, ou $2n = 11$. Donc $2n - 3 = 11 - 3$, ou $2n - 3 = 8$.
On aurait pu résoudre l'équation $2n + 5 = 16$ et obtenir $2n = 11$, d'où $n = \frac{11}{2}$.
On aurait alors $2n - 3 = 2(\frac{11}{2}) - 3$, d'où $2n - 3 = 11 - 3$, ou $2n - 3 = 8$.

Réponse : (A)

6. Puisque $3 = \frac{6}{2}$ et $\frac{5}{2} < \frac{6}{2}$, alors $\frac{5}{2} < 3$. (Ou : puisque $\frac{5}{2} = 2{,}5$ et que $2{,}5 < 3$, alors $\frac{5}{2} < 3$.)
Puisque $3 = \sqrt{9}$ et $\sqrt{9} < \sqrt{10}$, alors $3 < \sqrt{10}$.
Donc $\frac{5}{2} < 3 < \sqrt{10}$. Placés en ordre croissant, les nombres sont $\frac{5}{2}, 3, \sqrt{10}$.

Réponse : (B)

7. $20\,\%$ de 100 est égal à 20. Lorsque 100 est augmenté de $20\,\%$, on obtient $100 + 20$, ou 120.
$50\,\%$ d'un nombre correspond à la moitié du nombre. Donc, $50\,\%$ de 120 est égal à 60.
Lorsque 120 est augmenté de $50\,\%$, on obtient $120 + 60$, ou 180.
Donc, Margot obtient 180 comme réponse finale.

Réponse : (E)

8. Puisque le triangle PQR est rectangle en P, on peut utiliser le théorème de Pythagore.
On a donc $PQ^2 + PR^2 = QR^2$, ou $10^2 + PR^2 = 26^2$.
Donc $PR^2 = 26^2 - 10^2$, d'où $PR^2 = 676 - 100$, ou $PR^2 = 576$. Puisque $PR > 0$, alors $PR = \sqrt{576}$, ou $PR = 24$.
Puisque le triangle est rectangle en P, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}(24)(10)$, ou 120.

Réponse : (B)

9. On représente Alexa, Boris, Carla, Dan et Éric par les lettres A, B, C, D et E, respectivement.
On utilise le signe $(>)$ pour représenter « est plus grand que » et le signe $(<)$ pour représenter « est plus court que ».
D'après le premier boulet, $A > C$.

D'après le deuxième boulet, $D < E$ et $D > B$, d'où $E > D > B$.
D'après le troisième boulet, $E < C$, ou $C > E$.
Puisque $A > C$ et $C > E$ et $E > D > B$, alors $A > C > E > D > B$, ce qui indique que Bob est la personne la plus courte.

Réponse : (B)

10. *Solution 1*
On commence par la `SORTIE` et on procède à rebours jusqu'à l'`ENTRÉE`.
Puisqu'on obtient la `SORTIE` 32 en ajoutant 16 au nombre précédent, alors le nombre précédent est égal à 32 − 16, ou 16.

$$\boxed{\texttt{ENTRÉE}} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{32}$$

Puisqu'on obtient 16 en divisant le nombre précédent par 2, alors le nombre précédent est égal à 2×16, ou 32.

$$\boxed{\texttt{ENTRÉE}} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{32} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{32}$$

Puisqu'on obtient 32 en soustrayant 8 de l'`ENTRÉE`, alors l'`ENTRÉE` est égale à $32 + 8$, ou 40.

$$\boxed{40} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{32} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{32}$$

Solution 2
Soit x l'`ENTRÉE`.
Si on soustrait 8, on obtient $x - 8$.
Si on divise le résultat par 2, on obtient $\frac{1}{2}(x - 8)$, ou $\frac{1}{2}x - 4$.
Si on ajoute 16 à ce résultat, on obtient $(\frac{1}{2}x - 4) + 16$, ou $\frac{1}{2}x + 12$, ce qui est la `SORTIE`.

$$\boxed{x} \rightarrow \text{Soustrais } 8 \rightarrow \boxed{32} \rightarrow \text{Divise par } 2 \rightarrow \boxed{16} \rightarrow \text{Ajoute } 16 \rightarrow \boxed{\tfrac{1}{2}x + 12}$$

Puisque la `SORTIE` est 32, alors $\frac{1}{2}x + 12 = 32$, ou $\frac{1}{2}x = 20$, d'où $x = 40$.
Donc, l'`ENTRÉE` est égale à 40.

Réponse : (D)

11. Soit $y = mx + b$ l'équation de la droite dans la figure.
La pente m de la droite est négative.
L'ordonnée à l'origine b de la droite est négative.
Parmi les cinq choix de réponse, seule l'équation $y = -2x + 3$ indique $m < 0$ et $b > 0$.
Donc, l'équation $y = -2x + 3$ pourrait représenter la droite.

Réponse : (E)

12. Puisque $x = 2y$, alors $(x - y)(2x + y) = (2y - y)(2(2y) + y) = (y)(5y) = 5y^2$.

Réponse : (A)

13. On considère le temps quÉrica met pour monter 9 calculatrices. On peut considérer qu'il s'agit de 3 groupes de 3 calculatrices.
Puisque Érica peut monter 3 calculatrices dans le temps que met Nico pour monter 2 calculatrices, Nico assemble 3 groupes de 2 calculatrices (c-à-d. 6 calculatrices) pendant ce temps.
Puisque Nico peut monter une calculatrice dans le temps que met Sami pour monter 3 calculatrices, alors Sami monte 18 calculatrices pendant que Nico monte 6 calculatrices.
Dans le temps que met Érica pour monter 9 calculatrices, les trois personnes peuvent monter $(9 + 6 + 18)$ calculatrices, ou 33 calculatrices.

Réponse : (E)

14. Puisque 1 GO $=$ 1024 MO, alors les 300 GO du disque dur de Julie correspondent à 300×1024 MO, ou 307 200 MO.
Lorsque Julie place 300 000 MO de données sur son disque dur, l'espace disponible sur le disque dur est de $(307\,200 - 300\,000)$ MO, ou 7200 MO.

Réponse : (C)

15. D'après la deuxième rangée, $\triangle + \triangle + \triangle + \triangle = 24$, ou $4\triangle = 24$. Donc $\triangle = 6$.
D'après la première rangée, $\heartsuit + \triangle + \triangle + \heartsuit = 26$, ou $2\heartsuit + 2\triangle = 26$.
Puisque $\triangle = 6$, l'équation devient $2\heartsuit = 26 - 12$. Donc $2\heartsuit = 14$, ou $\heartsuit = 7$.
D'après la quatrième rangée, $\square + \heartsuit + \square + \triangle = 33$.
Puisque $\triangle = 6$ et $\heartsuit = 7$, l'équation devient $2\square + 7 + 6 = 33$. Donc $2\square = 20$, ou $\square = 10$.
D'après la troisième rangée, cette équation devient $\square + \blacklozenge + \heartsuit + \blacklozenge = 27$.
Puisque $\square = 10$ et $\heartsuit = 7$, alors $2\blacklozenge = 27 - 10 - 7$, ou $2\blacklozenge = 10$.
Donc $\blacklozenge = 5$.

Réponse : (A)

16. La moyenne du nombre de hamburgers que chaque élève a mangés est égal au nombre total de hamburgers mangés divisé par le nombre total d'élèves.
12 élèves ont chacun mangé 0 hamburger, pour un total de 0 hamburger.
14 élèves ont chacun mangé 1 hamburger, pour un total de 14 hamburgers.
8 élèves ont chacun mangé 2 hamburgers, pour un total de 16 hamburgers.
4 élèves ont chacun mangé 3 hamburgers, pour un total de 12 hamburgers.
2 élèves ont chacun mangé 4 hamburgers, pour un total de 8 hamburgers.
Le nombre total de hamburgers mangés par tous les élèves est donc de $0 + 14 + 16 + 12 + 8$, ou 50. Le nombre total d'élèves est de $12 + 14 + 8 + 4 + 2$, ou 40.
En moyenne, chaque élève a mangé $\frac{50}{40}$ hamburger, ou 1,25 hamburger.

Réponse : (C)

17. Un cercle ayant une aire de 36π a un rayon de 6, puisqu'un cercle de rayon r a une aire de πr^2 et que $\pi(6^2) = 36\pi$.
Un cercle de rayon 6 a un diamètre de 12 et une circonférence de $\pi(12)$, ou 12π.
Chacun des arcs de la figure est un quart de cercle. Chacun a une longueur de $\frac{1}{4}(12\pi)$, ou 3π.
La figure est formée de trois quarts de cercles et de deux rayons.
Elle a donc un périmètre de $3(3\pi) + 2(6)$, ou $9\pi + 12$.

Réponse : (B)

18. Soit x le nombre de timbres de 2 ¢ que Sonita a achetés.
Elle a donc acheté $10x$ timbres de 1 ¢.
Les timbres de 2 ¢ et de 1 ¢ qu'elle a achetés ont une valeur totale de $[2(x) + 1(10x)]$ ¢, ou $2x$ ¢.
Puisqu'elle a aussi acheté des timbres de 5 ¢ et que la valeur totale des timbres qu'elle a achetés est de 100 ¢, alors les timbres de 5 ¢ qu'elle a achetés ont une valeur de $(100 - 12x)$ ¢.
Donc, $100 - 12x$ doit être un multiple de 5. Puisque 100 est un multiple de 5, alors $12x$ doit être un multiple de 5. Donc, x est un multiple de 5 (puisque 12 et 5 n'admettent aucun diviseur commun autre que 1).
Or, $x > 0$ (puisqu'elle a acheté des timbres de 2 ¢) et $x < 9$ (puisque $12x$ est inférieur à 100).
Or, le seul multiple de 5 entre 0 et 9 est 5. Donc $x = 5$.
Lorsque $x = 5$, les timbres de 5 ¢ ont une valeur de $(100 - 12x)$ ¢, ou $(100 - 12(5))$ ¢, ou 40 ¢. Le nombre de timbres de 5 ¢ que Sonita a achetés est donc égal à $40 \div 5$, ou 8.
Sonita a acheté 5 timbres de 2 ¢, 50 timbres de 1 ¢ et 8 timbres de 5 ¢ pour un total de $(5+50+8)$ timbres, ou 63 timbres.

(On peut vérifier la valeur totale de ces timbres, en cents : $5(2) + 50(1) + 8(5)$, ou $10 + 50 + 40$, ou 100.)

Réponse : (D)

19. Il est possible de choisir dix paires de nombres : -3 et -1 ; -3 et 0 ; -3 and 2 ; -3 et 4 ; -1 et 0 ; -1 et 2 ; -1 et 4 ; 0 et 2 ; 0 et 4 ; 2 et 4. Ces choix sont tous équiprobables.
Les 4 paires qui incluent le nombre 0 ont un produit de 0 ; les 6 paires qui n'incluent pas 0 n'ont pas un produit de 0.
Donc, la probabilité d'obtenir deux nombres qui ont un produit de 0 est de $\frac{4}{10}$, ou $\frac{2}{5}$.

Réponse : (D)

20. La somme en dégradé de l'entier $wxyz$ est égale à 2014.
Donc, l'entier $wxyz$, l'entier xyz, l'entier yz et l'entier z ont une somme de 2014.
Or, l'entier $wxyz$ a une valeur de $1000w+100x+10y+z$, l'entier xyz a une valeur de $100x+10y+z$ et l'entier yz a une valeur de $10y + z$.
On a donc :

$$(1000w + 100x + 10y + z) + (100x + 10y + z) + (10y + z) + z = 2014$$

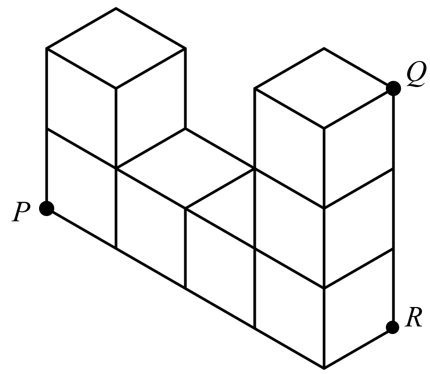
ou

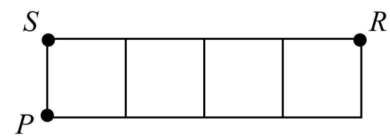
$$1000w + 200x + 30y + 4z = 2014 \quad (*)$$

Chacune des variables w, x, y et z représente un chiffre et $w \neq 0$.
Le chiffre w ne peut être supérieur ou égal à 3, sinon le membre de gauche de l'équation $(*)$ serait supérieur ou égal à 3000 et ne pourrait égaler 2014. Donc $w = 1$ ou $w = 2$.
Si $w = 2$, alors $2000+200x+30y+4z = 2014$, d'où $200x+30y+4z = 14$, ou $100x+15y+2z = 7$.
On a donc $x = y = 0$ (autrement la somme des termes $100x + 15y$ serait supérieure à 7), d'où $2z = 7$ et cette équation n'admet aucune solution entière. Donc $w \neq 2$.
Donc $w = 1$.
L'équation $(*)$ devient donc $1000 + 200x + 30y + 4z = 2014$, d'où $200x + 30y + 4z = 1014$, ou $100x + 15y + 2z = 507$.
Puisque $0 \leq y \leq 9$ et $0 \leq z \leq 9$, alors $0 \leq 15y + 2z \leq 15(9) + 2(9) = 153$.
Puisque $100x$ est un multiple de 100 et $0 \leq 15y + 2z \leq 153$, alors $100x = 400$ ou $100x = 500$.
Donc $15y + 2z = 507 - 400$ ou $15y + 2z = 507 - 500$, c'est-à-dire que $15y + 2z = 107$ ou $15y + 2z = 7$. Or, on a vu que $15y + 2z$ ne peut être égal à 7. Donc $15y + 2z = 107$, d'où $100x = 400$, ou $x = 4$.
Donc $15y + 2z = 107$.
Puisque $2z$ est pair, alors $15y$ doit être impair pour que $15y + 2z$ soit impair.
Les multiples impairs de 15 inférieurs à 107 sont $15, 45, 75$ et 105.
Puisque $0 \leq 2z \leq 18$, on doit avoir $15y = 105$, ou $y = 7$. Donc $2z = 2$, ou $z = 1$.
L'entier $wxyz$ est donc 1471. (On peut vérifier la somme en dégradé : $1471+471+71+1 = 2014$.)
Donc $w + x + y + z = 1 + 4 + 7 + 1$, ou $w + x + y + z = 13$.

Réponse : (D)

21. Soit R le point au bas du solide, directement au-dessous de Q et soit S le coin arrière gauche au bas du solide (on ne peut le voir dans la figure donnée).
Puisque QR est perpendiculaire à la surface au bas du solide, alors le triangle PRQ est rectangle en R. On a donc $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$.
On sait aussi que le triangle PSR est rectangle en S, puisque le solide est formé de cubes.
On a donc $PR^2 = PS^2 + SR^2$.





D'après ces deux égalités, on a $PQ^2 = PS^2 + SR^2 + RQ^2$.
Puisque chaque arête d'un petit cube a une longueur de 1, alors $PS = 1$, $SR = 4$ et $RQ = 3$.
Donc $PQ^2 = 1^2 + 4^2 + 3^2$, ou $PQ^2 = 26$.
Puisque $PQ > 0$, alors $PQ = \sqrt{26}$.

Réponse : (B)

22. Soit $VWXYZ$ un tel entier de cinq chiffres, V, W, X, Y et Z étant des chiffres.
On veut compter le nombre de façons qu'il y a d'attribuer les chiffres 1, 3, 5, 7 et 9 aux chiffres V, W, X, Y et Z tout en respectant les conditions données.
D'après ces conditions, on a $W > X$, $W > V$, $Y > X$ et $Y > Z$.
On ne peut pas attribuer les chiffres 1 et 3 à W ou Y, puisque W et Y sont supérieurs à chacun de leurs chiffres voisins, alors que 1 est inférieur à tous les autres chiffres et que 3 est seulement supérieur à un seul autre chiffre.
On ne peut pas attribuer le chiffre 9 à V, à X ou à Z, puisque 9 est le plus grand chiffre et qu'il ne peut être inférieur à W ou à Y. On doit donc attribuer le chiffre 9 à W ou à Y.
On attribue donc à W et à Y le chiffre 9 et le chiffre 5 ou 7.

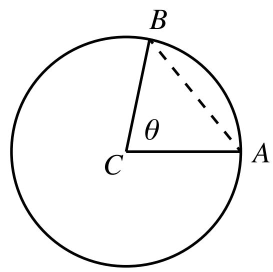
Supposons que $W = 9$ et $Y = 5$. Le nombre est donc $V9X5Z$.
Ni X, ni Z ne peut égaler 7, puisque $7 > 5$. Donc $V = 7$. On attribue donc à X et à Z les chiffres 1 et 3 ou 3 et 1.
Il y a donc deux entiers possibles dans ce cas.
De même, si $Y = 9$ et $W = 5$, il y a deux entiers possibles.

Supposons que $W = 9$ et $Y = 7$. Le nombre est donc $V9X7Z$.
On peut attribuer les chiffres 1, 3 et 5 à n'importe quelles des variables restantes. Il y a trois choix pour la variable V. Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour la variable X et un choix pour la variable Z.
Dans ce cas, il y a donc $3 \times 2 \times 1$ entiers possibles, ou 6 entiers possibles.
De même, si $Y = 9$ et $W = 7$, il y a 6 entiers possibles.

En tout, il y a $2 + 2 + 6 + 6$ entiers possibles, ou 16 entiers possibles.

Réponse : (C)

23. Soit C la position de Clarice et A la position d'Alain.
On considère un cercle de centre C avec un rayon de 10 m. Puisque A est à 10 m de C, alors A est sur ce cercle.
Bob part du point C et choisit une direction au hasard. On représente ce choix de direction en lui faisant choisir un angle θ, de $0°$ à $360°$ inclusivement, mesuré à partir du rayon CA dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Bob arrive au point B qui est situé sur le cercle.



On cherche la probabilité pour que $AB < AC$.
Puisque le cercle est symétrique par rapport au diamètre qui contient le rayon CA, on suppose que θ est entre $0°$ et $180°$. La probabilité sera la même en dessous du diamètre.
On considère le triangle CAB dans lequel $CA = CB = 10$ m.
On aura $AB < AC$ lorsque AB est le plus petit côté du triangle ABC.
AB est le plus petit côté du triangle ABC lorsqu'il est opposé au plus petit angle du triangle ABC. (Dans n'importe quel triangle, le plus petit côté est opposé au plus petit angle et le plus grand côté est opposé au plus grand angle.)
Puisque le triangle ABC est isocèle avec $CA = CB$, alors $\angle CAB = \angle CBA$.
On sait que θ est opposé à AB. De plus, $\angle ACB + \angle CAB + \angle CBA = 180°$.
Puisque $\angle CAB = \angle CBA$, alors $\angle ACB + 2\angle CAB = 180°$, ou $\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$.
Si θ est inférieur à $60°$, alors $\angle CAB$ est supérieur à $60°$, car $\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\theta$.
De même, si $\angle ACB$ est supérieur à $60°$, alors $\angle CAB$ est inférieur à $60°$, car $\angle CAB = 90° - \frac{1}{2}\theta$.
Donc, AB est le plus petit côté du triangle ABC lorsque θ est entre $0°$ et $60°$.
Puisque θ est choisi de façon aléatoire dans l'intervalle de $0°$ à $180°$ et que $60° = \frac{1}{3}(180°)$, alors la probabilité que θ soit dans l'intervalle choisi est de $\frac{1}{3}$.
Donc, la probabilité pour que Bob soit plus près d'Alain que de Clarice ne l'est d'Alain est de $\frac{1}{3}$.
(Les cas où $\theta = 0°$, $\theta = 60°$ et $\theta = 180°$ peuvent sembler problématiques, mais ce ne sont que trois positions particulières dans un nombre infini de valeurs de θ.)

Réponse : (B)

24. Étant donné un entier n strictement positif, $S(n)$ est le plus petit entier strictement positif divisible par chacun des entiers $1, 2, 3, \ldots, n$. En d'autres mots, $S(n)$ est le plus petit commun multiple (PPCM) de $1, 2, 3, \ldots, n$.
Pour déterminer le PPCM d'un ensemble de nombres :

- on exprime chaque nombre en factorisation première,
- on considère la liste de tous les nombres premiers qui paraissent dans ces factorisations premières,
- on détermine la plus grande puissance, dans ces factorisations premières, de chaque nombre premier de la liste et
- on multiplie toutes ces plus grandes puissances.

Par exemple, pour calculer $S(8)$, on détermine le PPCM de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
On écrit les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en factorisation première : $2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2^3$.

Les nombres premiers utilisés sont 2, 3, 5, 7. Les plus grandes puissances sont $2^3, 3^1, 5^1, 7^1$. Donc $S(8) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

Puisque $S(n)$ est le PPCM de $1, 2, 3, \ldots, n$ et que $S(n+4)$ est le PPCM de

$$1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2, n+3, n+4$$

alors $S(n) \neq S(n+4)$ si (i) il existe des facteurs premiers parmi les factorisations premières de $n+1, n+2, n+3, n+4$ qui ne paraissent pas parmi celles de $1, 2, 3, \ldots, n$ ou (ii) il existe une puissance, parmi les factorisations premières de $n+1$,$n+2$,$n+3$,$n+4$, qui est supérieure aux puissances parmi celles de $1, 2, 3, \ldots, n$.
Si le cas (i) survient, on considère un nombre premier p qui est un diviseur d'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ et qui n'est pas un diviseur d'un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. Donc, le plus petit nombre qui a pour diviseur p est un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$, ce qui indique qu'un de ces nombres est p. (Le plus petit multiple de p est le nombre $1 \cdot p$, c'est-à-dire le nombre p lui-même.)
Donc, le cas (i) survient si l'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ est un nombre premier.
Si le cas (ii) survient, on considère une puissance p^k (où $k > 1$) d'un nombre premier, la puissance étant un diviseur d'un des nombres $n+1$, $n+2, n+3, n+4$ et n'étant pas un diviseur d'un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. En utilisant le même argument que pour le cas (i), on conclut qu'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ doit être égal à cette puissance p^k.
Donc, $S(n) \neq S(n+4)$ lorsqu'un des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.
Donc, $S(n) = S(n+4)$ lorsqu'aucun des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ n'est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.
On cherche donc les entiers strictement positifs n ($1 \leq n \leq 100$) pour lesquels aucun des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ n'est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.
Les nombres premiers inférieurs à 104 sont :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103$$

(On considère les nombres premiers jusqu'à 104, puisque n peut atteindre 100 et $n+4$ peut donc atteindre 104.)
Les puissances des nombres premiers (avec exposants de 2 ou plus) inférieurs à 100 sont :

$$4, 8, 16, 32, 64, 9, 27, 81, 25, 49$$

Il y a 5 puissances de 2, 3 puissances de 3, 1 puissance de 5 et 1 puissance de 7 dans cette liste.
Il n'existe aucun autre nombre premier ayant des puissances inférieures à 100.
On veut donc compter le nombre d'entiers strictement positifs n ($1 \leq n \leq 100$) pour lesquels aucun des nombres $n+1, n+2, n+3, n+4$ ne parait dans la liste suivante :

$$2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 64,$$

$$67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, 97, 101, 103$$

Pour que quatre nombres consécutifs ne paraissent pas dans cette liste, il doit y avoir un intervalle d'au moins 5 entre deux nombres consécutifs de la liste.
Les valeurs de n qui satisfont à la condition sont $n = 32, 53, 54, 73, 74, 83, 84, 89, 90, 91, 92$.
(Par exemple, 54 est une valeur possible de n, puisqu'aucun des nombres $55, 56, 57, 58$ ne parait dans la liste.)
Il y a donc 11 valeurs de n ($1 \leq n \leq 100$) pour lesquelles $S(n) = S(n+4)$.

Réponse : (C)

25. Soit $(0, 2a)$ les coordonnées du point P, a étant un nombre réel.
Puisque l'ordonnée de P est supérieure à 0 et inférieure à 100, alors $0 < 2a < 100$, ou $0 < a < 50$.
On détermine une expression en fonction de a pour le rayon du cercle, puis on détermine combien de valeurs de a sont des entiers.
On exprime d'abord les coordonnées du centre C du cercle en fonction de a, puis on déterminera la distance de C à un des points O, P ou Q.
Lorsqu'un cercle passe par les trois sommets O, P et Q d'un triangle, alors son centre est le point d'intersection des médiatrices des côtés OP, OQ et PQ du triangle.
On déterminera le centre C en déterminant le point d'intersection des médiatrices des côtés OP et OQ. (Le choix de PQ rendrait les calculs plus compliqués du point de vue algébrique.)
Puisque O a pour coordonnées $(0, 0)$ et que P a pour coordonnées $(0, 2a)$, alors OP est vertical et sa médiatrice sera horizontale.
Le milieu de OP a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(0 + 0), \frac{1}{2}(0 + 2a))$, ou $(0, a)$.
La médiatrice de OP est la droite qui passe par le point $(0, a)$. Elle a donc pour équation $y = a$.
Puisque O et Q ont pour coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(4, 4)$, alors OQ a pour pente $\frac{4-0}{4-0}$, ou 1. La médiatrice de OQ, qui lui est perpendiculaire, a donc une pente de -1.
Le milieu de OQ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(0 + 4), \frac{1}{2}(0 + 4))$, ou $(2, 2)$.
La médiatrice de OQ a une pente de -1 et elle passe au point $(2, 2)$. Elle a donc pour équation $y - 2 = (-1)(x - 2)$, ou $y = -x + 4$.
Le centre du cercle est donc le point d'intersection des droites d'équations $y = a$ et $y = -x + 4$.
L'ordonnée de ce point est donc égale à a. On reporte $y = a$ dans la deuxième équation pour obtenir $a = -x + 4$, d'où $x = 4 - a$.
Le point C a donc pour coordonnées $(4 - a, a)$.
Le rayon r du cercle est la distance de C à n'importe quel des points O, P et Q. On utilise le point O pour faciliter les calculs. On a :

$$r = \sqrt{(4-a)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 - 8a + 16 + a^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 16}$$

On récrit l'expression sous la forme :

$$r = \sqrt{2(a^2 - 4a + 8)} = \sqrt{2(a^2 - 4a + 4 + 4)} = \sqrt{2((a-2)^2 + 4)} = \sqrt{2(a-2)^2 + 8}$$

Puisque $(a - 2)^2 \geq 0$ et $(a - 2)^2 = 0$ seulement lorsque $a = 2$, alors $2(a - 2)^2 + 8$ a une valeur minimale de 8 lorsque $a = 2$. Donc $r \geq \sqrt{8}$.
L'expression $\sqrt{2(a-2)^2 + 8}$ est décroissante de $a = 0$ à $a = 2$ et croissante de $a = 2$ à $a = 50$.
Lorsque $a = 0$, $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} = \sqrt{2(-2)^2 + 8} = 4$.
Lorsque $a = 2$, $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} = \sqrt{2(0)^2 + 8} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$.
Lorsque $a = 50$, $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8} = \sqrt{2(48)^2 + 8} = \sqrt{4616} \approx 67{,}94$.
Donc lorsque $0 < a \leq 2$, on a $\sqrt{8} \leq r < 4$ et lorsque $2 \leq a < 50$, on a $\sqrt{8} \leq r < \sqrt{4616}$.
L'expression $r = \sqrt{2(a-2)^2 + 8}$ prendra pour valeur tout nombre réel dans chacun de ces intervalles, puisque $b = 2(a - 2)^2 + 8$ est l'équation d'une parabole qui est une courbe continue.
Entre $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ et 4, l'expression prend une valeur entière, soit 3. (On n'inclut pas 4, puisqu'il correspond à l'extrémité de l'intervalle qui est exclue.)
Entre $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ et $\sqrt{4616} \approx 67{,}94$, l'expression prend 65 valeurs entières, soit de 3 à 67.
En tout, l'expression prend 66 valeurs entières $(1 + 65)$ selon les valeurs possibles de a. Il y a donc 66 positions possibles pour le point P de manière que le rayon du cercle soit un entier.

Réponse : (C)