Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2014

le jeudi 20 novembre 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 novembre 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. On remarque que $\angle DAF = \angle FAB - \angle DAB$ et que $\angle FAB = \angle FAE + \angle EAB$.
   Puisque $ABCD$ est un carré, alors $\angle DAB = 90°$.
   Puisque les triangles AEF et ABE sont équilatéraux, alors $\angle FAE = \angle EAB = 60°$.
   Donc $\angle DAF = (60° + 60°) - 90°$, ou $\angle DAF = 30°$.

   Réponse : 30°

2. Puisque le rapport du nombre de pièces de 10 ¢ au nombre de pièces de 25 ¢ est de 3 : 2, alors le nombre de pièces de 10 ¢ est égal à $3k$ et le nombre de pièces de 25 ¢ est égal à $2k$, k étant un entier positif quelconque.
   Les $3k$ pièces de 10 ¢ valent $10(3k)$ cents, ou $30k$ cents.
   Les $2k$ pièces de 25 ¢ valent $25(2k)$ cents, ou $50k$ cents.
   Puisque les pièces ont une valeur totale de 4 \$, ou 400 cents, alors $30k + 50k = 400$, d'où $80k = 400$, ou $k = 5$.
   Le nombre de pièces 10 ¢ dans le bocal est égal à 3(5), ou 15.
   (Le nombre de pièces 10 ¢ dans le bocal est égal à 2(5), ou 10. On vérifie que 15 pièces de 10 ¢ valent 150 cents et que 10 pièces de 25 ¢ valent 250 cents, pour un total de 400 cents, ou 4 \$.)

   Réponse : 15

3. On remarque que $5000 = 5 \cdot 1000 = 5 \cdot 10^3 = 5 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^3 5^4$.
   Puisque ni m, ni n n'est divisible par 10, alors ni m, ni n ne peut avoir 2 et 5 comme diviseurs.
   Puisque $mn = 5000$, que les seuls diviseurs premiers de 5000 sont 2 et 5 et que ni m, ni n ne peut avoir 2 et 5 comme diviseurs, alors $m = 2^3$ et $n = 5^4$, ou bien $m = 5^4$ et $n = 2^3$.
   Donc $m + n = 2^3 + 5^4$, ou $m + n = 8 + 625$, ou $m + n = 633$.

   Réponse : 633

4. *Solution 1*
   Puisque $f(x) + f(x + 3) = 2x + 5$ pour toutes les valeurs de x, alors avec $x = 2$ on obtient $f(2) + f(5) = 2(2) + 5$, ou $f(2) + f(5) = 9$.
   Avec $x = 5$, on obtient $f(5) + f(8) = 2(5) + 5$, ou $f(5) + f(8) = 15$.
   On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $f(2)+f(8)+2f(5) = 24$.
   Puisque $f(8)+f(2) = 12$, alors $2f(5) = 24-(f(2)+f(8))$, d'où $2f(5) = 24-12$, ou $2f(5) = 12$.
   Donc $f(5) = 6$.

   Solution 2
   La fonction f définie par $f(x) = x + 1$ satisfait aux deux propriétés, puisque :

   - $f(x + 3) = (x + 3) + 1$, ou $f(x + 3) = x + 4$, d'où $f(x) + f(x + 3) = (x + 1) + (x + 4)$, ou $f(x) + f(x + 3) = 2x + 5$, et
   - $f(2) = 2 + 1$, ou $f(2) = 3$ et $f(8) = 8 + 1 = 9$, d'où $f(8) + f(2) = 12$.

   L'énoncé laisse entendre que la valeur de $f(5)$ est la même, quelle que soit la fonction f qui vérifie la condition donnée.
   Donc $f(5) = 5 + 1$, ou $f(5) = 6$.
   (D'autres fonctions peuvent aussi vérifier ces conditions.)

   Réponse : 6

5. On fait appel aux propriétés suivantes des exposants :
   - $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$ pour tout nombre réel a
   - Tout nombre réel peut être élevé au carré
   - La racine cubique de tout nombre réel existe
   - $(b^c)^d = b^{cd} = b^{dc} = (b^d)^c$ lorsque b^c, b^d et b^{cd} existent
   - $(mn)^p = m^p n^p$ lorsque m^p, n^p et $(mn)^p$ existent

   L'équation donnée devient :

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(2+x)^2} + 3\sqrt[3]{(2-x)^2} &= 4\sqrt[3]{4-x^2} \\
\left((2+x)^2\right)^{1/3} + 3\left((2-x)^2\right)^{1/3} &= 4\left(4-x^2\right)^{1/3} \\
(2+x)^{2/3} + 3(2-x)^{2/3} &= 4\left((2+x)(2-x)\right)^{1/3} \\
\left((2+x)^{1/3}\right)^2 + 3\left((2-x)^{1/3}\right)^2 &= 4(2+x)^{1/3}(2-x)^{1/3}
\end{aligned}$$

   Soit $u = (2+x)^{1/3}$ et $v = (2-x)^{1/3}$. La dernière équation devient :

$$\begin{aligned}
u^2 + 3v^2 &= 4uv \\
u^2 - 4uv + 3v^2 &= 0 \\
(u-v)(u-3v) &= 0
\end{aligned}$$

   Donc $u = v$ ou $u = 3v$.

   Si $u = v$, alors $(2+x)^{1/3} = (2-x)^{1/3}$.
   On élève chaque membre au cube pour obtenir $2 + x = 2 - x$, d'où $2x = 0$, ou $x = 0$.

   Si $u = 3v$, alors $(2+x)^{1/3} = 3(2-x)^{1/3}$.
   On élève chaque membre au cube pour obtenir $2 + x = 3^3(2-x)$, d'où $2 + x = 54 - 27x$, ou $28x = 52$. Donc $x = \frac{52}{28}$, ou $x = \frac{13}{7}$.

   On vérifie ces deux réponses dans l'équation initiale.

   Si $x = 0$, le membre de gauche devient

$$\sqrt[3]{(2+0)^2} + 3\sqrt[3]{(2-0)^2} = \sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4-0^2},$$

   qui est égal au membre de droite. Donc, 0 est une racine de l'équation.

   Si $x = \frac{13}{7}$, le membre de droite est égal à

$$4\sqrt[3]{4-\left(\tfrac{13}{7}\right)^2} = 4\sqrt[3]{4-\tfrac{169}{49}} = 4\sqrt[3]{\tfrac{196-169}{49}} = 4\sqrt[3]{\tfrac{27}{49}} = 4\tfrac{3}{\sqrt[3]{49}} = \tfrac{12}{\sqrt[3]{49}}$$

   et le membre de gauche est égal à :

$$\sqrt[3]{(2+\tfrac{13}{7})^2} + 3\sqrt[3]{(2-\tfrac{13}{7})^2} = \sqrt[3]{\left(\tfrac{27}{7}\right)^2} + 3\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{7}\right)^2} = \sqrt[3]{\tfrac{729}{49}} + 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{49}} = \tfrac{9}{\sqrt[3]{49}} + 3\tfrac{1}{\sqrt[3]{49}} = \tfrac{12}{\sqrt[3]{49}}$$

   (On a utilisé $729 = 9^3$.) Le membre de gauche est donc égal au membre de droite. Donc, $\frac{13}{7}$ est aussi une racine.

   Les nombres réels qui vérifient l'équation donnée sont 0 et $\frac{13}{7}$.

   RÉPONSE : 0, $\frac{13}{7}$

6. On considère le casier m et le casier n. Si l'un des numéros est pair et l'autre est impair, alors $m - n$ est impair. Les casiers m et n doivent alors être peints de couleurs différentes.
Donc, aucun casier ayant un numéro pair (on dira *casier pair*) ne peut être peint de la même couleur que n'importe quel casier ayant un numéro impair (*casier impair*).
(Si m et n sont tous deux pairs ou tous deux impairs, alors $m - n$ est pair et il n'y a aucune restriction.)
On ne peut donc utiliser les trois couleurs pour peindre les casiers pairs, ni pour peindre les casiers impairs, car il n'y aurait plus de couleurs disponibles pour le deuxième ensemble de casiers.
Donc, on utilise une ou deux couleurs pour peindre les casiers pairs et une ou deux couleurs pour peindre les casiers impairs.
De plus, on ne peut utiliser deux couleurs pour peindre les casiers pairs et deux couleurs pour peindre les casiers impairs, car une des couleurs serait alors utilisée pour certains casiers pairs et certains casiers impairs.
Il y a donc trois possibilités : on utilise une couleur pour tous les casiers pairs et une couleur pour tous les casiers impairs (il n'est pas nécessaire d'utiliser les trois couleurs), ou on utilise une couleur pour tous les casiers pairs et deux couleurs pour tous les casiers impairs, ou on utilise deux couleurs pour tous les casiers pairs et une couleur pour tous les casiers impairs.
On comptera le nombre de façons de peindre les casiers dans les deux premiers cas. Le nombre de façons de peindre les casiers dans le troisième cas est le même que dans le deuxième cas (on renverse les rôles des casiers pairs et des casiers impairs, puisqu'il y a un nombre égal de casiers de chaque sorte).

<u>1$^{\text{er}}$ cas : Une couleur pour les casiers pairs et une couleur pour les casiers impairs</u>
Il y a 3 choix de couleurs pour les casiers pairs (n'importe laquelle des trois couleurs).
Pour chacun de ces 3 choix, il y a 2 choix pour les casiers impairs (n'importe laquelle des deux couleurs qui restent).
Il y a donc (3×2) façons, ou 6 façons de peindre les casiers.

<u>2$^{\text{e}}$ cas : Une couleur pour les casiers pairs et deux couleurs pour les casiers impairs</u>
Il y a 3 choix de couleurs pour les casiers pairs.
Pour chacun de ces 3 choix, chacun des casiers impairs peut être peint d'une des deux couleurs restantes. Il y a donc 2 choix pour chaque casier impair.
Il y a donc 2^5 façons, ou 32 façons, de peindre les casiers impairs en utilisant l'une ou l'autre des deux couleurs qui restent. Or, deux de ces 32 façons ont déjà été comptées dans le 1$^{\text{er}}$ cas, soit lorsque tous les casiers sont peints de la première couleur qui reste ou lorsqu'ils sont tous peints de la deuxième couleur qui reste. Il y a donc $(32 - 2)$ façons, ou 30 façons de peindre les casiers impairs à l'aide de deux couleurs.
En tout, il y a 3×30 façons, ou 90 façons de peindre les casiers dans ce 2$^{\text{e}}$ cas.

<u>3$^{\text{e}}$ cas : Deux couleurs pour les casiers pairs et une couleur pour les casiers impairs</u>
Comme dans le 2$^{\text{e}}$ cas, il y a 90 façons de peindre les casiers.

En tout, il y a $(6 + 90 + 90)$ façons, ou 186 façons de peindre les casiers.

RÉPONSE : 186

Partie B

1. (a) Les nombres 5, 10 et 15 forment une suite arithmétique de trois termes. Aucun autre choix de trois nombres ne forme une suite arithmétique.

(b) *Solution 1*
Pour passer du 2e terme au 4e terme, il faut ajouter la constante (appelée *raison*) deux fois. Entre ces deux termes, il y a une différence de $13 - 7$, ou 6. Puisque $6 \div 2 = 3$, il y a une différence de 3 entre deux termes consécutifs.
Le 3e terme, q, est donc 3 de plus que 7, d'où $q = 10$, et le 1er terme, p, est 3 de moins que 7, d'où $p = 4$.
Donc $p = 4$ et $q = 10$.

Solution 2
Soit r la raison (la constante additionnée à chaque terme pour obtenir le terme suivant).
On peut alors écrire les quatre termes en fonction de p et de r, soit p, $p+r$, $p+2r$, $p+3r$.
Or, on sait que les quatre termes sont $p, 7, q, 13$. On a donc $p + r = 7$ et $p + 3r = 13$.
On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir $2r = 6$, ou $r = 3$. Donc $p = 4$.
On a donc $q = p + 2r$, d'où $q = 4 + 2(3)$, ou $q = 10$.
Donc $p = 4$ et $q = 10$.

(c) *Solution 1*
Pour passer du 1er terme au 4e terme, il faut ajouter la constante (appelée *raison*) trois fois.
Entre ces deux termes, il y a une différence de $(a + 21) - a$, ou 21.
Puisque $21 \div 3 = 7$, la raison est égale à 7.
La différence entre le 3e terme, c, et le 1er terme, a, est égale à 2 fois la raison, ou 14.
Donc $c - a = 14$.

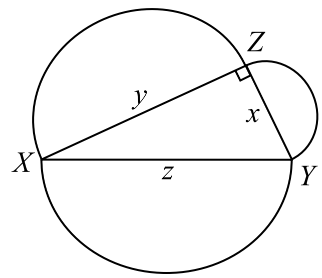
Solution 2
Soit r la raison de la suite arithmétique.
On peut écrire les quatre termes de la suite en fonction de a et de r, soit a, $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$.
Or, on sait que les quatre termes sont $a, b, c, a + 21$.
On a donc $a + 3r = a + 21$, d'où $3r = 21$, ou $r = 7$.
Puisque $c = a + 2r$, alors $c = a + 14$.
Donc $c - a = (a + 14) - a$, ou $c - a = 14$.

(d) Puisque $(y - 6), (2y + 3), (y^2 + 2)$, dans cet ordre, forment une suite arithmétique de trois termes, la différence entre deux termes consécutifs est toujours la même. Donc :

$$\begin{aligned}
(2y+3)-(y-6) &= (y^2+2)-(2y+3)\\
y+9 &= y^2-2y-1\\
0 &= y^2-3y-10\\
0 &= (y-5)(y+2)
\end{aligned}$$

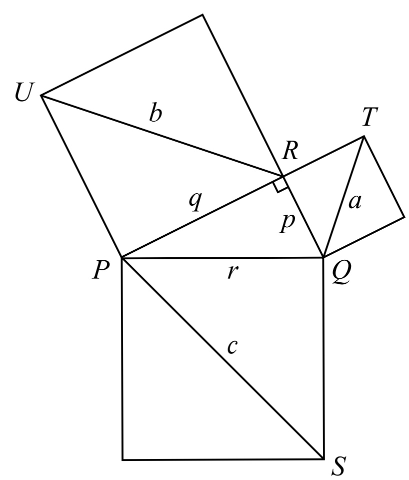
Donc $y = 5$ ou $y = -2$.
On vérifie que ces valeurs de y donnent bien des suites arithmétiques.
Lorsque $y = 5$, la suite devient $-1, 13, 27$, ce qui est une suite arithmétique de raison 14.
Lorsque $y = -2$, la suite devient $-8, -1, 6$, ce qui est une suite arithmétique de raison 7.

2. (a) (i) Les demi-cercles sur YZ, XZ et XY ont pour diamètres respectifs x, y et z. Ils ont donc pour rayons respectifs $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$ et $\frac{1}{2}z$.



En fonction de x, le demi-cercle sur YZ a une aire de $\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}x)^2$, ou $\frac{1}{8}\pi x^2$. (Il s'agit de la moitié de l'aire d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}x$.)
De même, les demi-cercles sur XZ et XY ont une aire respective de $\frac{1}{8}\pi y^2$ et $\frac{1}{8}\pi z^2$.
On a donc $\frac{1}{8}\pi x^2 = 50\pi$ et $\frac{1}{8}\pi y^2 = 288\pi$ et on cherche la valeur de $\frac{1}{8}\pi z^2$.
Puisque le triangle XYZ est rectangle en Z, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $x^2 + y^2 = z^2$. On multiplie chaque membre de cette équation par $\frac{1}{8}\pi$ pour obtenir $\frac{1}{8}\pi x^2 + \frac{1}{8}\pi y^2 = \frac{1}{8}\pi z^2$.
Donc $50\pi + 288\pi = \frac{1}{8}\pi z^2$, d'où $\frac{1}{8}\pi z^2 = 338\pi$.
Le demi-cercle de diamètre XY a donc une aire de $\frac{1}{8}\pi z^2$, ou 338π.
(On remarque qu'il n'était pas nécessaire de déterminer les valeurs de x, y et z.)

(ii) Un carré ayant des côtés de longueur s a des diagonales de longueur $\sqrt{2}s$. En effet, la diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cathètes ont pour longueur s.



On a donc $a = \sqrt{2}p$, $b = \sqrt{2}q$ et $c = \sqrt{2}r$.
Puisque le triangle PQR est rectangle en R, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $p^2 + q^2 = r^2$. On multiplie chaque membre de cette équation par 2 pour obtenir $2p^2 + 2q^2 = 2r^2$, d'où $(\sqrt{2}p)^2 + (\sqrt{2}q)^2 = (\sqrt{2}r)^2$, ou $a^2 + b^2 = c^2$.
Puisque les longueurs a, b et c vérifient la relation de Pythagore, le triangle donc les côtés ont pour longueurs a, b et c est rectangle.

On sait que :

Étant donné un triangle XYZ dont les côtés YZ, XZ et XY ont pour longueurs respectives x, y et z, alors :

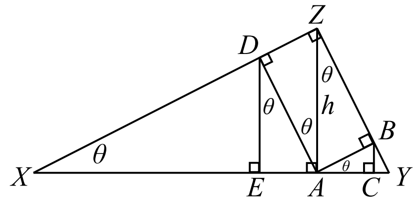
- (Théorème de Pythagore) Si le triangle est rectangle en Z, alors $x^2+y^2 = z^2$.
- (Réciproque du théorème de Pythagore) Si $x^2 + y^2 = z^2$, alors le triangle est rectangle en Z.

(b) *Solution 1*

Soit $AZ = h$ et $\angle ZXY = \theta$.
Puisque le triangle XDE est rectangle en E, alors :

$$\angle XDE = 180^\circ - \angle DXE - \angle XED = 180^\circ - \theta - 90^\circ = 90^\circ - \theta$$

Puisque $\angle XDA = 90^\circ$, alors $\angle EDA = 90^\circ - \angle XDE$, d'où $\angle EDA = 90^\circ - (90^\circ - \theta)$, ou $\angle EDA = \theta$.
De même, $\angle EAD = 90^\circ - \theta$, $\angle DAZ = \theta$, $\angle DZA = 90^\circ - \theta$, $\angle AZB = \theta$, $\angle ZAB = 90^\circ - \theta$ et $\angle BAC = \theta$.



Puisque $AZ = h$ et que le triangle ADZ est rectangle en D, alors $AD = AZ\cos(\angle DAZ)$, ou $AD = h\cos\theta$.
Puisque $AD = h\cos\theta$ et que le triangle DEA est rectangle en E, alors :

$$AE = AD\sin(\angle EDA) = (h\cos\theta)\sin\theta = h\cos\theta\sin\theta$$

Puisque $AZ = h$ et que le triangle ZBA est rectangle en B, alors $AB = AZ\sin(\angle AZB)$, ou $AB = h\sin\theta$.
Puisque $AB = h\sin\theta$ et que le triangle ACB est rectangle en C, alors :

$$AC = AB\cos(\angle BAC) = (h\sin\theta)\cos\theta = h\cos\theta\sin\theta$$

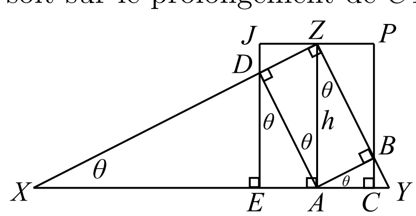
Donc $AE = AC$.

Solution 2

Soit $AZ = h$ et $\angle ZXY = \theta$.
Puisque le triangle XDE est rectangle en E, alors :

$$\angle XDE = 180^\circ - \angle DXE - \angle XED = 180^\circ - \theta - 90^\circ = 90^\circ - \theta$$

Puisque $\angle XDA = 90^\circ$, alors $\angle EDA = 90^\circ - \angle XDE$, d'où $\angle EDA = 90^\circ - (90^\circ - \theta)$, ou $\angle EDA = \theta$.
De même, $\angle EAD = 90^\circ - \theta$, $\angle DAZ = \theta$, $\angle DZA = 90^\circ - \theta$, $\angle AZB = \theta$, $\angle ZAB = 90^\circ - \theta$ et $\angle BAC = \theta$.
On construit un rectangle $JPCE$ de manière que le côté JP passe au point Z, J soit sur le prolongement de ED et P soit sur le prolongement de CB.



Les quadrilatères $ABZD$, $JZAE$ et $ZPCA$ sont des rectangles, car chacun a trois angles droits.
Donc $JZ = EA$. On montrera que $JZ = AC$, ce qui prouvera que $AE = AC$.
Puisque $ABZD$ est un rectangle, alors $AB = DZ$.
Puisque JZ est parallèle à AC et que DZ est parallèle à AB, alors $\angle JZD = \angle BAC$.
Puisque DJ est parallèle à CB et que DZ est parallèle à AB, alors $\angle JDZ = \angle CBA$.
Les triangles ZDJ et ABC sont donc isométriques (angle-côté-angle).
Donc $JZ = CA$, d'où $AE = JZ = AC$.

3. (a) Soit $x = \sqrt{a}$ une solution de l'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 1$, a étant un entier strictement positif quelconque. Puisque $\sqrt{a} \geq 1$, il existe un entier strictement positif n pour lequel $n \leq \sqrt{a} < n + 1$, d'où $\lfloor \sqrt{a} \rfloor = n$.

On reporte $x = \sqrt{a}$ et $n = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ dans l'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 1$ pour obtenir $(\sqrt{a})^2 = 3n+1$, ou $a = 3n + 1$.

On élève au carré chaque membre de l'inéquation $n \leq \sqrt{a} < n + 1$ pour obtenir $n^2 \leq a < (n + 1)^2$, ou $n^2 \leq a < n^2 + 2n + 1$. (Puisque $n > 0$, les inégalités sont conservées.)

Puisque $a = 3n + 1$ et $n^2 \leq a < n^2 + 2n + 1$, alors $n^2 \leq 3n + 1 < n^2 + 2n + 1$, d'où $n^2 - 3n - 1 \leq 0 < n^2 - n$.

Cette dernière inéquation est équivalente à « $n^2 - 3n - 1 \leq 0$ et $0 < n^2 - n$ ».

L'équation du second degré $n^2 - 3n - 1 = 0$ admet pour racines $\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$, ou environ $-0{,}303$ et $3{,}303$.

Pour que $n^2 - 3n - 1 \leq 0$, n doit être une valeur entre ces deux racines ou elle doit être égale à une des racines (puisque la représentation graphique de la fonction définie par $f(n) = n^2 - 3n - 1$ est une parabole ouverte vers le haut) ; puisque n est un entier, on peut réduire l'intervalle à $0 \leq n \leq 3$.

L'équation du second degré $n^2 - n = 0$ a pour racines $n = 0$ et $n = 1$.

Pour que $n^2 - n > 0$, n doit être une valeur à l'extérieur de l'intervalle entre les racines ; donc $n < 0$ ou $n > 1$.

On doit donc avoir $0 \leq n \leq 3$ et soit $n < 0$, soit $n > 1$.

Puisque n est un entier, alors $n = 2$ ou $n = 3$.

Si $n = 2$, alors $a = 3n + 1$ donne $a = 7$, ce qui est la solution donnée dans l'énoncé.

Si $n = 3$, alors $a = 3n + 1$ donne $a = 10$, ce qui est la solution que l'on cherche.

On peut vérifier : Si $x = \sqrt{10}$, alors $3 \leq x < 4$. Donc $3\lfloor x \rfloor + 1 = 3(3) + 1 = 10 = x^2$ et $x = \sqrt{10}$ vérifie donc l'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 1$.

La valeur de a est 10.

(b) Soit x un nombre réel tel que $\lfloor x \rfloor = n$.

Donc $n \leq x < n + 1$.

On élève chaque membre au carré pour obtenir $n^2 \leq x^2 < n^2 + 2n + 1$; puisque $n > 0$, les inégalités sont conservées.

Donc $n^2 - 3\lfloor x \rfloor \leq x^2 - 3\lfloor x \rfloor < n^2 + 2n + 1 - 3\lfloor x \rfloor$.

Puisque $\lfloor x \rfloor = n$, alors $n^2 - 3n \leq x^2 - 3\lfloor x \rfloor < n^2 + 2n + 1 - 3n$ ou $n^2 - 3n \leq x^2 - 3\lfloor x \rfloor < n^2 - n + 1$.

Puisque $x^2 - 3\lfloor x \rfloor$ est un entier, alors $n^2 - 3n \leq x^2 - 3\lfloor x \rfloor \leq n^2 - n$.

Donc, $x^2 - 3\lfloor x \rfloor$ doit égaler un des entiers $n^2 - 3n$ et $n^2 - n$ ou être situé entre eux.

Or, $x^2 - 3\lfloor x \rfloor$ peut prendre toutes ces valeurs en considérant $x = \sqrt{m}$ lorsque $m = n^2, n^2 + 1, \ldots, n^2 + 2n$.

(c) On remarque d'abord qu'étant donné un entier k, $k \geq 0$, tout nombre réel x qui est une solution de l'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + k^2 - 1$ est de la forme $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, a étant un entier non négatif. En effet, si x est une solution, alors le membre de droite $3\lfloor x \rfloor + k^2 - 1$ est un entier. Donc, x^2 est un entier qui doit être non négatif, disons $x^2 = a$. Donc $x = \pm\sqrt{a}$.

On examinera quatre cas : $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et $k \geq 3$.

Tout au long de la solution, a représentera toujours un entier non négatif et n représentera toujours un entier.

<u>1er cas : $k = 0$</u>
On résout l'équation $x^2 = 3\lfloor x\rfloor - 1$.
On cherche d'abord des solutions de la forme $x = \sqrt{a}$, $a \geq 0$.
Puisque $x \geq 0$, alors $n \leq \sqrt{a} < n+1$, n étant un entier non négatif. Donc $\lfloor x\rfloor = \lfloor\sqrt{a}\rfloor = n$.
Puisque $x = \sqrt{a}$ est une solution, alors $(\sqrt{a})^2 = 3n - 1$, ou $a = 3n - 1$.
Puisque $n \leq \sqrt{a} < n + 1$ et $n > 0$, alors $n^2 \leq a < n^2 + 2n + 1$.
Donc $n^2 \leq 3n - 1 < n^2 + 2n + 1$, d'où $n^2 - 3n + 1 \leq 0$ et $n^2 - n + 2 > 0$.
L'équation $n^2 - 3n + 1 = 0$ a pour racines $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, ou approximativement 0,382 et 2,618.
Les solutions de l'inéquation $n^2 - 3n + 1 \leq 0$ sont les valeurs de n telles que $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leq n \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (valeurs de n entre les racines).
Puisque n est un entier tel que $n^2 - 3n + 1 \leq 0$, alors $1 \leq n \leq 2$.
L'équation $n^2 - n + 2 = 0$ n'admet aucune racine réelle et la parabole correspondante est située au-dessus de l'axe des abscisses. Donc, n vérifie l'inéquation $n^2 - n + 2 > 0$.
Les entiers n qui vérifient les inéquation $n^2 - 3n + 1 \leq 0$ et $n^2 - n + 2 > 0$ sont donc $n = 1$ et $n = 2$.
Lorsque $n = 1$, on a $a = 3(1) - 1$, ou $a = 2$. Donc, $x = \sqrt{2}$ est une solution de l'équation.
Lorsque $n = 2$, on a $a = 3(2) - 1$, ou $a = 5$. Donc, $x = \sqrt{5}$ est une solution de l'équation.
On cherche maintenant les solutions de la forme $x = -\sqrt{a}$, $a > 0$.
Puisque $x < 0$, alors $n \leq -\sqrt{a} < n + 1$, n étant un entier strictement négatif.
Donc $\lfloor x\rfloor = \lfloor -\sqrt{a}\rfloor = n$.
Puisque $x = -\sqrt{a}$ est une solution, alors $(-\sqrt{a})^2 = 3n - 1$, ou $a = 3n - 1$.
Puisque $n \leq -\sqrt{a} < n + 1$ et $n < 0$, alors $n^2 \geq a > n^2 + 2n + 1$.
Donc $n^2 \geq 3n - 1 > n^2 + 2n + 1$, d'où $n^2 - 3n + 1 \geq 0$ et $n^2 - n + 2 < 0$.
L'équation $n^2 - n + 2 = 0$ n'admet aucune racine réelle et la parabole correspondante est située au-dessus de l'axe des abscisses. Donc, aucun entier n ne vérifie l'inéquation $n^2 - n + 2 < 0$.
Il n'y a donc aucun entier n qui vérifie les deux inéquations $n^2 - 3n + 1 \geq 0$ et $n^2 - n + 2 < 0$ et il n'y a donc aucune solution de la forme $x = -\sqrt{a}$.
Lorsque $k = 0$, les solutions sont donc $x = \sqrt{2}$ et $x = \sqrt{5}$.

<u>2e cas : $k = 1$</u>
On résout l'équation $x^2 = 3\lfloor x\rfloor$.
On cherche d'abord des solutions de la forme $x = \sqrt{a}$, où $\lfloor x\rfloor = \lfloor\sqrt{a}\rfloor = n$, n étant un entier non négatif.
On procède comme dans le 1er cas pour obtenir $a = 3n$ et les inéquations $n^2 - 3n \leq 0$ et $n^2 - n + 1 > 0$.
La première inéquation a pour solutions entières $n = 0, 1, 2, 3$ et la deuxième inéquation est vérifiée par tous les entiers n.
En utilisant $n = 0, 1, 2, 3$, on obtient les solutions $x = \sqrt{0}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}$, ou $x = 0, \sqrt{3}, \sqrt{6}, 3$.
On cherche maintenant les solutions de la forme $x = -\sqrt{a}$, où $a > 0$ et $\lfloor x\rfloor = \lfloor -\sqrt{a}\rfloor = n$.
On procède comme dans le 1er cas pour obtenir $a = 3n$ et les inéquations $n^2 - 3n \geq 0$ et $n^2 - n + 1 < 0$.
L'inéquation $n^2 - n + 1 < 0$ n'est vérifiée par aucun entier n. Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.
Lorsque $k = 1$, les solutions sont $x = 0, \sqrt{3}, \sqrt{6}, 3$.

3e cas : $k = 2$
On résout l'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 3$.
On cherche d'abord des solutions de la forme $x = \sqrt{a}$, où $\lfloor x \rfloor = \lfloor \sqrt{a} \rfloor = n$, n étant un entier non négatif.
On procède comme dans le cas précédent pour obtenir $a = 3n + 3$ et les inéquations $n^2 - 3n - 3 \leq 0$ et $n^2 - n - 2 > 0$.
La première inéquation a pour solutions entières $n = 0, 1, 2, 3$ et la deuxième inéquation est vérifiée par les valeurs de n pour lesquelles $n < -1$ ou $n > 2$.
Seul $n = 3$ vérifie les deux inéquations.
Lorsque $n = 3$, on a $a = 3(3)+3$, ou $a = 12$. Donc, $x = \sqrt{12}$ est une solution de l'équation.
On cherche maintenant les solutions de la forme $x = -\sqrt{a}$, où $a > 0$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor -\sqrt{a} \rfloor = n$.
On procède comme dans le cas précédent pour obtenir $a = 3n + 3$ et les inéquations $n^2 - 3n - 3 \geq 0$ et $n^2 - n - 2 < 0$.
L'inéquation $n^2 - n - 2 < 0$ n'est vérifiée par aucun entier n (puisque ses solutions réelles vérifient $-1 < n < 2$). Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.
Donc lorsque $k = 2$, la solution est $x = \sqrt{12}$.

4e cas : $k \geq 3$
On résout l'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + (k^2 - 1)$.
On cherche d'abord des solutions de la forme $x = \sqrt{a}$, où $\lfloor x \rfloor = \lfloor \sqrt{a} \rfloor = n$, n étant un entier non négatif.
On procède comme dans le cas précédent pour obtenir $a = 3n + (k^2 - 1)$ et les inéquations $n^2 - 3n - (k^2 - 1) \leq 0$ et $n^2 - n - (k^2 - 2) > 0$.
On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(n) = n^2 - 3n - (k^2 - 1) \qquad g(n) = n^2 - n - (k^2 - 2)$$

On remarque $k^2 - 1 > 0$ et $k^2 - 2 > 0$, puisque $k \geq 3$.
Pour chaque fonction, le premier coefficient du trinôme qui les définit est positif et le troisième coefficient est négatif. Chaque fonction admet donc un zéro positif et un zéro négatif.
L'ensemble des solutions entières de l'inéquation $n^2 - 3n - (k^2 - 1) \leq 0$ est donc défini par une inéquation de la forme $C \leq n \leq D$, C et D étant des entiers quelconques tels que $C \leq 0 \leq D$. (L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $n^2 - 3n - (k^2 - 1) \leq 0$ est défini par une inéquation de la forme $c \leq n \leq d$, c et d étant des nombres réels tels que $c < 0 < d$. Lorsqu'on restreint l'ensemble des solutions aux entiers, l'ensemble des solutions entières est défini par l'inéquation $C \leq n \leq D$, où $C \leq 0 \leq D$, C étant le plus petit entier supérieur à c et D étant le plus grand entier inférieur à d.)
L'ensemble des solutions entières de l'inéquation $n^2 - n - (k^2 - 2) > 0$ sera défini par les inéquations $n \leq E$ ou $n \geq F$, E et F étant des entiers tels que $E < 0 < F$. (L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $n^2 - n - (k^2 - 2) > 0$ est défini par les inéquations $n < e$ ou $n > f$, e et f étant des nombres réels $e < 0 < f$. Lorsqu'on restreint l'ensemble des solutions aux entiers, l'ensemble des solutions entières est défini par les inéquations $n \leq E$ ou $n \geq F$, E étant le plus grand entier inférieur à e et F étant le plus petit entier supérieur à f.)
Puisqu'on n'examine que le cas $n \geq 0$, les entiers n qui vérifient les inéquations sont de la forme $0 \leq n \leq D$ et $n \geq F$.
On sait que $n = k+1$ vérifie les deux inéquations, que $n = k+2$ ne vérifie pas la première inéquation (d'où $D = k + 1$) et que $n = k$ ne vérifie pas la deuxième inéquation (d'où $F = k + 1$). Donc, $n = k + 1$ est le seul entier strictement positif qui satisfait à ces

restrictions. Or :

$$\begin{aligned} f(k+1) &= (k+1)^2 - 3(k+1) - (k^2-1) = k^2+2k+1-3k-3-k^2+1 = -k-1 < 0 \\ f(k+2) &= (k+2)^2 - 3(k+2) - (k^2-1) = k^2+4k+4-3k-6-k^2+1 = k-1 > 0 \\ g(k+1) &= (k+1)^2 - (k+1) - (k^2-2) = k^2+2k+1-k-1-k^2+2 = k+2 > 0 \\ g(k) &= k^2 - k - (k^2-2) = -k+2 < 0 \end{aligned}$$

(Dans chaque cas, la dernière inégalité provient de $k \geq 3$.)
Donc, $n = k+1$ est le seul entier strictement positif qui satisfait aux inéquations.
Puisque $n = k+1$, alors $a = 3n + (k^2-1) = 3(k+1) + (k^2-1) = k^2+3k+2$, d'où $x = \sqrt{a} = \sqrt{k^2+3k+2}$.

On cherche maintenant les solutions de la forme $x = -\sqrt{a}$, $a > 0$, et $\lfloor x \rfloor = \lfloor -\sqrt{a} \rfloor = n$, $n < 0$.
On procède comme dans le cas précédent pour obtenir $a = 3n + (k^2-1)$ et les inéquations $n^2 - 3n - (k^2-1) \geq 0$ et $n^2 - n - (k^2-2) < 0$.
En imitant ce qu'on a fait lorsque $n \geq 0$, on obtient que les solutions de la première inéquation vérifient « $n \leq G$ ou $n \geq H$ », G et H étant des entiers tels que $G < 0 < H$ et que les solutions de la deuxième inéquation vérifient $J \leq n \leq L$, J et L étant des entiers tels que $J \leq 0 \leq L$.
Puisqu'on considère le cas où $n < 0$, alors l'ensemble des solutions n qui vérifient les deux inéquations est l'ensemble des entiers qui vérifient $n \leq G$ et $J \leq n < 0$.
On montre que $n = -k+1$ vérifie les deux inéquations, que $n = -k+2$ ne vérifie pas la première inéquation (d'où $G = -k+1$) et que $n = -k$ ne vérifie pas la deuxième inéquation (d'où $J = -k+1$). Donc $n = -k+1$ est la seule solution négative possible.
Or :

$$\begin{aligned} f(-k+1) &= (-k+1)^2 - 3(-k+1) - (k^2-1) = k-1 > 0 \\ f(-k+2) &= (-k+2)^2 - 3(-k+2) - (k^2-1) = -k-1 < 0 \\ g(-k+1) &= (-k+1)^2 - (-k+1) - (k^2-2) = -k+2 < 0 \\ g(k) &= (-k)^2 - (-k) - (k^2-2) = k+2 > 0 \end{aligned}$$

(Dans chaque cas, la dernière inégalité provient de $k \geq 3$.)
Donc, $n = -k+1$ est le seul entier strictement négatif qui vérifie les deux inéquations.
Puisque $n = -k+1$, alors $a = 3n + (k^2-1) = 3(-k+1) + (k^2-1) = k^2-3k+2$, d'où $x = -\sqrt{a} = -\sqrt{k^2-3k+2}$.

Donc dans le cas où $k \geq 3$, les solutions sont $x = \sqrt{k^2+3k+2}$ et $x = -\sqrt{k^2-3k+2}$.

Les solutions sont résumées dans le tableau suivant :

	x
$k=0$	$\sqrt{2}, \sqrt{5}$
$k=1$	$0, \sqrt{3}, \sqrt{6}, 3$
$k=2$	$\sqrt{12}$
$k \geq 3$	$\sqrt{k^2+3k+2},\ -\sqrt{k^2-3k+2}$