Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
*cemc.uwaterloo.ca*

# *Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur*

***le jeudi 20 novembre 2014***
***(Amérique du Nord et Amérique du Sud)***

***le vendredi 21 novembre 2014***
***(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)***

UNIVERSITY OF WATERLOO

**Durée :** 2 heures 

**L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.**

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

**PARTIE A**

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

**PARTIE B**

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.**

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

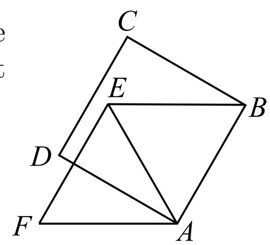
## *Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur*

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que $4\pi$ et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 ... ou 4,646 ...
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

# PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré, le triangle $ABE$ est équilatéral et le triangle $AEF$ est équilatéral. Quelle est la mesure de l'angle $DAF$ ?




2. Le rapport du nombre de pièces de 10 ¢ au nombre de pièces de 25 ¢ dans un bocal est de 3 : 2. Sachant que ces pièces ont une valeur totale de 4 \$, combien y a-t-il de pièces de 10 ¢ dans le bocal ?

   (1 \$ vaut 100 ¢.)

3. Les entiers positifs $m$ et $n$ vérifient l'équation $mn = 5000$. Sachant que $m$ n'est *pas* divisible par 10 et que $n$ n'est *pas* divisible par 10, quelle est la valeur de $m+n$ ?

4. Une fonction $f$ vérifie $f(x) + f(x+3) = 2x+5$ pour toutes les valeurs de $x$. Sachant que $f(8) + f(2) = 12$, déterminer la valeur de $f(5)$.

5. Déterminer tous les nombres réels $x$ pour lesquels $\sqrt[3]{(2+x)^2} + 3\sqrt[3]{(2-x)^2} = 4\sqrt[3]{4-x^2}$.

6. Dix casiers sont alignés. Ils sont numérotés, en ordre, de 1 à 10, chaque numéro étant un entier. Chaque casier sera peint en bleu, en rouge ou en vert selon les règles suivantes :

   - Deux casiers, numérotés $m$ et $n$, sont peints de couleurs différentes lorsque $m-n$ est impair.
   - Il n'est pas nécessaire d'utiliser les 3 couleurs.

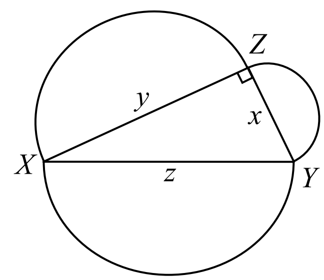
   De combien de façons peut-on peindre l'ensemble des casiers ?

## PARTIE B

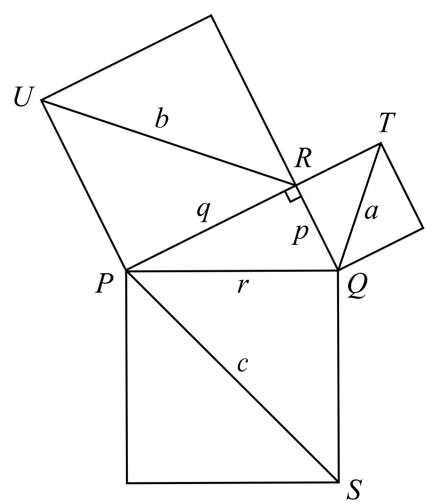
Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Une *suite arithmétique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, 5, 7, 9 est une suite arithmétique de trois termes.
   (a) Il est possible de choisir trois des cinq nombres 2, 5, 10, 13 et 15 de manière à former une suite arithmétique de trois termes. Quels sont les trois nombres ?
   (b) Les nombres $p$, 7, $q$, 13, dans cet ordre, forment une suite arithmétique de quatre termes. Déterminer la valeur de $p$ et la valeur de $q$.
   (c) Les nombres $a$, $b$, $c$, $(a+21)$, dans cet ordre, forment une suite arithmétique de quatre termes. Déterminer la valeur de $c-a$.
   (d) Les nombres $(y-6)$, $(2y+3)$, $(y^2+2)$, dans cet ordre, forment une suite arithmétique de trois termes. Déterminer toutes les valeurs possibles de $y$.

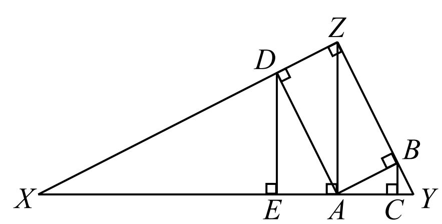
2. (a) (i) Dans la figure ci-contre, des demi-cercles sont tracés sur les côtés du triangle rectangle $XYZ$. Sachant que le demi-cercle de diamètre $YZ$ a une aire de $50\pi$ et que le demi-cercle de diamètre $XZ$ a une aire de $288\pi$, déterminer l'aire du demi-cercle de diamètre $XY$.




   (ii) Dans la figure ci-contre, des carrés dont les côtés ont pour longueurs respectives $p$, $q$ et $r$ sont tracés sur les côtés du triangle rectangle $PQR$. Les diagonales $QT$, $RU$ et $PS$ ont pour longueurs respectives $a$, $b$ et $c$. Démontrer qu'un triangle dont les côtés ont pour longueurs $a$, $b$ et $c$ est un triangle rectangle.




   (b) Dans la figure ci-contre, le triangle $XYZ$ est rectangle en $Z$ et $AZ$ est la hauteur du triangle menée au sommet $Z$ jusqu'au côté $XY$. Les segments $AD$ et $AB$ sont des hauteurs respectives des triangles $AXZ$ et $AYZ$ et les segments $DE$ et $BC$ sont des hauteurs respectives des triangles $ADX$ et $ABY$. Démontrer que $AE = AC$.



3. Étant donné un nombre réel $x$, $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Par exemple, $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$ et $\lfloor -2{,}4 \rfloor = -3$. En d'autres mots, $\lfloor x \rfloor$ est l'entier qui vérifie l'inéquation $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

   (a) L'équation $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + 1$ admet deux solutions. Une solution est $x = \sqrt{7}$. La deuxième solution est de la forme $x = \sqrt{a}$, $a$ étant un entier strictement positif quelconque. Déterminer la valeur de $a$.

   (b) Pour chaque entier strictement positif $n$, déterminer toutes les valeurs entières possibles de l'expression $x^2 - 3\lfloor x \rfloor$, $x$ étant un nombre réel tel que $\lfloor x \rfloor = n$.

   (c) Pour chaque entier $k$ tel que $k \geq 0$, déterminer tous les nombres réels $x$ pour lesquels $x^2 = 3\lfloor x \rfloor + (k^2 - 1)$.