Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2014

le jeudi 20 novembre 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 novembre 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisqu'il y a 200 personnes sur la plage et que 65 % de ces personnes sont des enfants, il y a $\frac{65}{100} \times 200$ enfants, ou 65×2 enfants, ou 130 enfants sur la plage.
Puisque 40 % des 130 enfants se baignent, il y a $\frac{40}{100} \times 130$ enfants, ou $0{,}4 \times 130$ enfants, ou 52 enfants qui se baignent.

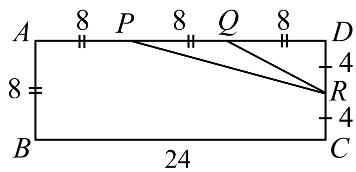
Réponse : 52

2. *Solution 1*
Puisque $x + 2y = 14$ et $y = 3$, alors : $2x + 3y = (2x + 4y) - y = 2(x + 2y) - y = 2(14) - 3 = 25$.

Solution 2
Puisque $x + 2y = 14$ et $y = 3$, alors $x = 14 - 2y$, d'où $x = 14 - 2(3)$, ou $x = 8$.
Donc $2x + 3y = 2(8) + 3(3)$, ou $2x + 3y = 25$.

Réponse : 25

3. *Solution 1*
Puisque $ABCD$ est un rectangle et $BC = 24$, alors $AD = 24$.
Puisque AD est divisé en trois parties égales ($AP = PQ = QD$), alors chaque partie a une longueur de $24 \div 3$, ou 8.
Donc $AB = AP = PQ = QD = 8$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle et $AB = 8$, alors $DC = 8$.
Puisque R est le milieu de DC, alors $DR = \frac{1}{2}(8)$, ou $DR = 4$.



DR est la hauteur qui correspond à la base PQ du triangle PQR, car elle est perpendiculaire au prolongement PD de la base.
L'aire du triangle PQR est donc égale à $\frac{1}{2}(PQ)(DR)$, ou $\frac{1}{2}(8)(4)$, ou 16.

Solution 2
Comme dans la Solution 1, on détermine que $AB = AP = PQ = QD = 8$ et $DR = 4$.
Or, l'aire du triangle PQR est égale à l'aire du triangle PDR moins celle du triangle QDR.
Chacun de ces triangles est rectangle en D.
Dans le triangle PDR, on a $DR = 4$ et $PD = 8 + 8$, ou $PD = 16$. Le triangle a donc une aire de $\frac{1}{2}(16)(4)$, ou 32.
Dans le triangle QDR, on a $DR = 4$ et $QD = 8$. Le triangle a donc une aire de $\frac{1}{2}(8)(4)$, ou 16.
L'aire du triangle PQR est donc égale à $32 - 16$, ou 16.

Réponse : 16

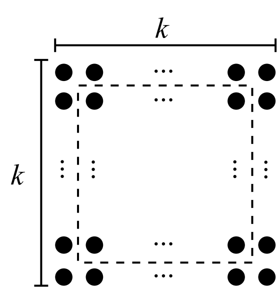
4. La profondeur initiale de la neige à Kingston est de 12,1 cm et il neige à un taux constant de 2,6 cm par heure. Après 13 heures, la profondeur de la neige est de $(12{,}1 + 2{,}6(13))$ cm à Kingston.
La profondeur initiale de la neige à Hamilton est de 18,6 cm et il neige à un taux constant de x cm par heure. Après 13 heures, la profondeur de la neige est de $(18{,}6 + 13x)$ cm à Hamilton.
Puisque la profondeur de la neige est la même dans les deux villes après 13 heures, on a :

$$\begin{aligned} 12{,}1 + 2{,}6(13) &= 18{,}6 + 13x \\ 45{,}9 &= 18{,}6 + 13x \\ 13x &= 27{,}3 \\ x &= 2{,}1 \end{aligned}$$

Donc $x = 2{,}1$.

Réponse : 2,1

5. *Solution 1*
On suppose qu'il s'agit d'une pyramide à n couches.
Dans chaque couche, les balles qui font partie d'une face triangulaire de la pyramide sont les balles qui forment le pourtour de la couche.
Dans chaque couche, les balles qui ne font pas partie du pourtour ne font pas partie d'une face triangulaire de la pyramide.
La couche du dessus a pour dimensions 1×1. La balle qui la forme fait partie des faces triangulaires de la pyramide.
La couche suivante a pour dimensions 2×2. Les 4 balles qui la forment font partie des faces triangulaires de la pyramide.
La couche suivante a pour dimensions 3×3. Il y a une balle, au milieu de cette couche, qui ne fait pas partie d'une face triangulaire de la pyramide.
La couche suivante a pour dimensions 4×4. Au milieu de cette couche, il y a un carré 2×2 de balles qui ne font pas partie des faces triangulaires de la pyramide.
Dans une couche $k \times k$ $(k > 2)$, il y a un carré $(k-2) \times (k-2)$ de balles qui ne font pas partie des faces triangulaires de la pyramide.



Le nombre total de balles qui forment la pyramide de n couches est égal à :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$$

Le nombre de balles qui ne font pas partie des faces triangulaires de la pyramide est égal à :

$$0 + 0 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-4)^2 + (n-3)^2 + (n-2)^2$$

Le nombre de balles qui font partie des faces triangulaires de la pyramide est égal à la différence de ces deux sommes, soit :

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2) - (0 + 0 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-4)^2 + (n-3)^2 + (n-2)^2)$$

Cette expression est égale à $(n-1)^2 + n^2$, puisque les $(n-2)$ premiers termes de la première parenthèse sont annulés par les membres de la deuxième parenthèse.
On cherche la valeur de n pour laquelle une pyramide de n couches pour laquelle les faces triangulaires sont formées d'exactement 145 balles.
On cherche donc la valeur de n pour laquelle $(n-1)^2 + n^2 = 145$.
Lorsque $n = 9$, on a $(n-1)^2 + n^2 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$.
(On cherche deux carrés consécutifs dont la somme est égale à 145. À partir des carrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 et 81, on voit que les carrés sont 64 et 81 et que n est donc égal à 9.)
La pyramide a donc 9 couches.
(On remarque que lorsque $n > 2$ et que n augmente, chacun des termes $(n-1)^2$ et n^2 augmente. Donc $(n-1)^2 + n^2$ augmente, ce qui indique qu'il n'y a qu'une valeur possible de n.)

Solution 2
On suppose qu'il s'agit d'une pyramide à n couches.
Chacune des faces triangulaires de la pyramide compte n rangées de balles de golf. Il y a 1 balle dans la rangée du haut, 2 balles dans la rangée suivante et ainsi de suite, et n dans la rangée du bas.
Donc, chaque face compte $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ balles, ou $\frac{1}{2}n(n+1)$ balles.
La balle du dessus, dans la pyramide, est comptée dans chacune des quatre faces.
Chaque autre balle qui est placée le long d'une arête entre deux faces triangulaires est comptée dans deux faces. Il y a $n-1$ telles balles sur chaque arête.
Pour déterminer le nombre de balles sur les quatre faces triangulaires de la pyramide en fonction de n :

- on multiplie le nombre de balles sur chaque face par 4,
- on soustrait 3, car la balle du dessus de la pyramide a été comptée quatre fois, alors qu'elle n'y est qu'une fois et
- on soustrait $4 \times (n-1)$, car chaque balle sur les arêtes, à l'exception de celle du haut, a été comptée deux fois au lieu d'une.

Donc, le nombre de balles sur les quatre faces triangulaires de la pyramide est égal à :

$$4\left(\tfrac{1}{2}n(n+1)\right) - 3 - 4(n-1) = 2n(n+1) - 3 - 4n + 4 = 2n^2 + 2n - 3 - 4n + 4 = 2n^2 - 2n + 1$$

Pour que le nombre de balles qui forment les 4 faces triangulaires de la pyramide soit égal à 145, on a :

$$\begin{aligned} 2n^2 - 2n + 1 &= 145 \\ 2n^2 - 2n - 144 &= 0 \\ n^2 - n - 72 &= 0 \\ (n-9)(n+8) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $n = 9$ ou $n = -8$.
Puisque $n > 0$, alors $n = 9$. Il y a donc 9 couches.

Solution 3

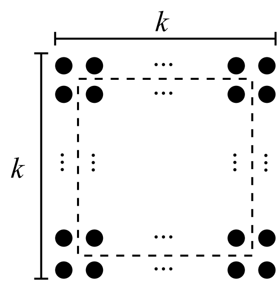
On compte le nombre de balles, dans chaque couche, qui forment les faces triangulaires de la pyramide.

La couche du haut est formée de 1×1 balle, ou 1 balle. Cette balle fait partie des balles qui forment les faces triangulaires.

La couche suivante est formée de 2×2 balles, ou 4 balles. Ces 4 balles font partie des balles qui forment les faces triangulaires.

La couche suivante est formée de 3×3 balles, ou 9 balles. Seule la balle du milieu ne fait pas partie des balles qui forment les faces triangulaires. Donc, 8 balles font partie des balles qui forment les faces triangulaires.

De façon générale, si une couche carrée contient $k \times k$ balles, $k > 2$, combien de ces balles forment les faces triangulaires de la pyramide ?



Les balles sur le pourtour du carré forment les faces triangulaires de la pyramide. Combien y en a-t-il ?

On compte d'abord les balles sur deux côtés opposés. Cela fait $(k + k)$ balles, ou $2k$ balles.

Sur chacun des deux autres côtés, il reste $k - 2$ balles, car les balles sur les coins ont déjà été comptées.

En tout, $(k + k + (k - 2) + (k - 2))$ balles, ou $4k - 4$ balles sur cette couche forment les faces triangulaires de la pyramide.

On utilise un tableau qui tient compte du numéro de la couche, à partir du haut, du nombre de balles sur le pourtour de la couche et du total cumulé de balles qui forment les faces triangulaires. On s'arrête lorsqu'on obtient un total de 145 balles :

Couche	N^{bre} de balles sur le pourtour	Total cumulé
1	1	1
2	4	5
3	8	13
4	12	25
5	16	41
6	20	61
7	24	85
8	28	113
9	32	145

La pyramide a donc 9 couches.

Réponse : 9 couches

6. Soit N le plus grand entier positif qui satisfait aux deux conditions.
On montre que $N = 619737131179$ en procédant par les étapes suivantes.

(i) Les chiffres de N, après le premier, doivent être 1, 3, 7 ou 9 :

Chaque paire de chiffres adjacents de N doit former un nombre premier.
Chaque nombre premier de deux chiffres est impair. Si un entier de deux chiffre finissait par un chiffre pair, il serait divisible par 2. S'il finissait par un 5, il serait divisible par 5.
Donc chaque paire de chiffres adjacents de N doit former un nombre premier de deux chiffres qui se termine par 1, 3, 7 ou 9 et chaque chiffre de N, après le premier, doit être le chiffre des unités d'un nombre premier de deux chiffres.
Donc, les chiffres de N, après le premier, doivent être 1, 3, 7 ou 9.

(ii) Lorsqu'on écrit une liste des nombres premiers de deux chiffres formés par les paires de chiffres adjacents de N, chaque nombre à l'exception du premier est composé des chiffres 1, 3, 7 ou 9 :

Il en est ainsi, car tous les chiffres de N, après le premier, doivent être impairs.
N'ayant pas discuté du premier nombre premier généré à partir des chiffres de N, on ne peut tirer la même conclusion à son égard.

(iii) Il existe 10 nombres premiers de deux chiffres formés à partir des chiffres 1, 3, 7 ou 9 :

Il s'agit de $11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97$.

(iv) N doit admettre au plus 12 chiffres :

Le nombre de chiffres de N est 1 de plus que le nombre de nombres premiers générés à partir des chiffres de N, puisque chaque nombre, sauf le dernier, commence par un chiffre de N.
Le nombre de nombre premiers formés est au plus égal à 1 de plus que le nombre de nombres premiers formés à partir des chiffres 1, 3, 7 ou 9, puisque chaque nombre premier, à l'exception du premier, doit satisfaire à cette propriété.
Puisqu'il y a 10 nombres premiers qui satisfont à cette propriété, il y a au plus 11 nombres premiers dans la liste. N admet donc au plus 12 chiffres.

(v) Pour que N admette 12 chiffres, tous les 10 nombres premiers formés à partir des chiffres 1, 3, 7 ou 9 doivent faire partie de la liste générée à partir des chiffres de N :

Si ce n'était pas le cas, alors selon (iv), N admettrait moins de 12 chiffres.

(vi) Pour que tous les 10 nombres premiers de deux chiffres formés à partir des chiffres 1, 3, 7 ou 9 fassent partie de la liste générée à partir des chiffres de N, le deuxième chiffre de N doit être 1 et le dernier doit être 9 :

Ces 10 nombres premiers forment la liste au complet, à l'exception du premier de la liste.
Donc, ces nombres premiers sont générés par tous les chiffres de N, à l'exception du premier chiffre.
On tente de placer ces 10 nombres premiers dans un ordre qui permettra au deuxième chiffre d'un nombre de devenir le premier chiffre du nombre suivant, de manière que tous ces nombres premiers puissent être générés par les 11 chiffres.
Des 10 nombres premiers :

– 4 nombres commencent par un 1 et 3 nombres se terminent par un 1
– 2 nombres commencent par un 3 et 2 nombres se terminent par un 3
– 3 nombres commencent par un 7 et 3 nombres se terminent par un 7
– 1 nombre commence par un 9 et 2 nombres se terminent par un 9

Donc, le premier chiffre des 10 nombres de la liste est un 1 (puisqu'un des 4 nombres qui commencent par un 1 ne pourra pas être apparié avec un des 3 nombres qui se terminent par un 1) et le dernier chiffre est un 9 (puisqu'un des 2 nombres qui se terminent par un 9 ne pourra pas être apparié avec le nombre qui commence par un 9).
(On remarque qu'il y a autant de nombres qui commencent par un 3 que de nombres qui se terminent pas un 3. Il en est de même pour le chiffre 7.)
Donc, N est de la forme $\_1\_\_\_\_\_\_\_\_\_9$.

(vii) Si N admet 12 chiffres, alors N est de la forme $6\,1\_\_\_\_\_\_\_\_\_9$:

Pour que N soit le plus grand nombre de 12 chiffres possible, il faut que son premier chiffre soit aussi grand que possible.
Puisque les deux premiers chiffres de N, $\_1$, doivent former un nombre premier de deux chiffres, ce nombre pourrait être 11, 31, 41, 61, ou 71 (21, 51, 81 et 91 ne sont pas premiers).
Puisque 71 sera utilisé dans la liste des 10 nombres premiers suivants, alors 71 ne peut être utilisé au début. Il faut donc utiliser 61 pour que N soit aussi grand que possible.
Donc, N est de la forme $6\,1\_\_\_\_\_\_\_\_\_9$.

(viii) $N = 619737131179$

Pour maximiser N, on choisit le plus grand nombre premier qui commence par un 1, soit 19. Le 3[e] chiffre est donc 9. Le seul nombre premier qui commence par un 9 est 97. Le 4[e] chiffre est donc un 7.
On a alors $6\,1\,9\,7\_\_\_\_\_\_\_9$.
Il ne reste qu'un nombre premier qui se termine par un 9 (soit 79). Donc, l'avant dernier chiffre doit être un 7, ce qui donne $6\,1\,9\,7\_\_\_\_\_\_7\,9$.
Le plus grand nombre premier qui reste commençant par un 7 est 73. On choisit donc 3 comme 5[e] chiffre, ce qui donne $6\,1\,9\,7\,3\_\_\_\_\_7\,9$.
Le plus grand nombre premier qui reste commençant par un 3 est 37. On choisit donc 7 comme 6[e] chiffre, ce qui donne $6\,1\,9\,7\,3\,7\_\_\_\_7\,9$.
Le seul nombre premier qui reste commençant par un 7 est 71. On choisit donc 1 comme 7[e] chiffre, ce qui donne $6\,1\,9\,7\,3\,7\,1\_\_\_7\,9$.
On a utilisé les nombres premiers 19, 97, 73, 37, 71 et 79. Il reste donc 11, 13, 17 et 31 dans la liste.
Le seul nombre premier qui reste qui se termine par un 7 est 17. Donc, le 3[e] chiffre de la fin est un 1, ce qui donne $6\,1\,9\,7\,3\,7\,1\_\_1\,7\,9$.
Le plus grand nombre premier qui reste commençant par un 1 est 13. Donc, le 8[e] chiffre est un 3, ce qui donne $6\,1\,9\,7\,3\,7\,1\,3\_1\,7\,9$.
Le seul chiffre que l'on peut placer dans la 9[e] position est un 1, ce qui forme les nombres premiers 31 et 11. On a donc $6\,1\,9\,7\,3\,7\,1\,3\,1\,1\,7\,9$.

On a construit cet entier avec le plus grand nombre de chiffres possibles de manière que les plus grands chiffres prennent les plus grandes valeurs possibles. N est le plus grand entier positif qui satisfait aux deux conditions.
Donc $N = 619737131179$.

Réponse : $N = 619737131179$

Partie B

1. (a) La moyenne des six entiers est égale à $\dfrac{22+23+23+25+26+31}{6}$, ou $\dfrac{150}{6}$, ou 25.

   (b) Puisque les trois nombres, $y+7$, $2y-9$ et $8y+6$ ont une moyenne de 27, ils ont une somme de 3(27), ou 81.
   Donc $(y+7)+(2y-9)+(8y+6)=81$, d'où $11y+4=81$. Donc $11y=77$, ou $y=7$.

   (c) Puisque les quatre entiers ont une moyenne de 94, ils ont une somme de 4(94), ou 376.
   Si la moyenne ne change pas, la somme est la même et si un entier a la plus petite valeur possible, les trois autres doivent avoir la plus grande valeur possible.
   On peut aussi le voir de façon algébrique. Soit a, b, c et d les entiers, a étant le plus petit.
   Puisque $a+b+c+d=376$, alors $a=376-b-c-d$.
   Pour que a soit aussi petit que possible, il faut soustraire le plus possible de 376.
   Puisque chacun des quatre entiers est inférieur à 100, leur plus grande valeur possible est 99.
   Pour rendre un des entiers le plus petit possible, on attribue à chacun des trois autres la valeur de 99.
   Le plus petit entier possible est égal à $376-3(99)$, ou $376-297$, ou 79.

2. (a) Puisque le triangle PQR est rectangle en R, alors d'après le théorème de Pythagore, $PR^2+RQ^2=PQ^2$.
   Puisque $RQ=24$ et $PQ=25$, alors $PR^2=25^2-24^2$, ou $PR^2=625-576$, ou $PR^2=49$.
   Puisque $PR>0$, alors $PR=7$.
   Le triangle PQR a donc un périmètre de $7+24+25$, ou 56.
   Puisque le triangle PQR est rectangle en R, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PR)(RQ)$, ou $\frac{1}{2}(7)(24)$, ou $\frac{1}{2}(168)$, ou 84.

   (b) Puisque le triangle ABC a un périmètre de 144 et des côtés de longueurs a, b et c, alors $a+b+c=144$.
   Puisque le triangle ABC est rectangle en C et qu'il a une aire de 504, alors
   $\frac{1}{2}(CB)(AC)=504$, d'où $\frac{1}{2}ab=504$, ou $ab=1008$.
   Puisque $a+b+c=144$, alors :

$$\begin{array}{rcll}
a+b &=& 144-c & \\
(a+b)^2 &=& (144-c)^2 & \text{(on a élevé chaque membre au carré)} \\
a^2+2ab+b^2 &=& c^2-288c+144^2 & \text{(on a développé)} \\
(a^2+b^2)+2ab &=& c^2-288c+144^2 & \\
2ab &=& -288c+144^2 & \text{(puisque } a^2+b^2=c^2\text{)} \\
2(1008) &=& -288c+144^2 & \text{(puisque } ab=1008\text{)} \\
288c &=& 144^2-2(1008) & \\
144(2c) &=& 144^2-2(7)(144) & \\
2c &=& 144-2(7) & \\
c &=& 65 &
\end{array}$$

   On a donc $c=65$.
   (Puisque $c=65$, on a $a+b+c=144$, d'où $a+b=79$. Puisque $ab=1008$, on peut résoudre ces deux dernières équations pour obtenir $a=16$ et $b=63$ ou $a=63$ et $b=16$. On peut vérifier que $16^2+63^2=65^2$ et que le triangle est bien rectangle.)

3. (a) La liste initiale de Véro contient 1 chiffre 0, 0 chiffre 1, 1 chiffre 2 et 2 chiffres 3.
Donc, la machine produit la liste $(1, 0, 1, 2)$.

(b) Véro insère la liste (a, b, c, d) et la machine produit la même liste, soit (a, b, c, d).
Puisque la liste de sortie est (a, b, c, d), la liste initiale contenait a chiffres 0, b chiffres 1, c chiffres 2 et d chiffres 3.
Puisque la liste d'entrée contient 4 chiffres, soit a chiffres 0, b chiffres 1, c chiffres 2 et d chiffres 3, alors $a + b + c + d = 4$.
On additionne les chiffres de la liste d'entrée d'une autre façon.
Puisque (a, b, c, d) est aussi la liste de sortie, la liste de sortie contient a chiffres 0, b chiffres 1, c chiffres 2 et d chiffres 3.
Les a chiffres 0 contribuent $0a$ à la somme des chiffres, les b chiffres 1 contribuent $1b$, les c chiffres 2 contribuent $2c$ et les d chiffres 3 contribuent $3d$. Donc, la somme des chiffres de la liste initiale est aussi égale à $0a + 1b + 2c + 3d$.
Puisque cette somme est égale à 4, alors $0a + 1b + 2c + 3d = 4$.
Donc, $b + 2c + 3d = 4$ pour n'importe quelle liste d'entrée (a, b, c, d) qui produit la même liste de sortie (a, b, c, d).

(c) On détermine toutes les listes possibles (a, b, c, d) que Véro peut insérer pour que la machine produise la même liste, (a, b, c, d).
D'après la partie (b), on a $a + b + c + d = 4$ et $b + 2c + 3d = 4$.
On sait que chacun des chiffres a, b, c, d est un entier égal ou supérieur à 0.
Puisque $b + 2c + 3d = 4$, alors $d = 0$ ou $d = 1$. (Si $d \geq 2$, le membre de gauche serait supérieur à 4.)
Si $d = 1$, alors $b + 2c + 3 = 4$, ou $b + 2c = 1$. Puisque b et c sont des entiers non négatifs, on doit avoir $b = 1$ et $c = 0$.
D'après l'équation $a + b + c + d = 4$, on a donc $a + 1 + 0 + 1 = 4$, d'où $a = 2$.
On a donc $(a, b, c, d) = (2, 1, 0, 1)$, mais cette liste produit la liste de sortie $(1, 2, 1, 0)$ qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, on ne peut avoir $d = 1$.
(On remarque que si la liste (a, b, c, d) satisfait à la condition donnée, alors $a+b+c+d = 4$ et $b + 2c + 3d = 4$, mais que le contraire n'est pas nécessairement vrai, c'est-à-dire que si $a + b + c + d = 4$ et $b + 2c + 3d = 4$, la liste (a, b, c, d) ne satisfait pas nécessairement à la condition donnée.)
Puisque d ne peut être égal à 1, alors $d = 0$, d'où $a + b + c = 4$ et $b + 2c = 4$.
D'après la deuxième équation, $c = 0$ ou $c = 1$ ou $c = 2$.
Si $c = 0$, alors $b = 4$. Or, aucun des chiffres ne peut être supérieur à 3. Donc, c ne peut égaler 0.
Si $c = 1$, alors $b = 2$. Dans ce cas, on a $a+2+1 = 4$, d'où $a = 1$. Donc $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, 0)$.
Si on insère cette liste dans la machine, on obtient $(1, 2, 1, 0)$, ce que l'on voulait.
Si $c = 2$, alors $b = 0$. Dans ce cas, on a $a+0+2 = 4$, d'où $a = 2$. Donc $(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 0)$.
Si on insère cette liste dans la machine, on obtient $(2, 0, 2, 0)$, ce que l'on voulait.
On a examiné toutes les possibilités. Donc les listes possibles qui produisent la même sortie que l'entrée sont $(1, 2, 1, 0)$ et $(2, 0, 2, 0)$.

(d) On montrera qu'il y a exactement une seule liste L possible.
On procède d'abord comme dans la partie (b) pour déterminer des équations qui aideront à poursuivre le travail.
On suppose que Véro insère la liste $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ et que la machine produit la même liste $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$.
(Chacun des chiffres $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ est un chiffre de 0 à 9. Les petits nombres qui paraissent en position inférieure sont appelés *indices*. Au lieu d'utiliser 10 lettres différentes, on utilise une seule lettre avec des indices qui indiquent le sens de l'inconnue dans la liste de sortie.)
La sortie $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ nous dit que la liste initiale contient a_0 chiffres 0, a_1 chiffres 1, a_2 chiffres 2 et ainsi de suite. Puisque l'entrée est une liste de 10 chiffres, alors $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 10$.
Donc, les chiffres de l'entrée ont une somme de 10.
La sortie $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ nous dit que la liste initiale contient a_0 chiffres 0, a_1 chiffres 1, a_2 chiffres 2 et ainsi de suite.
On peut additionner les chiffres de l'entrée en disant que les a_0 chiffres 0 contribuent $0a_0$ à cette somme, les a_1 chiffres 1 contribuent $1a_1$, les a_2 chiffres 2 contribuent $2a_2$ et ainsi de suite.
Les chiffres de l'entrée ont donc une somme de :

$$0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9$$

Puisque cette somme est égale à 10, alors :

$$0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9 = 10$$

On détermine maintenant les listes L possibles qui satisfont à la condition.
Soit $a_0 = k$. Il s'agit du premier chiffre de l'entrée et du premier chiffre de la sortie.
Puisque la sortie L comporte $a_0 = k$, alors selon la définition de a_0 dans la liste de sortie, la liste d'entrée L doit contenir k chiffres 0.
On remarque que $k \neq 0$. En effet, si $k = 0$, il y aurait au moins un chiffre égal à 0 dans la sortie, ce qui ferait en sorte que la valeur de k dans la liste de sortie serait égale à au moins 1, ce qui contredirait $k = 0$.
Puisque $1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9 = 10$, alors au plus quatre des chiffres $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ peuvent être non nuls. En effet, si 5 des chiffres étaient non nuls, les cinq termes non nuls du membre de gauche de l'égalité précédente auraient une somme au moins égale à $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, ce qui est supérieur à 10.
Puisque au plus 4 des chiffres de L, après $a_0 = k$, sont non nuls, alors au moins 5 des chiffres de L, après $a_0 = k$, sont nuls, ce qui fait que $k \geq 5$.

Si $k = 5$, alors dans les 9 derniers chiffres de L il y a exactement 5 chiffres 0, ce qui indique aussi qu'il y a exactement 4 chiffres non nuls.
Puisque $1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9 = 10$ et que la somme des 4 termes non nuls est égale à au moins $1 + 2 + 3 + 4$, ou 10, cette somme des 4 termes non nuls doit être exactement égale à $1 + 2 + 3 + 4$, ou 10.
On a donc $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ et $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$.
Or, la liste d'entrée $(5, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ produit la liste de sortie $(5, 4, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, qui n'est pas égale à la liste d'entrée.
Donc $k \neq 5$, d'où $k \geq 6$.

Puisque $a_0 = k$ et $k \geq 6$, la liste d'entrée L contient au moins un chiffre égal à k. La liste de sortie L indique donc que $a_k \neq 0$.
Puisque $1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9 = 10$, alors $ka_k \leq 10$.
Puisque $k \geq 6$, alors $a_k \leq 1$ (autrement, $ka_k > 10$). Puisque $a_k \neq 0$, alors $a_k = 1$.

On considère a_1.
Puisque $a_k = 1$, la liste d'entrée L nous dit que $a_1 \geq 1$ dans la liste de sortie L.
Si $a_1 = 1$, il y aurait au moins 2 chiffres 1 dans la liste d'entrée L (a_1 et a_k). Dans la liste de sortie L, on aurait donc $a_1 \geq 2$, ce qui est en contradiction avec la liste d'entrée.
Donc $a_1 \neq 1$, d'où $a_1 \geq 2$.

Puisque $a_0 = k$ et $k \geq 6$ et $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 10$, alors $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \leq 4$.
Puisque $a_k = 1$ (et $k \geq 6$), alors $a_1 \leq 3$.
Si $a_1 = 3$, ce renseignement dans la liste de sortie L nous dit que la liste d'entrée contient 3 chiffres 1, d'où $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq 3 + 1 + 1 + 1 = 6$, ce qui n'est pas possible.
Puisque $2 \leq a_1 \leq 3$ et $a_1 \neq 3$, alors $a_1 = 2$.

Il y a donc au moins un chiffre 2 dans la liste d'entrée L, ce qui indique que dans la liste de sortie L, on a $a_2 \geq 1$.
On sait que $a_1 = 2$, $a_2 \geq 1$, $a_k = 1$ et $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \leq 4$.
On doit donc avoir $a_2 = 1$, autrement la valeur de $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ serait trop grande.
Puisqu'il y a exactement 4 chiffres non nuls, on peut aussi conclure que tous les chiffres de la liste d'entrée doivent être nuls à l'exception de a_0, a_1, a_2 et a_k.
Puisque $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 10$, alors :

$$k = a_0 = 10 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) = 10 - (2 + 1 + 1) = 6$$

Donc, la seule liste d'entrée L qui produit la même liste de sortie L est $(6, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.
Puisque cette liste comprend 6 chiffres 0, 2 chiffres 1, 1 chiffre 2 et un chiffre 6, la liste de sortie est la même que la liste d'entrée.
Il y a donc une seule liste L possible de 10 chiffres telle que si Véro insère L, la machine produit la même liste L. Il s'agit de la liste $(6, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.