Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le jeudi 20 novembre 2014
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 21 novembre 2014
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566... ou 4,646...
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

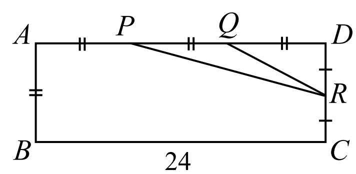
PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Il y a 200 personnes sur la plage et 65 % de ces personnes sont des enfants. Sachant que 40 % des enfants se baignent, combien d'enfants se baignent ?

2. Sachant que $x + 2y = 14$ et $y = 3$, quelle est la valeur de $2x + 3y$?

3. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle. Les points P et Q sont situés sur le côté AD de manière que $AB = AP = PQ = QD$. Le point R est situé sur le côté DC de manière que $DR = RC$. Sachant que $BC = 24$, quelle est l'aire du triangle PQR ?



4. À un moment donné, la profondeur de la neige à Kingston est de 12,1 cm et la profondeur de la neige à Hamilton est de 18,6 cm. Pendant les treize heures suivantes, il neige à un taux constant de 2,6 cm par heure à Kingston et à un taux constant de x cm par heure à Hamilton. À la fin de ces treize heures, la profondeur de la neige à Kingston est la même que la profondeur de la neige à Hamilton. Quelle est la valeur de x ?

5. Serge empile des balles de golf en couches superposées pour former une pyramide. La première couche, ou la base, de la pyramide est composée de balles placées en forme de carré. La base repose sur une table. Chaque balle d'une couche supérieure à la base repose dans un creux formé par quatre balles de la couche du dessous (voir la figure 1 ci-dessous). Chaque couche, y compris celle de la base, est complètement remplie. Par exemple, les balles peuvent être empilées pour former une pyramide à 3 couches, comme dans la figure 2. Les quatre faces triangulaires de la pyramide dans la figure 2 sont formées d'exactement 13 balles différentes. Serge forme une pyramide dont les quatre faces triangulaires sont formées d'exactement 145 balles différentes. Combien de couches cette pyramide a-t-elle ?

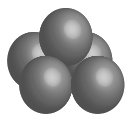


Figure 1

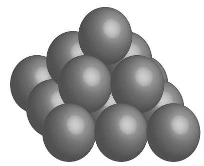


Figure 2

6. Un entier positif est un *nombre premier* s'il est supérieur à 1 et s'il n'admet aucun diviseur autre que 1 et le nombre lui-même. Par exemple, le nombre 5 est un nombre premier puisqu'il est supérieur à 1 et qu'il n'admet que deux diviseurs, soit 1 et 5.

   L'entier 43797 satisfait aux conditions suivantes :

   - chaque paire de chiffres adjacents (en lisant de gauche à droite) forme un nombre premier de deux chiffres et
   - tous les nombres premiers formés par ces paires sont différents,

   car 43, 37, 79 et 97 sont des nombres premiers différents. Il existe beaucoup de nombres de plus de cinq chiffres qui satisfont à ces deux conditions. Quel est le plus grand entier positif qui satisfait à ces deux conditions ?

PARTIE B

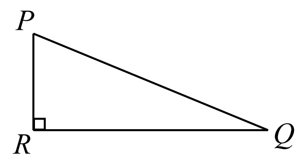
Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. (a) Déterminer la moyenne des six entiers $22, 23, 23, 25, 26, 31$.

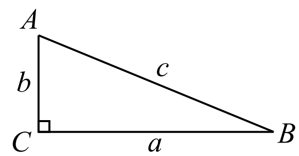
   (b) Les trois nombres $y + 7$, $2y - 9$ et $8y + 6$ ont une moyenne de 27. Quelle est la valeur de y ?

   (c) Quatre entiers strictement positifs, tous inférieurs à 100 et pas nécessairement distincts, ont une moyenne de 94. Déterminer la plus petite valeur possible d'un de ces entiers. Expliquer son raisonnement.

2. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en R. Sachant que $PQ = 25$ et $RQ = 24$, déterminer le périmètre et l'aire du triangle PQR.



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en C. De plus, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. Sachant que le triangle ABC a un périmètre de 144 et une aire de 504, déterminer toutes les valeurs possibles de c.



(On peut utiliser le fait que pour n'importe quels deux nombres x et y, on a $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.)

3. Véro a une liste $(a,\ b,\ c,\ d)$ de quatre chiffres. Chaque chiffre est un 0, un 1, un 2 ou un 3. Véro insère sa liste dans une machine qui produit une nouvelle liste, $(w,\ x,\ y,\ z)$. Dans cette nouvelle liste, w représente le nombre de chiffres 0 dans la liste initiale, tandis que x, y et z représentent respectivement les nombres de chiffres 1, 2 et 3 dans la liste initiale. Par exemple, si Véro insère la liste (1, 3, 0, 1) dans la machine, celle-ci produit la liste (1, 2, 0, 1).

(a) Quelle liste la machine produit-elle lorsque Véro insère la liste (2, 3, 3, 0) ?

(b) Véro insère la liste $(a,\ b,\ c,\ d)$ et la machine produit la même liste, soit (a, b, c, d). Déterminer toutes les valeurs possibles de l'expression $b + 2c + 3d$.

(c) Déterminer toutes les listes possibles $(a,\ b,\ c,\ d)$ telles que si Véro insère la liste $(a,\ b,\ c,\ d)$, la machine produit la même liste $(a,\ b,\ c,\ d)$.

(d) Véro achète une nouvelle machine dans laquelle elle peut insérer une liste de dix chiffres. Chaque chiffre peut être un 0, un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6, un 7, un 8 ou un 9. La machine produit une liste de dix nombres représentant, dans l'ordre, les nombres respectifs de chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dans la liste initiale. Déterminer toutes les listes L possibles de 10 chiffres, telles que si Véro insère la liste L, la machine produit la même liste L.