Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2013

(9e année – Secondaire III)

le jeudi 21 février 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 février 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

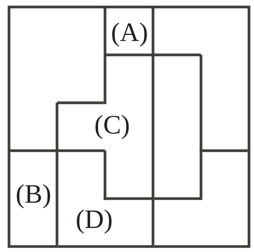
1. On simplifie d'abord ce qui est entre parenthèses : $(4 + 44 + 444) \div 4 = 492 \div 4 = 123$

RÉPONSE : (B)

2. Puisque 8 items identiques ont couté 26 $ en tout, il faut diviser le cout total par 8 pour déterminer le cout à l'unité.
La réponse est donc $26 \div 8$, ou (A).

RÉPONSE : (A)

3. Chacune des figures (A), (B), (C) et (D) parait comme morceau du grand carré.

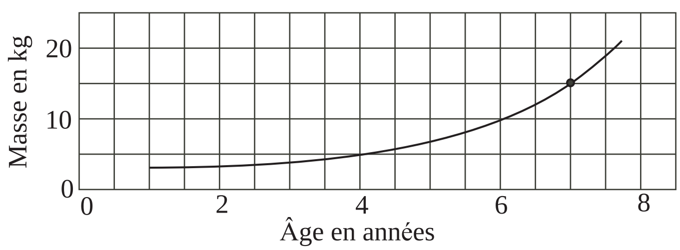


La figure (E) ne parait pas comme morceau du carré.

RÉPONSE : (E)

4. Une masse de 15 kg est située à mi-chemin entre 10 kg et 20 kg sur l'axe vertical.
Le point où la courbe atteint le niveau de 15 kg est situé à mi-chemin entre 6 et 8 sur l'axe horizontal.

Relation entre la masse et l'âge de la morue de Jef



Donc, la morue a 7 ans lorsqu'elle a une masse de 15 kg.

RÉPONSE : (B)

5. On évalue les exposants d'abord, puis on additionne.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 + 4 \times 4 \times 4 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

Puisque $100 = 10^2$, alors $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$.

RÉPONSE : (C)

6. Puisque Élise parcourt $\frac{3}{5}$ du chemin à sa maison en 30 minutes, alors elle parcourt $\frac{1}{5}$ du chemin, à la même vitesse, en 10 minutes.
Puisque $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, il lui reste $\frac{2}{5}$ du chemin à parcourir pour arriver à la maison.
Or, elle marche à la même vitesse et $\frac{2}{5}$ du chemin correspond à 2 fois $\frac{1}{5}$ du chemin. Puisqu'elle met 10 minutes pour parcourir $\frac{1}{5}$ du chemin, elle mettra 2 fois 10 minutes, ou 20 minutes, pour parcourir le reste du chemin jusqu'à sa maison.

RÉPONSE : (B)

7. On simplifie : $(\sqrt{100}+\sqrt{9})\times(\sqrt{100}-\sqrt{9}) = (10+3)\times(10-3) = 13\times 7 = 91$

RÉPONSE : (A)

8. Puisque $PQRS$ est un rectangle, alors $QR = PS = 6$.
Donc $UR = QR - QU$, d'où $UR = 6 - 2$, ou $UR = 4$.
Puisque $PQRS$ est un rectangle et que TU est perpendiculaire à QR, alors TU est parallèle et isométrique à SR. Donc $TU = 3$.
D'après le triangle de Pythagore, et puisque $TR > 0$, alors :

$$TR = \sqrt{TU^2 + UR^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Donc $TR = 5$. (On aurait pu reconnaitre le triangle remarquable 3-4-5.)

RÉPONSE : (C)

9. Puisque 1 L d'essence permet de parcourir 12,5 km, alors Paul dépense 1,20 $ en essence pour parcourir 12,5 km.
Puisque $50 \div 12{,}5 = 4$, d'où $4\times 12{,}5 = 50$, Paul parcourt 4 fois 12,5 km pour parcourir 50 km.
Puisque $4\times 1{,}20\,\$ = 4{,}80\,\$$, Paul dépense 4,80 $ en essence pour parcourir 50 km.

RÉPONSE : (A)

10. En utilisant chacun des chiffres 2, 3 et 5 exactement une fois, il est possible de former six heures différentes, soit: 2:35, 2:53, 3:25, 3:52, 5:23 et 5:32.
La première de ces heures qui se présente après 3:52 est 5:23.
De 3:52 à 4:00, il s'écoule 8 minutes.
De 4:00 à 5:00, il s'écoule 60 minutes.
De 5:00 à 5:23, il s'écoule 23 minutes.
Donc de 3:52 à 5:23, soit l'intervalle de temps avant que le téléphone n'indique la prochaine fois chacun des chiffres 2, 3 et 5 exactement une fois, il s'écoule 91 minutes (car $8 + 60 + 23 = 91$) .

RÉPONSE : (D)

11. Puisque la séquence de quatre figures est répétée et que $13\times 4 = 52$, alors le 52e symbole est le dernier symbole de la séquence de quatre figures.
Les 52 premières figures de la régularité représentent 13 fois la séquence de quatre figures.
Or, chaque séquence de quatre figures comprend 2 $\heartsuit$. Donc, les 52 premières figures de la régularité comprennent 13×2 $\heartsuit$, ou 26 $\heartsuit$.
La 53e figure de la régularité est la 1re figure de la séquence de quatre figures, c'est-à-dire un $\heartsuit$.
Dans les 53 premières figures de la régularité, la figure $\heartsuit$ parait donc $26 + 1$ fois, ou 27 fois.

RÉPONSE : (C)

12. Puisque $x = 11$ et $y = -8$, l'équation $2x - 3z = 5y$ devient $2\times 11 - 3z = 5\times(-8)$, ou $22 - 3z = -40$.
Donc $3z = 22 + 40$, ou $3z = 62$, d'où $z = \frac{62}{3}$.

RÉPONSE : (D)

13. L'ensemble initial contient 11 nombres qui ont une somme de 66.
Si on enlève un nombre de l'ensemble, il restera 10 nombres dans l'ensemble.
Ces 10 nombres auront une moyenne de 6,1 s'ils ont une somme de $10\times 6{,}1$, ou 61.
Puisque les 11 nombres de l'ensemble initial ont une somme de 66 et que les 10 nombres du nouvel ensemble ont une somme de 61, le nombre qui a été enlevé doit être 5, car $66 - 61 = 5$.

RÉPONSE : (B)

14. On a $\angle QTS = 76^\circ$. Or, le triangle QTS est isocèle (car $QS = QT$). Donc $\angle QST = \angle QTS = 76^\circ$.
Puisque les mesures d'angles du triangle QTS ont une somme de 180°, alors :

$$\angle SQT = 180^\circ - \angle QTS - \angle QST = 180^\circ - 76^\circ - 76^\circ = 28^\circ$$

Puisque PQR est un segment de droite, alors $\angle PQS + \angle SQT + \angle TQR = 180^\circ$.
On a donc $x^\circ + 28^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$.
Donc $4x + 28 = 180$, d'où $4x = 152$, ou $x = 38$.

Réponse : (B)

15. On remarque que $64 = 4 \times 4 \times 4$.
Donc $64^2 = 64 \times 64 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$.
Puisque $4^n = 64^2$, alors $4^n = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$, d'où $n = 6$.

Réponse : (C)

16. *Solution 1*
Si $x = 1$, l'expression $3x + 1$ a une valeur de 4, ce qui est un entier pair.
Pour cette valeur de x, voici les valeurs des expressions des cinq choix de réponses :

(A) $x + 3 = 4$ (B) $x - 3 = -2$ (C) $2x = 2$ (D) $7x + 4 = 11$ (E) $5x + 3 = 8$

Seule l'expression (D) a une valeur impaire. Puisque $x = 1$ répond au critère initial, soit que l'expression prend une valeur entière impaire, la réponse doit être (D).

Solution 2
Soit x un entier tel que l'expression $3x+1$ prenne une valeur entière paire. Donc $3x$ est un entier impair, car il est 1 de moins qu'un entier pair.
Puisque $3x$ a une valeur entière impaire, alors x est un entier impair (si x était pair, $3x$ serait le produit d'un entier pair et d'un entier impair, ce qui serait un entier pair).
Puisque x est un entier impair, alors $x + 3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (A) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $x - 3$ est un entier pair (un entier impair moins un entier impair est toujours un entier pair). Donc, le choix (B) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $2x$ est un entier pair (le produit d'un entier pair et d'un entier impair est toujours pair). Donc, le choix (C) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $7x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $7x+4$ est un entier impair (la somme d'un entier impair et d'un entier pair est toujours impaire).
Puisque x est un entier impair, alors $5x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $5x+3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (E) n'est pas le bon.
La seule expression qui doit être impaire est $7x + 4$.

Réponse : (D)

17. Puisque 40 % des chansons de la nouvelle liste sont de style country, alors les 60 % des chansons qui restent (100 % − 40 % = 60 %) doivent être de style pop ou hip-hop .
Puisque le rapport du nombre de chansons hip-hop au nombre de chansons pop reste le même, alors 65 % de 60% des chansons qui restent doivent être de style hip-hop.
Or, 65 % de 60 % = 65 % × 60 % = 0,65 × 0,6 = 0,39 = 39 %. Donc, les chansons hip-hop représentent maintenant 39 % des chansons sur la liste de lecture.

Réponse : (E)

18. L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du carré $PQRS$ moins l'aire totale des quatre régions non ombrées à l'intérieur du carré.
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 2, son aire est égale à 2^2, ou 4.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors l'angle à chacun des sommets P, Q, R et S mesure 90°.
Or chacun des points P, Q, R et S est le centre d'un cercle de rayon 1. Donc, chacune des quatre régions non ombrées à l'intérieur du carré est un quart d'un cercle. (Un angle au centre de 90° donne un quart de cercle.)
Donc, l'aire totale des quatre régions non ombrées à l'intérieur du carré correspond à l'aire de quatre quarts de cercles de rayons 1, ou à l'aire d'un cercle de rayon 1.
Cette aire est égale à $\pi(1)^2$, ou π.
L'aire de la région ombrée est égale à $4 - \pi$.

Réponse : (E)

19. Puisque le drapeau est de forme rectangulaire, son aire est égale au produit de sa longueur et de sa largeur, c'est-à-dire à $h \times 2h$, ou $2h^2$.
Puisque le rectangle est divisé en sept rayures de même hauteur et de même longueur, les rayures ont toutes la même aire.
Puisque les quatre rayures ombrées ont une aire totale de 1400 cm^2, alors chaque rayure a une aire de 1400 cm^2 $\div$ 4, ou 350 cm^2.
Puisque le drapeau est composé de 7 rayures, son aire totale est de 350 cm^2 $\times$ 7, ou 2450 cm^2.
Puisque le drapeau mesure h sur $2h$, alors $2h^2 = 2450$ cm^2, ou $h^2 = 1225$ cm^2.
Donc $h = \sqrt{1225}$ cm, ou $h = 35$ cm (puisque $h > 0$).
Le drapeau a une hauteur de 35 cm.

Réponse : (C)

20. On crée un tableau qui fait correspondre à chacun des 4 résultats possibles de Simon (puisqu'il jette un dé à 4 faces) les 6 résultats possibles de Théo (puisqu'il jette un dé à 6 faces. Le nombre de résultats équiprobables est donc égal à 4×6, ou 24. On remplit le tableau en inscrivant un O lorsque Simon obtient un plus grand nombre que Théo et un N autrement.

	Jet de Théo	1	2	3	4	5	6
Jet de Simon	1	N	N	N	N	N	N
	2	O	N	N	N	N	N
	3	O	O	N	N	N	N
	4	O	O	O	N	N	N

Puisqu'il y a 6 résultats favorables sur 24 résultats équiprobables possibles, la probabilité pour que Simon obtienne un plus grand nombre que Théo est de $\frac{6}{24}$, ou $\frac{1}{4}$.

Réponse : (E)

21. On exprime le nombre en factorisation première.
Puisque le chiffre des unités de 636 405 est un 5, le nombre est divisible par 5. On a donc :

$$636\,405 = 5 \times 127\,281$$

Puisque la somme des chiffres du nombre 127 281 est un multiple de 3, ce nombre est un multiple de 3. On a donc :

$$636\,405 = 5 \times 3 \times 42\,427$$

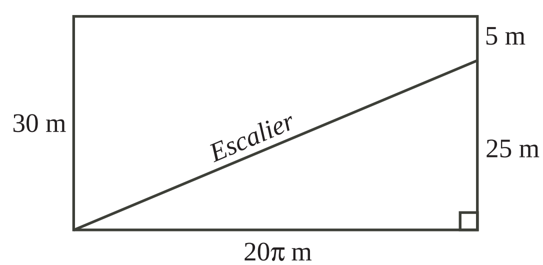
On voit facilement que 42 427 est divisible par 7. On a donc :

$$636\,405 = 5 \times 3 \times 7 \times 6061$$

On peut procéder par essais systématiques pour vérifier si le nombre 6061 est divisible par les nombres premiers suivants, soit 11, 13, 17, 19, ... On obtient $6061 = 11 \times 551 = 11 \times 19 \times 29$.
Donc $636\,405 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19 \times 29$.
On veut récrire ce produit comme produit de trois entiers de deux chiffres.
Le produit des trois plus petits facteurs est égal à $3 \times 5 \times 7$, ou 105, ce qui est un nombre de trois chiffres. Tout autre produit de trois facteurs premiers serait donc plus grand que 105. Il est donc impossible de former un facteur de deux chiffres en multipliant trois facteurs premiers de 636 405.
Il faut donc combiner les six facteurs premiers en paires pour que le produit de chaque paire donne un nombre de deux chiffres.
Le facteur premier 29 peut seulement être multiplié par 3 (puisque $29 \times 3 = 87$, un nombre de deux chiffres), mais il ne peut pas être multiplié par un facteur premier plus grand, car $29 \times 5 = 145$, un nombre de trois chiffres.
On a donc $636\,405 = 87 \times 5 \times 7 \times 11 \times 19$.
Le facteur premier 19 peut être multiplié par 5 (puisque $19 \times 5 = 95$, un nombre de deux chiffres) mais il ne peut pas être multiplié par un facteur premier plus grand, car $19 \times 7 = 133$, un nombre de trois chiffres.
On a donc $636\,405 = 87 \times 95 \times 7 \times 11 = 87 \times 95 \times 77$.
La somme de ces trois diviseurs de deux chiffres est égale à $87 + 95 + 77$, ou 259.

Réponse : (A)

22. La distance totale est égale à la somme de la longueur de l'escalier et de la longueur de l'échelle.
L'escalier en spirale fait une fois le tour du château d'eau.
Puisque le château d'eau a un rayon de 10 m, il a une circonférence de $2 \times \pi \times 10$ m, ou 20π m.
On peut donc « dérouler » le château d'eau et l'aplatir pour former un rectangle de longueur 20π m et de hauteur 30 m.
Puisque l'escalier a une pente constante, il forme une ligne droite sur ce rectangle.
L'échelle a une longueur de 5 m et elle compte pour les derniers 5 m du château d'eau. Puisque celui-ci a une hauteur de 30 m, alors le haut de l'escalier est à 25 m au-dessus de la base ($30 - 5 = 25$).



On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'escalier en mètres. Puisque cette longueur est positive, on a :

$$\sqrt{(20\pi)^2 + (25)^2} \approx 67{,}62$$

La distance totale le long de l'escalier et ensuite le long de l'échelle est environ égale à
$5 \text{ m} + 67{,}62$ m, ou 72,62 m.
Le choix de réponse le plus près est 72,6 m.

Réponse : (A)

23. On suppose que les cinq nombres distincts que Julien choisit sont V, W, X, Y, Z et que $V < W < X < Y < Z$.
On veut attribuer ces nombres aux variables p, q, r, s et t de manière que $p < s$ et $q < s$ et $r < t$ et $s < t$.
On remarque que t doit avoir la plus grande valeur parmi les variables p, q, r, s et t. En effet, on doit avoir $r < t$ et $s < t$. De plus, puisque $p < s$ et $q < s$, on doit avoir $p < s < t$ et $q < s < t$, d'où $p < t$ et $q < t$.
Puisque t doit avoir la plus grande valeur, on doit avoir $t = Z$.

Or ni p, ni q, ne peut avoir la deuxième plus grande valeur Y, puisque p et q sont tous les deux inférieurs à s et à t.
Il y a donc deux possibilités : $Y = r$ ou $Y = s$.

1^{re} possibilité : $Y = r$

On a $Y = r$ et $Z = t$.
On doit donc attribuer les valeurs V, W et X (telles que $V < W < X$) aux variables p, q et s (telles que $p < s$ et $q < s$).
Puisque X est le plus grand des nombres V, W et X et que s doit avoir la plus grande valeur parmi les variables p, q et s, alors $X = s$.
Il reste à attribuer les valeurs V et W aux variables p et q.
Puisqu'il n'y a aucune contrainte entre p et q, il y a deux possibilités : ou bien $V = p$ et $W = q$, ou bien $V = q$ et $W = p$.
Donc si $Y = r$, il y a 2 façons possibles d'attribuer les valeurs.

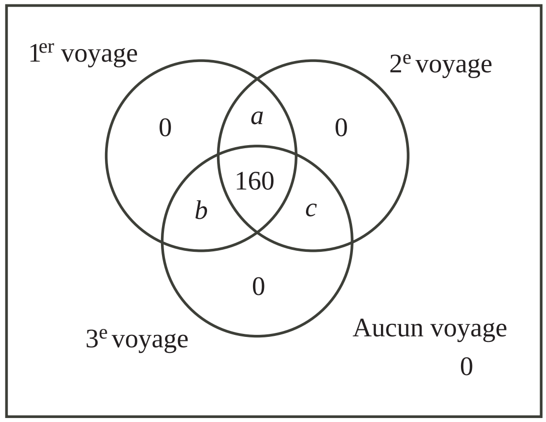
2^e possibilité : $Y = s$

On a $Y = s$ et $Z = t$.
On doit donc attribuer les valeurs V, W et X (telles que $V < W < X$) aux variables p, q et r.
Il n'y a aucune contrainte entre p, q et r.
Il y a donc 3 façons d'attribuer une des valeurs V, W et X à p.
Pour chacune de ces 3 façons, il y a 2 façons d'attribuer une des deux autres valeurs à q.
Pour chacune de ces 3×2 façons, il y a 1 façon d'attribuer la dernière valeur à r.
En tout, le nombre de façons d'attribuer les valeurs est égal à $3 \times 2 \times 1$, ou 6. (Les 6 façons d'attribuer les valeurs respectives V, W et X aux variables p, q et r sont VWX, VXW, WVX, WXV, XVW et XWV.)
Donc si $Y = s$, il y a 6 façons possibles d'attribuer les valeurs.

Selon les deux possibilités, le nombre de façons possibles d'attribuer les valeurs est égal à $2 + 6$, ou 8.

Réponse : (D)

24. Soit x le nombre d'élèves à l'école secondaire Pascal.
Soit a le nombre total d'élèves qui ont fait les deux premiers voyages, mais pas le troisième.
Soit b le nombre total d'élèves qui ont fait le premier et le troisième voyage, mais pas le deuxième.
Soit c le nombre total d'élèves qui ont fait les deux derniers voyages, mais pas le premier.
On sait aussi qu'aucun élève a fait un voyage seulement et que 160 élèves ont fait les trois voyages.
On représente la situation par un diagrame de Venn :



Puisque x représente le nombre total d'élèves dans l'école et que chaque nombre ou inconnue représente le nombre d'élèves dans une section particulière du diagramme, alors :

$$x = a + b + c + 160$$

D'après les renseignements donnés :

- 50 % des élèves de l'école ont fait le premier voyage. Donc $0{,}5x = a + b + 160$.
- 80 % des élèves de l'école ont fait le deuxième voyage. Donc $0{,}8x = a + c + 160$.
- 90 % des élèves de l'école ont fait le troisième voyage. Donc $0{,}9x = b + c + 160$.

On utilise ces résultats comme suit :

$$\begin{aligned}
x &= a + b + c + 160 \\
2x &= 2a + 2b + 2c + 160 + 160 \\
2x &= (a + b + 160) + (a + c + 160) + (b + c) \\
2x &= 0{,}5x + 0{,}8x + (0{,}9x - 160) \\
2x &= 2{,}2x - 160 \\
160 &= 0{,}2x \\
x &= 800
\end{aligned}$$

Il y a donc 800 élèves à l'école secondaire Pascal.

Réponse : (D)

25. La suite formée par les différences entre toutes les paires de termes consécutifs est appelée la suite des différences.
Puisque la suite GEB est croissante et que tout entier positif qui ne parait pas dans la suite GEB parait exactement une fois dans la suite des différences, alors chaque entier de 1 à 12, à l'exception de 1, 3, 7 et 12 (soit un total de 8 entiers positifs) doit paraitre dans la suite des différences.
Puisque la suite des différences est croissante, alors ces 8 entiers doivent paraitre en ordre croissant. La suite des différences commence donc par les nombres $2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \ldots$
On peut prolonger la suite GEB en utilisant la suite des différences. Par exemple, puisque le 4^e terme de la suite GEB est 12 et que la 4^e différence est 6, le 5^e terme de la suite GEB est égal à $12 + 6$, ou 18.
On continue de cette façon pour déterminer quelques autres termes de la suite GEB :

$$1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, \ldots$$

De même, chaque entier de 1 à 26, à l'exception de 1, 3, 7, 12, 18 et 26 (soit un total de 20 entiers positifs) doit paraitre dans la suite des différences.
Puisque la suite des différences est croissante, alors ces 20 entiers doivent paraitre en ordre croissant. On peut donc prolonger la suite des différences :

$$2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \ldots$$

Ceci nous permet de prolonger la suite GEB :

$$1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, 69, 83, 98, 114, 131, \ldots$$

De même, tous les entiers de 1 à 114, à l'exception des 13 premiers termes de la suite GEB, doivent paraitre en ordre croissant dans la suite des différences. Il y en a $114 - 13$, ou 101 en tout.
On veut déterminer le 100^e terme de la suite GEB. On peut le faire en partant du premier terme de la suite GEB, soit 1, et en additionnant à 1 chacun des 99 premiers termes de la suite des différences. En effet, les termes de la suite des différences sont les différences entre les termes consécutifs de la suite GEB. Donc, après chaque addition, on obtient le terme suivant de la suite GEB.
D'après ce qui précède, 113 est le 101^e terme de la suite des différences. Donc 112 est le 100^e terme et 111 est le 99^e terme.
Puisque les 99 premiers termes de la suite des différences contiennent la plupart des entiers de 2 à 111, à l'exception des quelques entiers qui sont des termes de la suite GEB, on peut déterminer la somme de ces termes en additionnant les entiers de 2 à 111 et en soustrayant les exceptions.
Le 100^e terme de la suite GEB est donc égal à :

$$\begin{aligned}
&1 + (2 + 4 + 5 + 6 + 8 + \cdots + 109 + 110 + 111) \\
&\quad = \ 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 109 + 110 + 111) \\
&\qquad\qquad -(1 + 3 + 7 + 12 + 18 + 26 + 35 + 45 + 56 + 69 + 83 + 98) \\
&\quad = \ 1 + \tfrac{1}{2}(111)(112) - (453) \\
&\qquad\qquad \text{(on sait que la somme des entiers de 1 à } n \text{ est égale à } \tfrac{1}{2}n(n+1)) \\
&\quad = \ 1 + 111(56) - 453 \\
&\quad = \ 5764
\end{aligned}$$

Le 100^e terme de la suite GEB est donc égal à 5764.

Réponse : (E)