Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2013

le jeudi 18 avril 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) En retirant deux billets de chaque sorte, Rad retire la somme de $2 \times (5\,\$ + 10\,\$ + 20\,\$ + 50\,\$)$, ou $2 \times (85\,\$)$, ou $170\,\$$.
Puisqu'il a retiré $175\,\$$ en tout, le seul autre billet qu'il aurait pu retirer est un billet de $5\,\$$, car $175\,\$ - 170\,\$ = 5\,\$$.
Donc, Rad a retiré trois billets de $5\,\$$, deux billets de $10\,\$$, deux billets de $20\,\$$ et deux billets de $50\,\$$. Il a donc retrié $(3 + 2 + 2 + 2)$ billets, ou 9 billets.

(b) Puisqu'elle retire au moins un billet de chaque sorte, Sandy retire la somme de $5\,\$ + 10\,\$ + 20\,\$ + 50\,\$$, ou $85\,\$$.
On connait donc quatre des cinq billets qu'elle retire et on sait qu'ils ont une valeur de $85\,\$$. Le cinquième billet peut être n'importe quelle sorte de billet.
Si le 5^{e} billet est un billet de $5\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$ + 5\,\$$, ou $90\,\$$.
Si le 5^{e} billet est un billet de $10\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$ + 10\,\$$, ou $95\,\$$.
Si le 5^{e} billet est un billet de $20\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$ + 20\,\$$, ou $105\,\$$.
Si le 5^{e} billet est un billet de $50\,\$$, Sandy reçoit une somme de $85\,\$ + 50\,\$$, ou $135\,\$$.
Donc, les sommes possibles d'argent que Sandy a pu retirer sont $90\,\$$, $95\,\$$, $105\,\$$ et $135\,\$$.

(c) Lino a pu retirer au plus trois billets de $50\,\$$, puisque quatre billets de $50\,\$$ donnent une somme supérieure à celle qu'il a obtenue $(4 \times 50\,\$ = 200\,\$ > 160\,\$)$.
Si Lino n'a retiré aucun billet de $50\,\$$, alors ses billets (6 billets au plus) auraient chacun une valeur de $20\,\$$ au plus, pour un total d'au plus $120\,\$$. Or ceci est impossible, puisqu'il a retiré une somme de $160\,\$$.
Si Lino a retiré un billet de $50\,\$$, alors les autres billets (5 billets au plus) auraient chacun une valeur de $20\,\$$ au plus, pour un total d'au plus $100\,\$$. Les six billets auraient donc une valeur d'au plus $50\,\$ + 100\,\$$, ou $150\,\$$. Or ceci est impossible, puisqu'il a retiré une somme de $160\,\$$.
On continue en considérant les cas où Lino retire deux et trois billets de $50\,\$$.
On inscrit les possibilités dans le tableau suivant.

N^{bre} de billets de 50 \$	Valeur des billets de 50 \$	Somme qu'il reste à combler	N^{bre} de billets de 20 \$	N^{bre} de billets de 10 \$	N^{bre} de billets de 5 \$	N^{bre} de billets utilisés
3	150 \$	10 \$		1		4
3	150 \$	10 \$			2	5
2	100 \$	60 \$	3			5
2	100 \$	60 \$	2	2		6

Chaque ligne du tableau représente une façon pour Lino de retirer une somme de $150\,\$$ en utilisant 6 billets ou moins.
Puisqu'on demande de déterminer les quatre possibilités, ce sont les quatre façons possibles.

2. (a) L'équation canonique d'une parabole, $y = (x - p)^2 + q$, nous indique que le sommet a pour coordonnées (p, q).
La parabole d'équation $y = (x - 3)^2 + 1$ a donc pour sommet $(3, 1)$.

(b) *Solution 1*
L'image de la parabole, par une translation, est une parabole de même forme.
Après une translation de 3 unités vers la gauche et 3 unités vers le haut, l'image du sommet $(3, 1)$ est le point $(3 - 3, 1 + 3)$, ou $(0, 4)$.
Puisque la nouvelle parabole a pour sommet $(0, 4)$ et qu'elle est congruente à la première, elle a pour équation $y = (x - 0)^2 + 4$, ou $y = x^2 + 4$.

Solution 2
Après une translation de 3 unités vers la gauche et 3 unités vers le haut, l'image de la parabole d'équation $y = (x-3)^2 + 1$ a pour équation :

$$\begin{aligned} y - 3 &= ((x+3)-3)^2 + 1 \\ y - 3 &= x^2 + 1 \\ y &= x^2 + 4 \end{aligned}$$

(c) À un point d'intersection des paraboles, les coordonnées du point vérifient les deux équations. À un tel point, la valeur de y est la même dans chaque équation. Donc :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= x^2 + 4 \\ x^2 - 6x + 9 + 1 &= x^2 + 4 \\ -6x &= -6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On reporte $x = 1$ dans l'équation $y = x^2 + 4$ pour obtenir $y = 5$.
Le point d'intersection des paraboles a donc pour coordonnées $(1, 5)$.

(d) À un point d'intersection des paraboles, les coordonnées du point vérifient les deux équations. À un tel point, la valeur de y est la même dans chaque équation. Donc :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= ax^2 + 4 \\ x^2 - 6x + 9 + 1 &= ax^2 + 4 \\ 0 &= ax^2 - x^2 + 6x - 6 \\ 0 &= (a-1)x^2 + 6x - 6 \end{aligned}$$

Puisque les deux paraboles se touchent en exactement un point, l'équation $(a-1)x^2 + 6x - 6 = 0$ (qui est du second degré puisque $a < 0$), admet exactement une solution. Le *discriminant* de cette équation doit donc être nul.
(Remarque : Le discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est la valeur de l'expression $b^2 - 4ac$.)
On a donc $6^2 - 4(-6)(a-1) = 0$, d'où $36 + 24(a-1) = 0$, ou $24a = -12$, ou $a = -\frac{1}{2}$.
Donc, les paraboles d'équations $y = ax^2 + 4$ et $y = (x-3)^2 + 1$ se touchent en exactement un point lorsque $a = -\frac{1}{2}$.

3. (a) Si la suite commence par 3 fois la lettre P ou plus, elle ne peut être non prédictive, car il n'y a que 2 lettres Q.
Il y a donc deux cas à considérer : la suite commence par exactement 1 P (c'est-à-dire qu'elle commence par PQ, puisque la deuxième lettre n'est pas un P), ou la suite commence par exactement 2 P (c'est-à-dire qu'elle commence par PPQ, puisque la troisième lettre n'est pas un P).

1^er^ cas : La suite commence par PQ
Toute suite qui commence par PQ est non prédictive, car après deux lettres, le nombre de Q est égal au nombre de P. Les 7 autres lettres peuvent donc paraitre dans n'importe quel ordre.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par PQ, où $m = 7$ et $n = 2$, est égal au nombre de façons de placer 6 P et 1 Q dans les 7 positions suivantes.
Il y a 7 façons de la faire, car la lettre Q peut être placée dans n'importe laquelle des 7

positions (et les 6 P occupent automatiquement les autres positions).
Il y a donc 7 suites non prédictives.

2$^{\text{e}}$ cas : La suite commence par PPQ
Si la quatrième lettre de la suite était un P, il ne serait pas possible de former une suite non prédictive, puisqu'il n'y a que 2 Q.
La suite doit donc commencer par PPQQ.
Puisque les 5 autres lettres sont des P, il n'y a qu'une seule façon de compléter la suite.
On voit, après les quatre premiers termes, que cette suite est non prédictive.

Lorsque $m = 7$ et $n = 2$, il y a $(7 + 1)$ suites, c'est-à-dire 8 suites non prédictives qui commencent par la lettre P.

(b) Comme dans la partie (a), si $m > 2$ et $n = 2$, une suite non prédictive qui commence par la lettre P doit commencer par PQ ou par PPQQ.
Dans le cas d'une suite qui commence par PQ, il y reste $(m - 1)$ P et 1 Q à placer dans les m positions suivantes.
Puisque le Q peut être placé dans n'importe laquelle de ces m positions et que chacun de ces placements donne une seule suite, il y a m suites non prédictives qui commencent par PQ.
Dans le cas d'une suite qui commence par PPQQ, toutes les lettres qui suivent sont des P, ce qui produit une seule suite. Il y a donc 1 suite non prédictive qui commence par PPQQ.
Lorsque $m > 2$ et $n = 2$, il y a $(m + 1)$ suites non prédictives qui commencent par P.

Toute suite qui commence par Q est une suite non prédictive.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par Q est égal au nombre de façons de placer m fois la lettre P et 1 fois la lettre Q dans les $(m + 1)$ positions suivantes.
Il y a $(m + 1)$ façons de la faire, car le Q peut être placé dans n'importe laquelle de ces positions, ce qui produit une seule suite à chaque fois. Il y a donc $(m + 1)$ suites non prédictives qui commencent par Q.

Lorsque $n = 2$, pour toute valeur de m supérieure à 2, le nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre P est égal au nombre de suites non prédictives qui commencent par la lettre Q.

(c) Si la suite commence par 4 fois la lettre P ou plus, elle ne peut être non prédictive, car il n'y a que 3 lettres Q. (Le nombre de Q ne peut jamais rattraper le nombre de P.)
On considère les cas selon que la suite commence par 0 P, 1 P, 2 P ou 3 P.

1$^{\text{er}}$ cas : La suite commence par Q (elle commence par 0 P)
Toute suite qui commence par Q est non prédictive.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par Q est donc égal au nombre de façons de placer les 10 P et les 2 Q qui restent dans les 12 positions suivantes.
On considère le nombre de façons de placer les 2 Q (les autres positions étant automatiquement remplies par des P).
Il y a 12 positions où placer le premier Q. Dans chaque cas, il y a 11 positions qui restent où placer le deuxième Q. Il semble donc y avoir 12×11 façons de placer les 2 Q.
Or, puisque les 2 Q sont identiques, chaque façon a été comptée deux fois.
(Par exemple, si on a placé le 1$^{\text{er}}$ Q dans la position 4 et le 2$^{\text{e}}$ Q dans la position 7, on obtient le même résultat que si on a placé le 1$^{\text{er}}$ Q dans la position 7 et le 2$^{\text{e}}$ Q dans la position 4.)
Donc dans ce cas, le nombre de façons de placer les 2 Q est égal à $\frac{12\times 11}{2}$, ou 66. Il y a donc 66 suites non prédictives.

2ᵉ cas : La suite commence par PQ

Toute suite qui commence par PQ est non prédictive.
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par PQ est donc égal au nombre de façons de placer les 9 P et les 2 Q dans les 11 positions suivantes.
On considère le nombre de façons de placer les 2 Q (les autres positions étant automatiquement remplies par des P).
On utilise le même argument que dans le 1er cas pour conclure que le nombre de façons est égal à $\frac{11\times 10}{2}$, ou 55.

3ᵉ cas : La suite commence par PPQ

Si la suite commence par PPQ, la 4ᵉ lettre peut être un Q ou un P.
Toute suite qui commence par PPQQ est non prédictive. Une suite qui commence par PPQP n'est prédictive que si elle commence par PPQPQQ (Défi : vérifier que c'est vrai.)
Le nombre de suites non prédictives qui commencent par PPQQ est donc égal au nombre de façons de placer les 8 P et 1 Q dans les 9 positions suivantes.
Il y a 9 façons de le faire, car le Q peut être placé dans n'importe laquelle de ces positions, ce qui produit une seule suite à chaque fois. Il y a donc 9 suites non prédictives qui commencent par PPQQ.
Il y a 1 seule suite non prédictive qui commence par PPQPQQ, puisque les 7 lettres qui suivent sont des P.
Donc dans ce cas, le nombre de suites non prédictives est égal à $9 + 1$, ou 10.

4ᵉ cas : La suite commence par PPPQ

Puisqu'il ne reste que 2 autres Q, la suite doit commencer par PPPQQQ pour être non prédictive.
Il y a 1 seule suite non prédictive qui commence par PPPQQQ, puisque les 7 positions suivantes doivent être occupées par des P.
Dans ce cas, il y a 1 seule suite non prédictive.

Lorsque $m = 10$ et $n = 2$, le nombre de suites non prédictives est égal à $66 + 55 + 10 + 1$, ou 132.

4. (a) Puisque les arêtes d'un cube ont une longueur de 1 cm, le prisme a une hauteur de 1 cm, une largeur de 4 cm et une longueur de 5 cm.
La face supérieure du prisme mesure 5 cm sur 4 cm. Elle a donc une aire de 20 cm^2.
De même, la face inférieure du prisme a une aire de 20 cm^2.
La face avant et la face arrière du prisme mesurent 4 cm sur 1 cm. Elles ont donc chacune une aire de 4 cm^2.
Les deux autres faces latérales du prisme mesurent 5 cm sur 1 cm. Elles ont donc chacune une aire de 5 cm^2.
Puisque $2 \times (20 + 4 + 5) = 2 \times 29 = 58$, le prisme a une aire totale de 58 cm^2.

(b) Soit L cm la longueur du prisme et l cm sa largeur, $L \geq l$.
La face supérieure du prisme a donc une aire de $(L \times l)$ cm^2, la face avant a une aire de $(l \times 1)$ cm^2 et une autre face latérale a une aire de $(L \times 1)$ cm^2.
L'aire totale du prisme est donc égale à $2 \times (Ll + l + L)$ cm^2.
Puisque l'aire totale est de 180 cm^2, alors $2 \times (Ll + l + L) = 180$, d'où $Ll + l + L = 90$.
On ajoute 1 à chaque membre de l'équation pour obtenir $Ll + l + L + 1 = 91$, ou $l(L + 1) + 1(L + 1) = 91$.
Le facteur commun nous permet d'écrire l'équation sous forme factorisée,
soit $(l + 1)(L + 1) = 91$.

Puisque L et l sont des entiers strictement positifs, $(l+1)(L+1)$ est le produit de deux entiers strictement positifs.
Or le membre de droite, 91, peut être exprimé comme produit de deux entiers positifs de deux façons, 1×91 et 7×13.
Puisque l et L sont des entiers strictement positifs, alors $2 \leq (l+1) \leq (L+1)$ et aucun des facteurs ne peut être égal à 1.
Donc $(l+1) = 7$ et $(L+1) = 13$ (puisque $L \geq l$). Donc $l = 6$ et $L = 12$.
Puisque le prisme à base rectangulaire a une largeur de 6 cubes et une longueur de 12 cubes, il est formé de 6×12 cubes, ou 72 cubes.

(c) Comme dans la partie (b), l'aire totale du prisme, avant qu'on enlève le prisme intérieur, est de $2 \times (Ll + l + L)$ cm^2.
Pour déterminer l'aire totale du cadre, il faut tenir compte de l'aire perdue et de l'aire ajoutée lorsqu'on enlève le prisme intérieur.

L'aire perdue est l'aire des faces avant et arrière du petit prisme.
Puisque le prisme initial avait une largeur de l cm et que le prisme intérieur est situé à k cm de chaque côté du prisme initial, alors le prisme intérieur a une largeur de $(l-2k)$ cm.
De même, le prisme intérieur a une longueur de $(L-2k)$ cm.
(On remarque que $l - 2k > 0$ et $L - 2k > 0$. Donc $l > 2k$ et $L > 2k$.)
L'aire perdue, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à $2 \times (l-2k) \times (L-2k)$ cm^2.

L'aire ajoutée, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à l'aire des faces supérieure, inférieure, gauche et droite du prisme intérieur.
Puisque le prisme intérieur a une largeur de $(l-2k)$ cm et une épaisseur de 1 cm, les faces supérieure et inférieure de ce prisme ont aire totale de $2 \times (l-2k) \times 1$ cm^2.
De même, puisque le prisme intérieur a une longueur de $(L-2k)$ cm et une épaisseur de 1 cm, alors la face gauche et la face droite ont une aire totale de $2 \times (L-2k) \times 1$ cm^2.

Pour résumer, le prisme initial a une aire totale de $2 \times (Ll + l + L)$ cm^2.
L'aire perdue, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à
$2 \times (l-2k) \times (L-2k)$ cm^2.
L'aire ajoutée, lorsqu'on enlève le prisme intérieur, est égale à
$(2 \times (l-2k) \times 1 + 2 \times (L-2k) \times 1)$ cm^2, ou $2 \times (l - 2k + L - 2k)$ cm^2,
ou $2 \times (l + L - 4k)$ cm^2.
L'aire totale du cadre, en cm^2, est donc égale à :

$$2 \times (Ll + l + L) - 2 \times (l-2k) \times (L-2k) + 2 \times (l + L - 4k)$$

Puisque le cadre a une aire totale de 532 cm^2, on a :

$$\begin{aligned}
2 \times (Ll + l + L) - 2 \times (l-2k) \times (L-2k) + 2 \times (l + L - 4k) &= 532 \\
Ll + l + L - (l-2k) \times (L-2k) + (l + L - 4k) &= \tfrac{532}{2} \\
Ll + l + L - (Ll - 2kl - 2kL + 4k^2) + (l + L - 4k) &= 266 \\
2l + 2L + 2kl + 2kL - 4k^2 - 4k &= 266 \\
l + L + kl + kL - 2k^2 - 2k &= \tfrac{266}{2} \\
kl + kL - 2k^2 + l + L - 2k &= 133 \\
k(l + L - 2k) + 1(l + L - 2k) &= 133 \\
(l + L - 2k)(k+1) &= 133
\end{aligned}$$

Puisque $l > 2k$ et $L > 2k$ et que l, L et k sont des entiers strictement positifs, alors $(l + L - 2k)$ est un entier strictement positif.

Donc $(l + L - 2k)(k + 1)$ est le produit de deux entiers strictement positifs.
Il y a deux façons d'exprimer 133 comme produit de deux entiers positifs, soit 1×133 et 7×19.
Or $(k + 1) > 1$ et puisque k est un entier strictement positif, alors
$(l + L - 2k) > 2k + 2k - 2k$, c'est-à-dire que $(l + L - 2k) > 2k > 1$.
Donc $(k + 1) \neq 1$ et $(l + L - 2k) \neq 1$. On doit donc avoir $k + 1 = 7$ ou $k + 1 = 19$.
Si $k + 1 = 7$, alors $k = 6$ et on a $l + L - 2k = 19$, ou $l + L - 12 = 19$, ou $l + L = 31$.
Puisque $l > 2k = 12$, on cherche toutes les valeurs possibles de l et L pour lesquelles $l \geq 13$, $L \geq l$ et $l + L = 31$.
Les couples (l, L) possibles sont $(13, 18), (14, 17)$ et $(15, 16)$.

Si $k + 1 = 19$, alors $k = 18$ et on a $l + L - 2k = 7$, ou $l + L - 36 = 19$, ou $l + L = 55$.
Puisque $l > 2k = 36$, alors $L < 55 - 36 = 29$, ce qui est impossible puisque $L \geq l$.
Les seules valeurs possibles de l et L pour lesquelles le cadre a une aire totale de 532 cm^2 sont 13 et 18, 14 et 17, 15 et 16.