Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2013

le jeudi 18 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La droite qui passe aux points $(2,0)$ et $(0,4)$ a une pente de $\dfrac{4-0}{0-2}$, ou $\dfrac{4}{-2}$, ou -2.

   Puisque la droite passe au point $(0,4)$, elle a une ordonnée à l'origine de 4.
   La droite a donc pour équation $y=-2x+4$.

   (b) L'équation de la partie (a), $y=-2x+4$, peut s'écrire sous la forme $2x+y=4$.

   On divise chaque membre de l'équation par 4 pour obtenir $\dfrac{2x+y}{4}=\dfrac{4}{4}$, ou $\dfrac{2x}{4}+\dfrac{y}{4}=1$.

   L'équation est donc $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$.

   (c) Pour obtenir l'abscisse à l'origine, on pose $y=0$.
   L'équation $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{10}=1$ devient $\dfrac{x}{3}+\dfrac{0}{10}=1$, ou $\dfrac{x}{3}=1$, d'où $x=3$.
   La droite a une abscisse à l'origine de 3.

   Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on pose $x=0$.
   L'équation $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{10}=1$ devient $\dfrac{0}{3}+\dfrac{y}{10}=1$, ou $\dfrac{y}{10}=1$, d'où $y=10$.
   La droite a une ordonnée à l'origine de 10.
   (On remarque que les coordonnées à l'origine de la droite sont les dénominateurs des fractions dans l'équation.)

   (d) *Solution 1*
   La droite qui passe aux points $(8,0)$ et $(2,3)$ a une pente de $\dfrac{3-0}{2-8}$, ou $\dfrac{3}{-6}$, ou $-\dfrac{1}{2}$.

   Son équation est donc de la forme $y=-\dfrac{1}{2}x+b$.

   Puisque le point $(8,0)$ est sur la droite, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $0=-\dfrac{1}{2}(8)+b$, ou $0=-4+b$, ou $b=4$.

   La droite a donc pour équation $y=-\dfrac{1}{2}x+4$.

   On peut écrire l'équation sous la forme $\dfrac{1}{2}x+y=4$.

   On divise chaque membre de l'équation par 4 pour obtenir $\dfrac{\frac{1}{2}x+y}{4}=\dfrac{4}{4}$, ou $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$.

   Solution 2
   On utilise les parties précédentes de la question pour reconnaitre qu'une équation de la forme $\dfrac{x}{e}+\dfrac{y}{f}=1$ a pour abscisse à l'origine e et pour ordonnée à l'origine f.
   Puisque la droite passe au point $(8,0)$, elle a une abscisse à l'origine de 8. Donc $e=8$.
   L'équation devient donc $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{f}=1$. Puisque la droite passe au point $(2,3)$, les coordonnées du point vérifient l'équation. On a donc $\dfrac{2}{8}+\dfrac{3}{f}=1$, ou $\dfrac{3}{f}=1-\dfrac{1}{4}$, ou $\dfrac{3}{f}=\dfrac{3}{4}$, d'où $f=4$.
   La droite a donc pour équation $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$.

2. (a) *Solution 1*

Une chandelle rouge de 100 cm met 600 minutes pour bruler au complet.

Elle brule donc au taux de $\frac{100 \text{ cm}}{600 \text{ min}}$, ou $\frac{1}{6}$ cm/min.

Après 180 minutes, la longueur de la chandelle rouge aura diminué de $\frac{1}{6}$ cm/min $\times$ 180 min, ou 30 cm.

Solution 2

Une chandelle rouge de 100 cm met 600 minutes pour bruler au complet.

La fraction de la chandelle rouge qui brule en 180 minutes est égale à $\frac{180}{600}$, ou $\frac{3}{10}$.

Puisque la chandelle avait une longueur initiale de 100 cm et que $\frac{3}{10}$ de 100 cm est égal à 30 cm, la chandelle rouge aura diminué de 30 cm en 180 minutes.

(b) La chandelle verte a une longueur initiale de 100 cm. Pour atteindre une longueur de 80 cm, elle doit perdre 20 cm en longueur, car $100 - 80 = 20$.

Or, 20 cm représente $\frac{20}{100}$, ou $\frac{1}{5}$ de la longueur initiale. Pour perdre 20 cm, la chandelle mettra donc $\frac{1}{5}$ du temps qu'elle mettrait à bruler au complet.

Puisque la chandelle verte met 480 minutes pour bruler au complet, elle mettra $\frac{1}{5}$ de 480 minutes, ou 96 minutes, pour atteindre une longueur de 80 cm.

(c) Puisque la chandelle rouge met 600 minutes pour bruler au complet, 60 minutes représentent $\frac{60}{600}$, ou $\frac{1}{10}$ de ce temps.

En 60 minutes, la longueur de la chandelle rouge diminuera de $\frac{1}{10}$ de 100 cm, ou 10 cm.

Après 60 minutes, la chandelle rouge aura donc une longueur de 90 cm.

Puisque la chandelle verte met 480 minutes pour bruler au complet, 60 minutes représentent $\frac{60}{480}$, ou $\frac{1}{8}$ de ce temps.

En 60 minutes, la longueur de la chandelle verte diminuera de $\frac{1}{8}$ de 100 cm, ou 12,5 cm.

Après 60 minutes, la chandelle verte aura donc une longueur de 87,5 cm.

Puisque $90 - 87{,}5 = 2{,}5$, la chandelle rouge aura 2,5 cm de plus que la chandelle verte après 60 minutes.

(d) *Solution 1*

D'après la partie (c), en 60 minutes, la longueur de la chandelle verte diminue de 2,5 cm de plus que celle de la chandelle rouge. Cela se poursuit à toutes les 60 minutes, car les chandelles brulent à des vitesses constantes.

Une différence en longueur de 2,5 cm à toutes les 60 minutes correspond au taux de $\frac{2{,}5}{60}$ cm/min., ou $\frac{5}{120}$ cm/min., ou $\frac{1}{24}$ cm/min.

Donc à toutes les 24 minutes, la chandelle verte perd 1 cm de plus en longueur que la chandelle rouge.

Donc, la chandelle rouge sera 7 cm plus longue que la chandelle verte après 7×24 minutes, ou 168 minutes.

Solution 2
La chandelle rouge brule au taux de 100 cm toutes les 600 minutes, ou $\frac{1}{6}$ cm/min.
La chandelle verte brule au taux de 100 cm toutes les 480 minutes, ou $\frac{5}{24}$ cm/min.
Donc, t minutes après avoir été allumée, la chandelle rouge aura perdu $\frac{1}{6}t$ cm en longueur.
Donc, t minutes après avoir été allumée, la chandelle verte aura perdu $\frac{5}{24}t$ cm en longueur.
Puisque les deux chandelles ont une longueur initiale de 100 cm, la chandelle rouge sera 7 m plus longue que la chandelle verte lorsque $(100 - \frac{1}{6}t) - (100 - \frac{5}{24}t) = 7$.
On simplifie pour obtenir $\frac{5}{24}t - \frac{1}{6}t = 7$. On multiplie chaque membre par 24 pour obtenir $5t - 4t = 7 \times 24$, d'où $t = 168$.
Donc, la chandelle rouge sera 7 m plus longue que la chandelle verte après 168 minutes.

3. (a) *Solution 1*
Le dernier nombre de la 7$^{\text{e}}$ rangée est égal à 7×8, ou 56.
Puisque la 7$^{\text{e}}$ rangée contient 7 nombres pairs consécutifs, on les écrit en ordre décroissant à partir de 56 : 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44
Dans le tableau, les nombres paraitront dans l'ordre suivant : 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56

Solution 2
Le dernier nombre de la 6$^{\text{e}}$ rangée est égal à 6×7, ou 42.
Le nombre pair suivant, soit 44, est donc le premier nombre de la 7$^{\text{e}}$ rangée.
Puisque la 7$^{\text{e}}$ rangée contient 7 nombres pairs consécutifs, on les écrit à partir de 44.
Les nombres de la 7$^{\text{e}}$ rangée sont donc 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56.

(b) Le dernier nombre de la 100$^{\text{e}}$ rangée est égal à 100×101, ou 10 100.
Le dernier nombre de la 99$^{\text{e}}$ rangée est égal à 99×100, ou 9900.
Le nombre pair suivant, soit 9902, est donc le premier nombre de la 100$^{\text{e}}$ rangée.
Le premier nombre de la 100$^{\text{e}}$ rangée est donc 9900 et le dernier nombre de cette rangée est 10 100.

(c) Le dernier nombre de la rangée r est égal à $r(r+1)$. Donc $D = r(r+1)$.
Le 1$^{\text{er}}$ nombre de la rangée $(r+2)$ est 2 de plus que le dernier nombre de la rangée $(r+1)$.
Or, le dernier nombre de la rangée $(r+1)$ est $(r+1)(r+2)$. Donc $P = (r+1)(r+2)+2$.
On veut que $P + D$ ait une valeur d'au moins 2013.
On a donc $P + D = (r+1)(r+2) + 2 + r(r+1) \geq 2013$.
Pour déterminer la plus petite valeur possible de r pour laquelle $P + D \geq 2013$, on résout l'inéquation suivante :

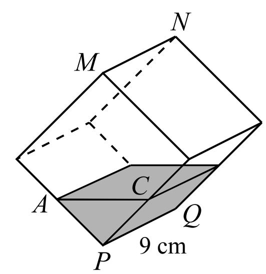
$$\begin{array}{rcl}
(r+1)(r+2)+2+r(r+1) & \geq & 2013 \\
r^2+3r+2+2+r^2+r & \geq & 2013 \\
2r^2+4r+4 & \geq & 2013 \\
r^2+2r+2 & \geq & 1006{,}5 \\
r^2+2r+1 & \geq & 1006{,}5-1 \\
(r+1)^2 & \geq & 1005{,}5 \\
\therefore\ r+1 \geq +\sqrt{1005{,}5} & \text{ou} & r+1 \leq -\sqrt{1005{,}5}
\end{array}$$

Puisque r est positif, on a $r+1 \geq \sqrt{1005{,}5}$, d'où $r \geq +\sqrt{1005{,}5} - 1$, ou $r \approx 30{,}7096$.
Donc, 31 est la plus petite valeur possible de r pour laquelle $P + D$ a une valeur d'au moins 2013.
Vérification : Puisque D est le dernier nombre de la rangée r, ou 31, alors $D = 31 \times 32$,

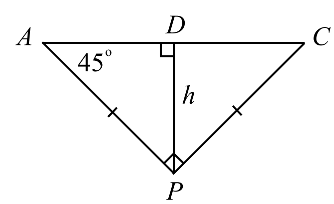
ou $D = 992$. Puisque P est le premier nombre de la rangée $r + 2$, ou 33, alors P est 2 de plus que le dernier nombre de la rangée 32. Donc $P = (32 \times 33) + 2$, ou $P = 1058$.
Donc $P + D = 1058 + 992 = 2050 \geq 2013$, tel que requis.
On doit aussi vérifier que 31 est la plus petite valeur de r pour laquelle $P + D \geq 2013$.
Puisque les nombres sont écrits en ordre croissant, il suffit de montrer que si $r = 30$, alors $P + D < 2013$.
Lorsque $r = 30$, $P + D = ((31 \times 32) + 2) + (30 \times 31) = 994 + 930 = 1924 < 2013$.

4. (a) L'eau a la forme d'un prisme à base carrée. La base de ce prisme est la même que la base du cube. Elle a une aire de 9×9 cm^2, ou 81 cm^2.
Puisque l'eau a une profondeur de 1 cm, l'eau a un volume de 1×81 cm^3, ou 81 cm^3.

(b) Si on fait subir au cube une rotation de 45° par rapport à l'axe de rotation PQ, l'arête MN sera directement au-dessus de l'arête PQ.
Dans cette position, l'eau a la forme d'un prisme à base triangulaire, comme dans la figure ci-contre.
La base est un triangle rectangle isocèle. Il est rectangle, car les deux faces du cube qui le forment sont perpendiculaires. Il est isocèle à cause de la symétrie causée par le fait que MN est directement au-dessus de PQ. (On pourrait dire qu'à cause de la symétrie, on a $AP = CP$.)

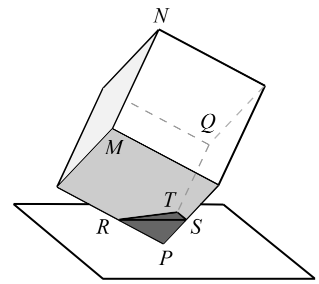


Comme on le voit dans la figure ci-contre, la profondeur de l'eau, h cm, est égale à la hauteur PD du triangle APC.
Dans le triangle APD, on a $\angle DAP = 45°$ (puisque le triangle APC est rectangle et isocèle). Donc $\angle APD = 180° - 90° - 45°$, ou $\angle APD = 45°$.
Le triangle APD est donc rectangle et isocèle et $AD = DP = h$ cm.

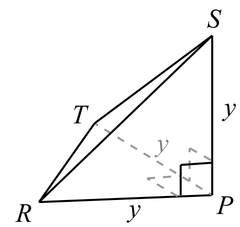


Le volume de l'eau est égal au produit de l'aire de la base APC du prisme et de la hauteur PQ du prisme, qui est de 9 cm.
Puisque $AD = DP = h$ cm et que les triangles ADP et CDP sont isométriques, alors $AC = 2AD = 2h$ cm.
L'aire du triangle APC, en cm^2, est égale à $\frac{1}{2}AC \times DP$, ou $\frac{1}{2}(2h) \times h$, ou h^2.
Le volume de l'eau est donc égal à $(h^2 \times 9)$ cm^3, ou $9h^2$ cm^3.
D'après la partie (a), ce volume est égal à 81 cm^3.
Puisque le volume de l'eau n'a pas changé, on a donc $9h^2 = 81$, d'où $h^2 = 9$, ou $h = 3$ (puisque $h > 0$).
La profondeur de l'eau dans le cube est donc de 3 cm.

(c) Dans cette position, l'eau a la forme d'un tétraèdre. Par symétrie, l'eau remonte également le long des arêtes, de manière que $PR = PS = PT$.
Trois des faces du tétraèdre, soit les triangles PRS, PST, et PTR, sont des triangles rectangles, puisque les arêtes du cube à un sommet sont perpendiculaires entre elles ($\angle RPS = \angle SPT = \angle TPR = 90°$).
Le tétraèdre a donc trois faces qui sont des triangles rectangles isocèles isométriques, soit les triangles PRS, PST et PTR.

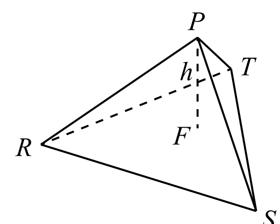


Puisque ces triangles sont isométriques, les côtés RS, ST et TR ont tous la même longueur. Donc, la quatrième face du tétraèdre, le triangle RST, est équilatéral.
Dans la figure ci-contre, le tétraèdre est placé de manière que sa base soit le triangle PRT. Puisque PS est perpendiculaire à la base (PS est perpendiculaire à PR et à PT), sa longueur est la hauteur du tétraèdre.
Le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire. Son volume est donc égal à $\frac{1}{3}|\triangle PRT| \times PS$ ($|\triangle PRT|$ étant l'aire du triangle PRT).

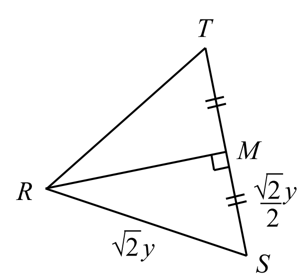


Soit $PR = PS = PT = y$ cm, comme dans la figure. (On rappelle que ces trois segments sont isométriques à cause de la symétrie.)
Dans le triangle PRT, PR est perpendiculaire à PT. Donc $|\triangle PRT| = \frac{1}{2}PR \times PT$, d'où $|\triangle PRT| = \frac{1}{2}y^2$ cm^2.
Le volume du tétraèdre est donc égal à $\frac{1}{3}|\triangle PRT| \times PS$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}y^2 \times y$ cm^3, ou $\frac{1}{6}y^3$ cm^3. D'après la partie (a), ce volume est égal à 81 cm^3. Puisque le volume d'eau n'a pas changé, on a $\frac{1}{6}y^3 = 81$, ou $y^3 = 486$, d'où $y = \sqrt[3]{486}$.

Dans la figure ci-contre, le tétraèdre est placé de manière que l'on puisse visualiser la hauteur $PF = h$, ce qui correspond à la profondeur de l'eau que l'on doit déterminer.
Puisque le sommet opposé N est directement au-dessus du sommet P, le segment PN est perpendiculaire à la base.
Soit F le point d'intersection de PN et de la base.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle PRS : $RS^2 = PR^2 + PS^2$, d'où $RS^2 = y^2 + y^2$, ou $RS^2 = 2y^2$.
Puisque $RS > 0$, alors $RS = \sqrt{2}y$ cm. Donc $RS = ST = TR = \sqrt{2}y$ cm.
(On aurait pu utiliser le fait que le triangle PRS est un triangle remarquable $45°-45°-90°$, d'où $PR : PS : RS = 1 : 1 : \sqrt{2}$.)
Puisque le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, son volume est égal à $\frac{1}{3}|\triangle RST| \times h$.
Pour déterminer l'aire du triangle RST, on trace une hauteur RM, comme dans la figure suivante. Le point M est le milieu de TS. Donc $MS = \frac{\sqrt{2}}{2}y$ cm.
D'après le théorème de Pythagore, $RS^2 = RM^2 + MS^2$, ou $RM^2 = (\sqrt{2}y)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2$.
Donc $RM^2 = 2y^2 - \frac{1}{2}y^2$, ou $RM^2 = \frac{3}{2}y^2$. Puisque $RM > 0$, alors $RM = \sqrt{\frac{3}{2}}y$ cm.
(On aurait pu utiliser le fait que le triangle RMS est un triangle remarquable $30° - 60° - 90°$, d'où $MS : SR : RM = 1 : 2 : \sqrt{3}$.)



L'aire du triangle RST est donc égale à $\frac{1}{2} \times TS \times RM$, ou $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}y \times \sqrt{\frac{3}{2}}y$ cm^2, ou $\frac{\sqrt{3}}{2}y^2$ cm^2.
Le volume du tétraèdre (celui de l'eau) est donc égal à $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right)h$ cm^3, ou $\frac{\sqrt{3}}{6}y^2h$ cm^3.
On reporte $y = \sqrt[3]{486}$ dans cette expression $\frac{\sqrt{3}}{6}y^2h$ du volume du tétraèdre qui devient $\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt[3]{486})^2h$. D'après la partie (a), ce volume est égal à 81 cm^3. Puisque le volume d'eau n'a pas changé, on a $\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt[3]{486})^2h = 81$, ou $h = \dfrac{6 \times 81}{\sqrt{3}(\sqrt[3]{486})^2}$ cm, ou $h = \dfrac{486}{\sqrt{3} \times 486^{\frac{2}{3}}}$ cm, ou $h = \dfrac{486^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}$ cm, ou $h \approx 4{,}539$ cm.
Au centième de centimètre près, la profondeur de l'eau dans le cube est de 4,54 cm.