Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2013

le jeudi 18 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 19 avril 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La marque moyenne des deux parties est de $\frac{103+117}{2}$, ou $\frac{220}{2}$, ou 110.

(b) *Solution 1*

Puisque Bruno avait une marque moyenne de 115 points après ses trois premières parties, il avait obtenu de 3×115 points, ou 345 points.
Or dans ses deux premières parties, il a obtenu un total de $(108+125)$ points, ou 233 points.
Dans sa troisième partie, Bruno a donc obtenu $(345 - 233)$ points, ou 112 points.

Solution 2

Soit x le nombre de points que Bruno a obtenus dans sa troisième partie.
Puisqu'il avait une moyenne de 115 points après ses trois premières parties, alors $\frac{108+125+x}{3} = 115$.
Donc $108 + 125 + x = 115 \times 3$, d'où $233 + x = 345$, ou $x = 345 - 233$, ou $x = 112$.
Dans sa troisième partie, Bruno a donc obtenu 112 points.

(c) *Solution 1*

Puisque Carl avait une marque moyenne de 113 points après ses trois premières parties, il avait un total de 3×113 points, ou 339 points.
Si Carl obtient une moyenne de 120 points dans ses cinq parties, il aura un total de 5×120 points, ou 600 points.
Dans ses quatrième et cinquième parties, il aura donc un total de $(600 - 339)$ points, ou 261 points.
Or, Carl a obtenu le même nombre de points dans ces deux parties. Puisque $\frac{261}{2} = 130{,}5$, il a obtenu 130,5 points dans chaque partie, ce qui est impossible puisque aux quilles, la marque est toujours un nombre entier de points.
Donc, il est impossible que Carl ait obtenu une marque moyenne de 120 points dans ses cinq parties.

Solution 2

Puisque Carl avait une marque moyenne de 113 points après ses trois premières parties, il avait un total de 3×113 points, ou 339 points.
Soit y le nombre de points que Carl a obtenus dans chacune des quatrième et cinquième parties (puisqu'il a obtenu le même nombre de points dans chacune).
Si Carl a une moyenne de 120 points dans ses cinq parties, alors $\frac{339+y+y}{5} = 120$.
Donc $339 + 2y = 120 \times 5$, d'où $339 + 2y = 600$, ou $2y = 261$, ou $y = 130{,}5$.
Puisque aux quilles la marque est toujours un nombre entier de points, ce résultat est rejeté. Donc, il est impossible que Carl ait obtenu une marque moyenne de 120 points dans ses cinq parties.

2. (a) La ligne qui délimite le champ est formée de deux segments de 100 m et de deux demi-cercles d'un diamètre de 60 m.
Le périmètre du champ est donc égal à la somme des deux longueurs de segments, soit 200 m, ajoutée à la circonférence d'un cercle ayant un diamètre de 60 m, soit $\pi(60)$ m.
Le périmètre du champ est donc de $(200 + 60\pi)$ m.

(b) Puisque Alice court du point C au point D en suivant la ligne qui délimite le champ, elle peut le faire de deux façons. Dans chaque cas, elle court le long d'un segment de 100 m et le long d'un demi-cercle ayant un diamètre de 60 m.
La distance qu'elle parcourt est donc un demi-périmètre du champ, soit $(100 + 30\pi)$ m.
Béatrice court en ligne droite du point C au point D.
Puisque le segment de 100 m et le diamètre de 60 m sont perpendiculaires, CD est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 100 m et 60 m.

D'après le théorème de Pythagore, $CD^2 = 100^2 + 60^2$, d'où $CD = \sqrt{13\,600}$ m (puisque $CD > 0$).
Puisque $100 + 30\pi - \sqrt{13\,600} \approx 78$, Alice parcourt environ 78 m de plus que Béatrice.

(c) La ligne qui délimite l'extérieur de la piste est composée de deux segments de 100 m et de deux demi-cercles ayant un diamètre de $(60 + x + x)$ m, ou $(60 + 2x)$ m.
La longueur de cette ligne est donc égale à la somme des deux longueurs de segments, soit 200 m, ajoutée à la circonférence d'un cercle ayant un diamètre de $(60 + 2x)$ m, ou $\pi(60 + 2x)$ m. Elle est donc égale à $(200 + (60 + 2x)\pi)$ m.
Puisque la limite extérieure de la piste a un périmètre de 450 m, alors
$200 + (60 + 2x)\pi = 450$.
Donc $(60 + 2x)\pi = 250$, ou $60 + 2x = \frac{250}{\pi}$, d'où $2x = \frac{250}{\pi} - 60$. Donc $x = \frac{125}{\pi} - 30$, ou $x \approx 9{,}789$ m.
Arrondie à l'entier près, x a une valeur de 10.

3. (a) Le nombre de quatre chiffres, $51A3$, est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
La somme des chiffres est égale à $5 + 1 + A + 3$, ou $9 + A$.
Les valeurs du chiffre A pour lesquelles $9 + A$ est divisible par 3 sont 0, 3, 6 et 9.

(b) Le nombre de quatre chiffres, $742B$ est divisible par 2 s'il est pair.
Donc, $742B$ est divisible par 2 si B est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8.
Le nombre $742B$ est divisible par 3 si $7 + 4 + 2 + B$, ou $13 + B$, est divisible par 3.
Donc, $742B$ est divisible par 3 si B est égal à 2, 5 ou 8.
Les valeurs de B pour lesquelles le nombre $742B$ est divisible par 6 (c'est-à-dire par 2 et par 3) sont $B = 2$ et $B = 8$.

(c) Un entier est divisible par 15 s'il est divisible par 3 et par 5 (puisque 3 et 5 ont un produit de 15 et qu'ils ne partagent aucun diviseur commun).
L'entier $1234PQPQ$ est divisible par 5 si son chiffre des unités, Q, est égal à 0 ou à 5.
L'entier $1234PQPQ$ est divisible par 3 si la somme de ses chiffres, $1+2+3+4+P+Q+P+Q$, ou $10 + 2P + 2Q$, est divisible par 3.
On considère les cas où $Q = 0$ et $Q = 5$.
Lorsque $Q = 0$, la somme des chiffres, $10 + 2P + 2Q$, est égale à $10 + 2P$.
Dans ce cas, $10 + 2P$ est divisible par 3 lorsque P est égal à 1, 4 ou 7.
Lorsque $Q = 5$, la somme des chiffres, $10 + 2P + 2Q$, est égale à $10 + 2P + 10$ ou $20 + 2P$.
Dans ce cas, $20 + 2P$ est divisible par 3 lorsque P est égal à 2, 5 ou 8.
Les valeurs du couple (P, Q) pour lesquelles le nombre $1234PQPQ$ est divisible par 15 sont $(1, 0)$, $(4, 0)$, $(7, 0)$, $(2, 5)$, $(5, 5)$ et $(8, 5)$.

(d) Un entier est divisible par 12 s'il est divisible par 3 et par 4 (puisque 3 et 4 ont un produit de 12 et qu'ils ne partagent aucun diviseur commun).
Dans le produit $2CC \times 3D5$, $3D5$ est impair et ne peut être divisible par 4.
Donc, $2CC$ doit être divisible par 4.
Puisque $2CC$ est égal à $2 \times 100 + 10 \times C + C$, ou $200 + 11 \times C$, et que 200 est divisible par 4, alors $11 \times C$ doit être divisible par 4.
Puisque 11 n'est pas divisible par 2 ou par 4, alors C doit être divisible par 4.
Le produit $2CC \times 3D5$ est donc divisible par 4 lorsque C est égal à 0, 4 ou 8.
On considère les cas où $C = 0$, $C = 4$ et $C = 8$.
Lorsque $C = 0$, le produit $2CC \times 3D5$ devient $200 \times 3D5$.
Le nombre 200 n'est pas divisible par 3, puisque la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3. Donc, le nombre $3D5$ doit être divisible par 3, c'est-à-dire que $8 + D$ doit être

divisible par 3.
Les valeurs de D pour lesquelles $8 + D$ est divisible par 3 sont 1, 4 et 7.
Dans ce cas, il y a trois couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12.
Lorsque $C = 4$, le produit $2CC \times 3D5$ devient $244 \times 3D5$.
Le nombre 244 n'est pas divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3.
Donc, le nombre $3D5$ doit être divisible par 3. Comme dans le cas précédent, il y a trois couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12.
Lorsque $C = 8$, le produit $2CC \times 3D5$ devient $288 \times 3D5$.
Le nombre 288 est divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Donc, le produit $288 \times 3D5$ est divisible par 3 quelle que soit la valeur du chiffre D.
Donc, D peut être n'importe quel chiffre de 0 à 9.
Dans ce cas, il y a dix couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12.
En tout, le nombre de couples de chiffres C et D pour lesquels le produit $2CC \times 3D5$ est divisible par 12 est égal à $3 + 3 + 10$, ou 16.

4. (a) Puisque la position initiale du point est $(0, 0)$ et que sa position finale est $(1, 0)$, le point se déplace d'une unité vers la droite et de 0 unité vers le haut ou le bas.
Puisque le point se déplace de 0 unité vers le haut ou le bas, alors le nombre de déplacements $\uparrow$ doit être égal au nombre de déplacements $\downarrow$.
Puisqu'il y a 4 déplacements ou moins, les façons possibles incluent $0 \uparrow$ et $0 \downarrow$ (0 déplacement en tout), ou $1 \uparrow$ et $1 \downarrow$ (2 déplacements en tout), ou $2 \uparrow$ et $2 \downarrow$ (4 déplacements en tout).
Puisque la position finale est 1 unité à la droite de la position initiale, alors le nombre de déplacements $\rightarrow$ est 1 de plus que le nombre de déplacements $\leftarrow$.
Puisqu'il y a 4 déplacements ou moins, les façons possibles incluent $1 \rightarrow$ et $0 \leftarrow$ (1 déplacement en tout), ou $2 \rightarrow$ et $1 \leftarrow$ (3 déplacements en tout).

S'il y a 0 déplacement haut/bas, il peut y avoir 1 ou 3 déplacements gauche/droite.

Avec 0 déplacement haut/bas et 1 déplacement gauche/droite, la série de déplacements est $\rightarrow$.

Avec 0 déplacement haut/bas et 3 déplacements gauche/droite, la série de déplacements est $\leftarrow\rightarrow\rightarrow$ ou n'importe quelle permutation de ces déplacements.
Il y a 3 permutations possibles des déplacements $\leftarrow\rightarrow\rightarrow$. (En effet, le déplacement $\leftarrow$ peut être placé en 1re, en 2e ou en 3e position, les deux autres déplacements étant chacun $\rightarrow$.)

S'il y a 2 déplacements haut/bas, il peut y avoir 1 déplacement gauche/droite.
Avec 2 déplacements haut/bas et 1 déplacement gauche/droite, la série de déplacements est $\uparrow\downarrow\rightarrow$ ou n'importe quelle permutation de ces déplacements.
Il y a 6 permutations possibles des déplacements $\uparrow\downarrow\rightarrow$. (En effet, il y a 3 déplacements possibles pour la 1re position ; dans chaque cas, il y a 2 déplacements possibles pour la 2e position ; dans chacue cas, il y a 1 déplacement possible pour la 3e position. En tout, il y a $3 \times 2 \times 1$ permutations, ou 6 permutations.)

S'il y a 4 déplacements haut/bas, il peut y avoir 0 déplacement gauche/droite, ce qui est impossible.

Le nombre total de façons possibles pour que le point se retrouve en position $(1, 0)$ en 4 déplacements ou moins est égal à $1 + 3 + 6$, ou 10.

(b) Si le point subit exactement 4 déplacements, ces déplacements peuvent être :
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements gauche/droite, ou
– n'importe quelle permutation de 3 déplacements gauche/droite et 1 déplacement haut/bas, ou
– n'importe quelle permutation de 2 déplacements gauche/droite et n'importe quelle permutation de 2 déplacements haut/bas, ou
– 1 déplacement gauche/droite et n'importe quelle permutation de 3 déplacements haut/bas, ou
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements haut/bas.

Étant donné un ensemble particulier de déplacements, toute permutation de ces déplacements fera en sorte que le point arrivera à la même position finale. On peut donc considérer que tous les déplacements gauche/droite se font avant les déplacements haut/bas.

Quatre déplacements gauche/droite peuvent être formés de 4 à droite (qui se terminent en $x = 4$), 3 à droite et 1 à gauche (qui se terminent en $x = 2$), 2 à droite et 2 à gauche (qui se terminent en $x = 0$), 1 à droite et 3 à gauche (qui se terminent en $x = -2$), ou 4 à gauche (qui se terminent en $x = -4$).

Trois déplacements gauche/droite peuvent être formés de 3 à droite, 2 à droite et 1 à gauche, 1 à droite et 2 à gauche, ou 3 à gauche, qui se terminent respectivement en $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -3$.

Deux déplacements gauche/droite peuvent être formés de 2 à droite, 1 à droite et 1 à gauche, ou 2 à gauche, qui se terminent respectivement en $x = 2$, $x = 0$, $x = -2$.

Un déplacement gauche/droite peut être 1 à droite ou 1 à gauche, qui se termine respectivement en $x = 1$, $x = -1$.

Plus de déplacements gauche/droite se termine en $x = 0$.

De même, quatre déplacements haut/bas peuvent se terminer respectivement en $y = 4$, $y = 2$, $y = 0$, $y = -2$, $y = -4$, trois déplacements haut/bas peuvent se terminer respectivement en $y = 3$, $y = 1$, $y = -1$, $y = -3$, deux déplacements haut/bas peuvent se terminer respectivement en $y = 2$, $y = 0$, $y = -2$, un déplacement haut/bas peut se terminer respectivement en $y = 1$, $y = -1$, et plus de déplacements haut/bas se termine en $y = 0$. (Pour le voir de façon explicite, on peut reprendre les arguments précédents en remplaçant « gauche/droite » par « haut/bas » et en remplaçant les abscisses par des ordonnées.)

Étant donné un nombre particulier de déplacements, il faut considérer toutes les répartitions de ces déplacements à la verticale et à l'horizontale.

Puisque le point subit exactement 4 déplacements, on peut avoir :
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements droite/gauche et plus de déplacements haut/bas ($x = 4{,}2{,}0{,}-2{,}-4$ et $y = 0$), qui se terminent en $(4{,}0),(2{,}0),(0{,}0),(-2{,}0),(-4{,}0)$, ou
– n'importe quelle permutation de 3 déplacements droite/gauche et 1 déplacement haut/bas ($x = 3{,}1,-1,-3$ et $y = 1,-1$), qui se terminent en $(3{,}1),(3,-1),(1{,}1),(1,-1),(-1{,}1)$, $(-1,-1),(-3{,}1),(-3,-1)$, ou
– n'importe quelle permutation de 2 déplacements droite/gauche et n'importe quelle permutation de 2 déplacements haut/bas ($x = 2{,}0,-2$ et $y = 2{,}0,-2$), qui se terminent en $(2{,}2),(2{,}0),(2,-2),(0{,}2),(0{,}0),(0,-2),(-2{,}2),(-2{,}0),(-2,-2)$, ou
– 1 déplacement droite/gauche et n'importe quelle permutation de 3 déplacements haut/bas ($x = 1{,}-1$ et $y = 3{,}1{,}-1{,}-3$), qui se terminent en $(1{,}3),(1{,}1),(1{,}-1),(1{,}-3),(-1{,}3),(-1{,}1)$, $(-1,-1),(-1,-3)$, ou
– n'importe quelle permutation de 4 déplacements haut/bas et plus de déplacements droite/gauche ($x = 0$ et $y = 4{,}2{,}0,-2,-4$), qui se terminent en $(0{,}4),(0{,}2),(0{,}0)$,

$(0,-2)$,$(0,-4)$.

Après une observation attentive de la liste des points ci-haut, nous voyons qu'un certain nombre de points peut être atteint plus qu'une façon.

En comptant le nombre total de points distincts, nous devons prendre soin de compter le même point plusieurs fois.

Dans le premier point ci-dessus, il y a 5 points distincts.

Dans le deuxième point, il existe 8 nouveaux points qui n'ont pas encore été prise en compte.

Dans le troisième point, il y a 9 points, pourtant, nous avons déjà compté les 3 points (2,0), (0,0) and $(-2{,}0)$.

Dans le quatrième point, il y a 8 points, pourtant, nous avons déjà compté les 4 points (1,1), $(1,-1)$, $(-1{,}1)$, and $(-1,-1)$.

Dans le dernière point, il y a 5 points, pourtant, nous avons déjà compté les 3 points (0,2), (0,0) and $(0,-2)$.

Le nombre de positions possibles est donc égal à $5+8+(9-3)+(8-4)+(5-3)$, ou 25.

(c) Le point peut se retrouver en position $(-7,12)$ après 19 déplacements, soit 7 déplacements vers la gauche et 12 déplacements vers le haut.

Il faut au moins 19 déplacements pour arriver au point $(-7,12)$, puisqu'il faut au moins 7 déplacements vers la gauche et au moins 12 déplacements vers le haut (avec possiblement d'autres déplacements qui s'annulent les uns les autres).

Le point peut aussi atteindre la position $(-7,12)$ en 21 déplacements : 7 vers la gauche, 12 vers le haut, 1 vers la gauche, 1 vers la droite.

Le point peut aussi atteindre la position $(-7,12)$ en 23 déplacements : 7 vers la gauche, 12 vers le haut, 2 vers la gauche, 2 vers la droite.

De même, le point peut aussi atteindre la position $(-7,12)$ en $19+2m$ déplacements, m étant n'importe quel entier non négatif : 7 vers la gauche, 12 vers le haut, m vers la gauche, m vers la droite.

À mesure que m augmente de 0 à 40, l'expression $19+2m$ prend toutes les valeurs entières impaires de 19 à 99, soit 41 valeurs.

On a démontré que si $k<19$, le point ne peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements et que si $k\geq 19$ et k est impair, le point peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements.

Il reste à démontrer que si $k\geq 19$ et k est pair, alors le point ne peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements. Ceci complètera la démonstration et donnera la réponse de 41 valeurs obtenue ci-haut.

On suppose que k est un entier pair, $k\geq 19$, et que le point peut atteindre la position $(-7,12)$ en k déplacements.

Ces k déplacements consistent en h déplacements horizontaux (gauche/droite) et v déplacements verticaux (haut/bas). Donc $k=h+v$.

Puisque k est pair, alors h et v doivent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs. (En effet, la somme de deux entiers pairs est paire, la somme de deux entiers impairs est paire et la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.)

Supposons que h est pair. Les h déplacements horizontaux consistent en d déplacements vers la droite et g déplacements vers la gauche. On a donc $h=d+g$ et $d-g=-7$, puisque le point d'arrivée a une abscisse de -7.

Puisque h est pair et que $h=d+g$, alors d et g sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Or puisque d et g sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs, alors $d-g$ est pair.

Ceci contredit la condition que $d - g = -7$.
La supposition que h est pair est donc fausse. Donc h est impair.
Donc v est impair.
Les v déplacements verticaux consistent en u déplacements vers le haut et b déplacements vers le bas. Donc $v = u + b$ et $u - v = 12$.
Puisque $v = u + b$ est impair, alors u et b doivent être l'un pair et l'autre impair. Donc $u - b$ est impair et ne peut donc pas être égal à 12.
Donc, aucune de ces alternatives n'est vraiment possible.
Il est donc impossible pour le point d'atteindre la position $(-7, 12)$ dans un nombre pair de déplacements.
Il existe donc 41 entiers strictement positifs k, $k \leq 100$, pour lesquels le point peut atteindre la position $(-7, 12)$ en k déplacements.

(d) On considère une position P que le point peut atteindre en 47 déplacements. Le point peut aussi atteindre la position P en 49 déplacements. Il suffirait d'ajouter $\rightarrow\leftarrow$ à la fin des 47 déplacements précédents.
Donc, chacune des 2304 positions que le point peut atteindre en 47 déplacements peut aussi être atteinte en 49 déplacements.
Toute autre position Q que le point peut atteindre en 49 déplacements ne peut pas être atteinte en 47 déplacements.
On considère une série de déplacements tels que le point atteint le point Q en 49 déplacements. Cette série ne peut inclure un déplacement vers la gauche et un déplacement vers la droite, ni un déplacement vers le haut et un déplacement vers le bas, car deux tels déplacements s'annuleraient de manière à permettre au point d'atteindre la position Q en 47 déplacements.
Donc, une série de déplacements qui permettent au point d'atteindre la position Q doivent inclure h déplacements horizontaux et v déplacements verticaux (avec $h+v = 49$), où tous les déplacements horizontaux sont dans la même direction et tous les déplacements verticaux sont dans la même direction.
Si $h = 0$, alors $v = 49$. Le point atteint donc la position $(0, 49)$ (49 déplacements vers le haut) ou la position $(0, -49)$ (49 déplacements vers le bas).
De même si $v = 0$, le point peut atteindre la position $(49, 0)$ ou la position $(-49, 0)$.
Si h et v sont tous les deux non nuls, il y a des déplacements horizontaux et des déplacements verticaux.
On considère le cas où il y a h déplacements vers la droite et v déplacements vers le haut, $h + v = 49$.
Puisque $h \geq 1$ et $v \geq 1$, alors h peut prendre n'importe quelle valeur de 1 à 48 ; v prendrait des valeurs correspondantes de 48 à 1. Le point atteindrait les positions $(1, 48), (2, 47), \ldots, (47, 2), (48, 1)$.
Il s'agit de 48 positions distinctes.
De même, si les déplacements sont vers la droite et vers le bas, ou vers la gauche et vers le haut, ou vers la gauche et vers le bas, on obtient 48 positions distinctes dans chaque cas.
Donc, le nombre de positions Q que le point peut atteindre en 49 déplacements, mais pas en 47 déplacements, est égal à $2 + 2 + 4 \times 48$, ou 196.
Le nombre de positions que le point peut atteindre en 49 positions est donc égal à $2304 + 196$, ou 2500.