Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2013

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 21 février 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

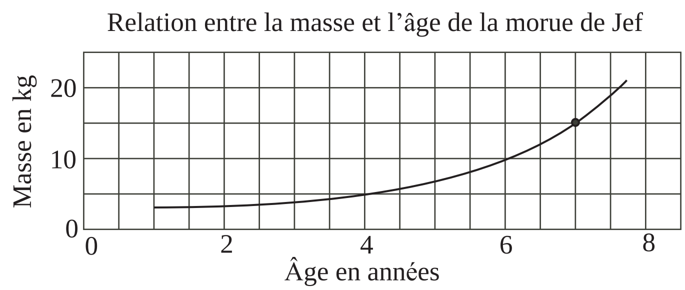
le vendredi 22 février 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{10^2+6^2}{2} = \dfrac{100+36}{2} = \dfrac{136}{2} = 68$

Réponse : (D)

2. Sur l'axe vertical, une masse de 15 kg est à mi-chemin entre 10 kg et 20 kg.
La courbe atteint le niveau de 15 kg à un point situé à mi-chemin entre 6 et 8 sur l'axe horizontal.



Donc, la morue a 7 ans lorsqu'elle a une masse de 15 kg.

Réponse : (B)

3. Chaque angle intérieur d'un carré mesure 90°. Donc $\angle SPQ = 90°$.
Chaque angle intérieur d'un triangle équilatéral mesure 60°. Donc $\angle TPQ = 60°$.
La diagonale PR du carré $PQRS$ est la bissectrice de l'angle SPQ. Donc $\angle SPR = \angle RPQ = 45°$.
Donc $\angle TPR = \angle TPQ + \angle QPR$, d'où $\angle TPR = 60° + 45°$, ou $\angle TPR = 105°$.

Réponse : (B)

4. Puisque les coches indiquent que le cylindre est divisé en quatre parties de même volume, on voit que le niveau de lait est légèrement inférieur à $\frac{3}{4}$ de la hauteur, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}$ du cylindre plein.
Or, $\frac{3}{4}$ du volume du cylindre est égal à $\frac{3}{4} \times 50$ L, ou 37,5 L.
Le choix de réponse qui est légèrement inférieur à 37,5 L est 36 L, soit le choix (D).

Réponse : (D)

5. Puisque $PQRS$ et $WXYZ$ sont des rectangles, alors $SR = PQ = 30$ et $WX = ZY = 15$.
Puisque $SX = 10$, alors $WS = WX - SX$, d'où $WS = 15 - 10$, ou $WS = 5$.
Donc $WR = WS + SR$, d'où $WR = 5 + 30$, ou $WR = 35$.

Réponse : (E)

6. Puisque $x = 11$ et $y = 8$, l'équation $2x + 3z = 5y$ devient $2 \times 11 + 3z = 5 \times 8$, d'où $3z = 40 - 22$, ou $3z = 18$. Donc $z = 6$.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque $(x+a)(x+8) = x^2+bx+24$ pour toutes valeurs de x, alors $x^2+ax+8x+8a = x^2+bx+24$ pour toutes valeurs de x et donc $x^2 + (a+8)x + 8a = x^2 + bx + 24$ pour toutes valeurs de x.
Puisque l'égalité est vraie pour toutes valeurs de x, les coefficients correspondants doivent être égaux dans les deux membres de l'équation. Donc, $a + 8 = b$ et $8a = 24$.
Puisque $8a = 24$, alors $a = 3$. On reporte $a = 3$ dans l'équation $a + 8 = b$ pour obtenir $b = 11$.
Donc $a + b = 3 + 11$, ou $a + b = 14$.

Solution 2
Puisque $(x + a)(x + 8) = x^2 + bx + 24$ pour toutes valeurs de x, alors l'égalité est vraie pour les valeurs particulières $x = 0$ et $x = 1$.
Lorsque $x = 0$, l'équation devient $(0 + a)(0 + 8) = 0 + 0 + 24$, d'où $8a = 24$, ou $a = 3$.

Lorsque $x = 1$, l'équation devient $(1 + 3)(1 + 8) = 1 + b + 24$, d'où $36 = b + 25$, ou $b = 11$.
Donc $a + b = 3 + 11$, ou $a + b = 14$.

Réponse : (D)

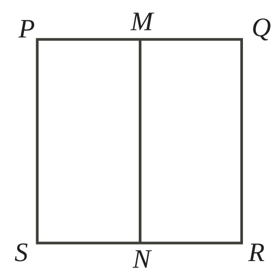
8. L'ensemble initial contient 11 nombres qui ont une somme de 66.
Si on enlève un nombre de l'ensemble, il restera 10 nombres dans l'ensemble.
Ces 10 nombres auront une moyenne de 6,1 s'ils ont une somme de $10 \times 6{,}1$, ou 61.
Puisque les 11 nombres de l'ensemble initial ont une somme de 66 et que les 10 nombres du nouvel ensemble ont une somme de 61, le nombre enlevé doit être 5, car $66 - 61 = 5$.

Réponse : (B)

9. Puisqu'il y a un rabais de 20 % sur le prix du vélo qui se vend normalement 320 \$, alors Sylviane épargne $20\,\% \times 320\,\$$, ou $0{,}2 \times 320\,\$$, ou 64 \$ dans l'achat du vélo.
Puisqu'il y a un rabais de 10 % sur le prix du casque qui se vend normalement 80 \$, alors Sylviane épargne $10\,\% \times 80\,\$$, ou $0{,}1 \times 80\,\$$, ou 8 \$ dans l'achat du casque.
Le coût total du vélo et du casque, au prix régulier, est de $320\,\$ + 80\,\$$, ou 400 \$.
Le total des épargnes est de $64\,\$ + 8\,\$$, ou 72 \$.
Or $\frac{72}{400} = 0{,}18 = 18\,\%$.
Sylviane obtient un rabais de 18 % sur l'achat total.

Réponse : (A)

10. Soit x la longueur des côtés du carré $PQRS$.
Donc $PQ = QR = RS = SP = x$.
Puisque M est le milieu de PQ, alors $PM = \frac{1}{2}x$.
Le périmètre du rectangle $PMNS$, en fonction de x, est égal à :



$$2(PM + PS) = 2(\tfrac{1}{2}x + x) = 3x$$

(On sait que $SN = PM = \frac{1}{2}x$, puisque N est le milieu de RS.)

De plus, $MN = PS = x$, puisque MN est parallèle à PS et qu'il joint deux segments parallèles.)
Puisque le rectangle $PMNS$ a un périmètre de 36, alors $3x = 36$, ou $x = 12$.
L'aire du carré $PQRS$ est égale à x^2, ou 144.

Réponse : (D)

11. Lundi, Ramya a lu $\frac{1}{5}$ de 300 pages, c'est-à-dire $\frac{1}{5} \times 300$ pages, ou 60 pages.
Après lundi, il lui restait $(300 - 60)$ pages, ou 240 pages à lire.
Mardi, Ramya a lu $\frac{4}{15}$ de ces 240 pages, c'est-à-dire $\frac{4}{15} \times 240$ pages, ou $\frac{960}{15}$ pages, ou 64 pages.
Lundi et mardi, elle a lu un total de $(60 + 64)$ pages, ou 124 pages.

Réponse : (A)

12. Il y a 10 nombres dans la liste. On remarque que :

$$(-1)^4 = 1^4 = 1 \qquad (-3)^4 = 3^4 = 81 \qquad (-5)^4 = 5^4 = 625$$

$$(-7)^4 = 7^4 = 2401 \qquad (-9)^4 = 9^4 = 6561$$

Donc, si $m = -3, -1, 1, 3$, alors $m^4 < 100$. Si $m = -9, -7, -5, 5, 7, 9$, alors $m^4 > 100$.
Il y a donc 6 nombres dans la liste dont la 4^e^ puissance est supérieure à 100, c'est-à-dire 6 résultats favorables sur 10.
Donc, la probabilité pour que $m^4 > 100$ est de $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{5}$.

Réponse : (E)

13. On remarque que $64 = 2^6$ et $512 = 2^9$.
On peut récrire l'équation $512^x = 64^{240}$ sous la forme $(2^9)^x = (2^6)^{240}$, ou $2^{9x} = 2^{6(240)}$.
Puisque les bases sont égales dans cette dernière équation, les exposants doivent être égaux.
Donc $9x = 6(240)$, ou $x = \frac{1440}{9}$, ou $x = 160$.

Réponse : (D)

14. Puisque 25 % de l'argent reçu provenait des parents et que $100\,\% - 25\,\% = 75\,\%$, alors 75 % de l'argent provenait des enseignants et des élèves.
Puisque le rapport de la quantité d'argent provenant des enseignants à la quantité d'argent provenant des élèves était de 2 : 3, alors les élèves ont donné $\frac{3}{2+3}$, ou $\frac{3}{5}$ de ce 75 %.
Les élèves ont donc donné $\frac{3}{5} \times 75\,\%$, ou 45 % de tout l'argent reçu.
Donc, le rapport de la quantité d'argent provenant des parents à la quantité d'argent provenant des élèves était de 25 % : 45 %, ou 25 : 45, ou 5 : 9.

Réponse : (C)

15. Soit n le nombre de biscuits dans le bocal.
Soit r le nombre de raisins contenus dans chacun des $n - 1$ petits biscuits identiques.
Il y a donc $r + 1$ raisins dans le grand biscuit.
Si on enlevait un raisin du grand biscuit, il contiendrait r raisins et alors chacun des n biscuits aurait r raisins. Le nombre total de raisins serait alors égal à $100 - 1$, ou 99.
On aurait donc $nr = 99$.
(On aurait pu obtenir cette équation en constatant qu'il y a $n-1$ biscuits qui contiennent r raisins et 1 biscuit qui contient $r+1$ raisins. Puisqu'il y a 100 raisins en tout, alors $(n-1)r+(r+1) = 100$, d'où $nr - r + r + 1 = 100$, ou $nr = 99$.)
Puisque n et r sont des entiers positifs et qu'ils ont un produit de 99, les possibilités sont :

$$99 = 99 \times 1 = 33 \times 3 = 11 \times 9 = 9 \times 11 = 3 \times 33 = 1 \times 99$$

Puisque n peut varier de 5 à 10, on doit avoir $99 = 9 \times 11$. Donc $n = 9$ et $r = 11$.
Puisque les petits biscuits contiennent 11 raisins chacun et que le grand biscuit contient 1 raisin de plus, le grand biscuit contient 12 raisins.

Réponse : (E)

16. Soit c la longueur des côtés de chaque petit carreau.
On sait que chacun de ces carreaux a une diagonale de longueur 2. D'après le théorème de Pythagore, $c^2 + c^2 = 2^2$, ou $2c^2 = 4$, ou $c^2 = 2$. Donc $c = \sqrt{2}$, puisque $c > 0$.
Or, $PQ = 5c$ et $PS = 12c$. D'après le théorème de Pythagore, puisque $QS > 0$, on a :

$$QS = \sqrt{PQ^2 + PS^2} = \sqrt{(5c)^2 + (12c)^2} = \sqrt{25c^2 + 144c^2} = \sqrt{169c^2} = 13c$$

Puisque $QS = 13c$ et que $c = \sqrt{2}$, alors $QS = 13\sqrt{2}$, ou $QS \approx 18{,}38$.
Le choix de réponse le plus près est 18.

Réponse : (A)

17. *Solution 1*
Soit $n, n+1, n+2, n+3$ et $n+4$ les cinq entiers consécutifs représentés par p, q, r, s et t.
La somme des deux plus grands entiers est égale à $(n+3)+(n+4)$, ou $2n+7$. La somme de n'importe quels deux autres entiers est donc inférieure à $2n+7$.
La somme des deux plus petits entiers est égale à $n+(n+1)$, ou $2n+1$. La somme de n'importe quels deux autres entiers est donc supérieure à $2n+1$.

Donc, la plus grande différence possible entre les sommes de deux paires d'entiers est égale à $(2n+7)-(2n+1)$, ou 6.
Selon l'énoncé, $p+q=63$ et $s+t=57$, d'où $(p+q)-(s+t)=6$. Il s'ensuit que p et q sont les plus grands nombres de la liste et que s et t sont les deux plus petits nombres de la liste.
Donc $p+q=(n+3)+(n+4)=63$, d'où $2n+7=63$, ou $2n=56$, ou $n=28$.
Puisque r doit être l'entier du milieu, alors $r=n+2$, d'où $r=30$.

Solution 2
Soit $n, n+1, n+2, n+3$ et $n+4$ les cinq entiers consécutifs représentés par p, q, r, s et t.
La somme des cinq entiers est égale à $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$, ou $5n+10$.
Selon l'énoncé, $p+q=63$ et $s+t=57$.
La somme des cinq entiers est donc égale à $p+q+r+s+t$, ou $63+r+57$, ou $120+r$.
On compare les deux expressions pour la somme des cinq entiers. On obtient $5n+10=120+r$, ou $r=5n-110$.
Or, cette équation peut s'écrire sous la forme $r=5(n-22)$, ce qui indique que r est un multiple de 5.
Selon les choix de réponse, on a donc $r=20$ ou $r=30$.
Si $r=20$, alors $20=5(n-22)$, d'où $n-22=4$, ou $n=26$. Dans ce cas, r n'est pas un entier de n à $n+4$. Donc, r ne peut pas être égal à 20.
Si $r=30$, alors $30=5(n-22)$, d'où $n-22=6$, ou $n=28$. Les cinq entiers sont donc $28, 29, 30, 31$ et 32. Si on pose $p=31$ et $q=32$ (ou $p=32$ et $q=31$) et $t=28$ et $s=29$ (ou $t=29$ et $s=28$), les conditions de l'énoncé sont vérifiées.
Donc $r=30$.

Réponse : (E)

18. Puisque p est un entier strictement positif, alors $p \geq 1$, d'où $0 < \dfrac{1}{p} \leq 1$.

Puisque n est un entier strictement positif, alors $n \geq 1$, d'où $n+\dfrac{1}{p} > 1$. Donc $0 < \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}} < 1$.

Donc $m < m + \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}} < m+1$. Puisque $m + \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}} = \dfrac{17}{3}$, ou $m + \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}} = 5\frac{2}{3}$, et que m est un entier, alors $m=5$.
L'équation $m + \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}} = \dfrac{17}{3}$ devient donc $\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{p}} = \dfrac{2}{3}$, ou $n+\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{2}$, ou $n+\dfrac{1}{p}=1\frac{1}{2}$.
Puisque $n < n+\dfrac{1}{p} \leq n+1$ et que n est un entier, alors $n=1$.
L'équation $n+\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{2}$ devient $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2}$, d'où $p=2$.
Donc $n=1$.

Réponse : (C)

19. On récrit les nombres de la liste en factorisation première :

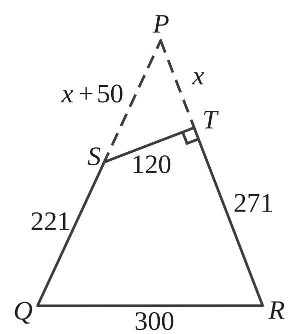
$$1, 2^1, 3^1, 2^2, 5^1, 2^1 3^1, 7^1, 2^3, 3^2$$

Un entier strictement positif supérieur à 1 est un carré parfait si et seulement si chacun de ses facteurs premiers parait un nombre pair de fois.

Puisque les facteurs 5 et 7 ne paraissent qu'une fois chacun dans cette liste de facteurs premiers, on ne peut pas choisir 5 ou 7 pour former un produit qui est un carré parfait.
Il reste sept entiers, soit $1, 2^1, 3^1, 2^2, 2^1 3^1, 2^3$ et 3^2, parmi lesquels on doit choisir six entiers.
Le produit des sept entiers est égal à $2^{1+2+1+3}3^{1+1+2}$, ou $2^7 3^4$.
Pour choisir les six entiers, on peut multiplier tous les sept entiers, puis diviser par l'entier que l'on ne choisira pas.
On veut donc diviser $2^7 3^4$ par un entier de la liste, de manière que la réponse ait un nombre pair de facteurs 2 et un nombre pair de facteurs 3, ce qui formera un carré parfait. Or, on remarque que le nombre $2^7 3^4$ a un nombre impair de facteurs 2 et un nombre pair de facteurs 3. Si on divise par 2^1 ou par 2^3, il restera un nombre pair de facteurs 2 et un nombre pair de facteurs 3. Ce sont les deux seuls nombres de la liste par lesquels on peut diviser pour obtenir ce résultat.
(On aurait pu diviser le produit des sept entiers successivement par chacun des sept entiers pour vérifier si le quotient est un carré parfait.)
Donc, les deux ensembles de six nombres dont le produit est un carré parfait sont $1, 3^1, 2^2, 2^1 3^1, 2^3, 3^2$ (dont le produit est $2^6 3^4$) et $1, 2^1, 3^1, 2^2, 2^1 3^1, 3^2$ (dont le produit est $2^4 3^4$).
Donc $m^2 = 2^6 3^4$ et $n^2 = 2^4 3^4$, d'où $m = 2^3 3^2$ et $n = 2^2 3^2$, ou $m = 72$ et $n = 36$.
Donc $m + n = 72 + 36$, ou $m + n = 108$.

Réponse : (A)

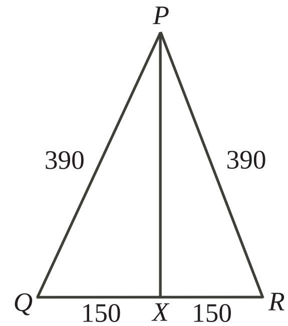
20. On calculera l'aire du quadrilatère $STRQ$ en soustrayant l'aire du triangle PTS de celle du triangle PQR.
Soit $PT = x$.
Donc $PR = PT + TR$, ou $PR = x + 271$.
Puisque $PQ = PR = x + 271$ et $SQ = 221$, alors $PS = PQ - SQ$, ou $PS = (x + 271) - 221$, ou $PS = x + 50$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PTS :

$$\begin{aligned} PT^2 + TS^2 &= PS^2 \\ x^2 + 120^2 &= (x+50)^2 \\ x^2 + 14\,400 &= x^2 + 100x + 2500 \\ 11\,900 &= 100x \\ x &= 119 \end{aligned}$$

Dans le triangle PTS, on a donc $PT = x = 119$, $TS = 120$ et $PS = x + 50$, ou $PS = 169$.
Puisque le triangle PTS est rectangle en T, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PT)(TS)$, ou $\frac{1}{2}(119)(120)$, ou 7140.
Dans le triangle PQR, on a $PR = PQ = x + 271$, d'où $PR = PQ = 390$.
Puisque le triangle PQR est isocèle, la médiane PX, de P au milieu X de QR, est perpendiculaire à QR.



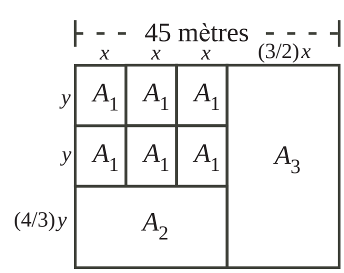
Puisque X est le milieu de QR et que $QR = 300$, alors $QX = \frac{1}{2}QR$, ou $QX = 150$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PXQ :

$$PX = \sqrt{PQ^2 - QX^2} = \sqrt{390^2 - 150^2} = \sqrt{21\,600} = 360$$

puisque $PX > 0$.
Dans le triangle PQR, PX est la hauteur qui correspond à la base QR. L'aire du triangle PQR est donc égale à $\frac{1}{2}(QR)(PX)$, ou $\frac{1}{2}(300)(360)$, ou $54\,000$.
L'aire du quadrilatère $STRQ$ est égale à la différence entre l'aire de ces triangles. Elle est donc égale à $54\,000 - 7140$, ou $46\,860$.

Réponse : (C)

21. Partout, les distances mesurées à l'horizontale seront appelées largeurs et celles mesurées à la verticale seront appelées longueurs.
Soit x m la largeur et y m la longueur de chaque enclos A_1.
Chacun de ces rectangles a donc une aire de xy m^2.
On exprime les dimensions des autres enclos en fonction de ces mêmes variables.
L'enclos A_2 a une largeur égale à $(x + x + x)$ m, ou $3x$ m.
Puisque l'aire de l'enclos A_2 est 4 fois l'aire d'un enclos A_1, son aire est égale à $4xy$ m^2.
La longueur de l'enclos A_2 est égale à son aire divisée par sa largeur. Elle est donc égale à $\dfrac{4xy}{3x}$ m, ou $\dfrac{4}{3}y$ m. (Elle est notée $(4/3)y$ dans la figure suivante.)
L'enclos A_3 a donc une longueur égale à $(y + y + \frac{4}{3}y)$ m, ou $\frac{10}{3}y$ m.
Puisque l'aire de l'enclos A_3 est 5 fois l'aire d'un enclos A_1, soit $5xy$ m^2, alors la largeur de l'enclos A_3 est égale à $\dfrac{5xy}{\frac{10}{3}y}$ m, ou $\dfrac{3}{2}x$ m. (Elle est notée $(3/2)x$ dans la figure.)



Le champ au complet a une largeur de 45 m. D'après la clôture horizontale au haut de la figure, elle est aussi égale à $(x + x + x + \frac{3}{2}x)$ m, ou $\frac{9}{2}x$ m.
On a donc $\frac{9}{2}x = 45$, d'où $x = \frac{2}{9}(45)$, ou $x = 10$.
On exprime en fonction de x la longueur totale des clôtures qui paraissent à l'horizontale dans la figure. On procède de gauche à droite pour chaque rangée du haut jusqu'en bas :

$$(x + x + x + \tfrac{3}{2}x) + (x + x + x) + (x + x + x) + (x + x + x + \tfrac{3}{2}x) = 15x$$

On exprime en fonction de y la largeur totale des clôtures qui paraissent à la verticale dans la figure. On procède du haut vers le bas pour chaque colonne de gauche à droite :

$$(y + y + \tfrac{4}{3}y) + (y + y) + (y + y) + (y + y + \tfrac{4}{3}y) + (y + y + \tfrac{4}{3}y) = 14y$$

Puisque les clôtures ont une longueur totale de 360 m, alors $15x + 14y = 360$.
Puisque $x = 10$, alors $150 + 14y = 360$, d'où $14y = 210$, ou $y = 15$.
L'aire de l'enclos A_1 est donc égale à xy m^2, ou $(10)(15)$ m^2, ou 150 m^2.
Parmi les choix de réponse, elle est plus près de (elle est égale à) 150,0.

Réponse : (B)

22. Soit n le nombre de courses dans lesquelles Magda et Sara étaient adversaires.
Puisque Sara a remporté exactement 2 courses, alors Magda a remporté $n - 2$ courses.
Puisque Sara a gagné 2 fois et perdu $n - 2$ fois, elle a remporté $2x + (n - 2)y$ pièces d'or.
Donc $2x + (n - 2)y = 35$.
Puisque Magda a gagné $n - 2$ fois et perdu 2 fois, elle a remporté $(n - 2)x + 2y$ pièces d'or.
Donc $(n - 2)x + 2y = 42$.
On additionne les deux équations, membre par membre.
On obtient $(2x + (n - 2)y) + ((n - 2)x + 2y) = 35 + 42$, ou $nx + ny = 77$, ou $n(x + y) = 77$.
Puisque n, x et y sont des entiers strictement positifs, alors n est un diviseur positif de 77. Donc, n est égal à 1, 7, 11 ou 77.
Si on soustrait les deux mêmes équations, membre par membre, on obtient :

$$((n - 2)x + 2y) - (2x + (n - 2)y) = 42 - 35$$

ou $(n - 4)x + (4 - n)y = 7$, ou $(n - 4)(x - y) = 7$.
Puisque n, x et y sont des entiers strictement positifs et que $x > y$, alors $n - 4$ est un diviseur positif de 7. Donc $n - 4 = 1$ ou $n - 4 = 7$, d'où $n = 5$ ou $n = 11$.
On compare les deux listes de possibilités pour conclure que n doit être égal à 11.
On a donc $11(x + y) = 77$, d'où $x + y = 7$.
On a aussi $7(x - y) = 7$, d'où $x - y = 1$.
On additionne ces deux dernières équations, membre par membre, pour obtenir

$$(x + y) + (x - y) = 7 + 1$$

d'où $2x = 8$, ou $x = 4$.
(On vérifie : Puisque $x = 4$, alors $y = 3$. Puisque $n = 11$, Magda a remporté 9 courses et Sara a remporté 2 courses. Donc, le nombre de pièces d'or que Magda doit recevoir est égal à $9(4)+2(3)$, ou 42, tandis que le nombre de pièces d'or que Sara doit recevoir est égal à $2(4) + 9(3)$, ou 35, ce qui est en accord avec l'énoncé.)

Réponse : (E)

23. On considère le premier sac qui contient 2 billes rouges et 2 billes bleues pour un total de 4 billes. Il y a 4 choix possibles pour la première bille. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles pour la deuxième bille. En tout, il y a 4×3 façons, ou 12 façons, de choisir deux billes l'une après l'autre.
Pour obtenir deux billes rouges : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille rouge) pour que la première bille soit rouge. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille rouge) pour que la deuxième bille soit rouge. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes rouges.
Pour obtenir deux billes bleues : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille bleue) pour que la première bille soit bleue. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille bleue) pour que la deuxième bille soit bleue. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes bleues.
Il y a donc $2 + 2$ façons, ou 4 façons de choisir deux billes de la même couleur.
La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit 4, divisé par le nombre de choix possibles, soit 12. Elle est donc égale à $\frac{4}{12}$, ou $\frac{1}{3}$.

On considère le deuxième sac qui contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes, soit $v + 4$ billes en tout.
Il y a $v + 4$ choix possibles pour la première bille. Il reste alors $v + 3$ billes dans le sac. Pour chacun des $v + 4$ choix, il y a donc $v + 3$ choix possibles pour la deuxième bille. En tout, il y a $(v + 4)(v + 3)$ façons de choisir deux billes l'une après l'autre.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes rouges.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes bleues.
Pour deux billes vertes : Il y a v façons de choisir une première bille verte. Il reste alors $v - 1$ billes vertes dans le sac. Pour chacun de ces v choix, il y a $v - 1$ façons de choisir une deuxième bille verte. En tout, il y a donc $v(v - 1)$ façons de choisir deux billes vertes du sac.
Il y a donc $(2 + 2 + v(v - 1))$ façons, ou $(v^2 - v + 4)$ façons de choisir deux billes de la même couleur.
La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit $(v^2 - v + 4)$, divisé par le nombre de choix possibles, soit $(v + 4)(v + 3)$. Elle est donc égale à $\frac{v^2 - v + 4}{(v + 4)(v + 3)}$.

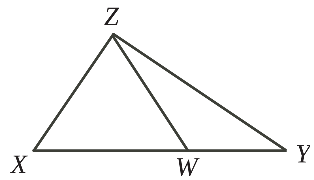
Puisque les deux probabilités sont égales et que $v \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{v^2 - v + 4}{(v + 4)(v + 3)} \\
(v + 4)(v + 3) &= 3v^2 - 3v + 12 \\
v^2 + 7v + 12 &= 3v^2 - 3v + 12 \\
10v &= 2v^2 \\
0 &= 2v^2 - 10v \\
0 &= 2v(v - 5)
\end{aligned}$$

Donc $v = 0$ ou $v = 5$. On rejette la première valeur, car v est strictement positif. Donc, $v = 5$

Réponse : (B)

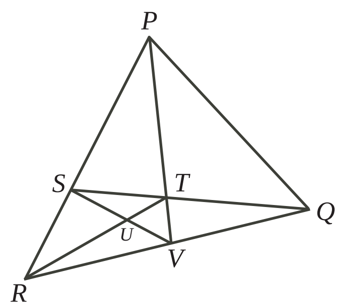
24. On utilise la notation $|\triangle XYZ|$ pour représenter l'aire du triangle XYZ.
On utilisera souvent la propriété suivante au sujet d'un triangle (qu'on appelle ici XYZ) qui est divisé par un segment de droite (ZW) :



$$\frac{|\triangle ZXW|}{|\triangle ZWY|} = \frac{XW}{WY}$$

Cette propriété sera nommée $(*)$. $(*)$ est vraie, puisque les triangles ZXW et ZWY ont une même hauteur par rapport à leur base respective XW et WY. La longueur h de cette base est la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet Z à la droite XY.
Donc $\dfrac{|\triangle ZXW|}{|\triangle ZWY|} = \dfrac{\frac{1}{2}(XW)h}{\frac{1}{2}(WY)h} = \dfrac{XW}{WY}$.

On retrace la figure de l'énoncé, en omettant les segments PU et QU :

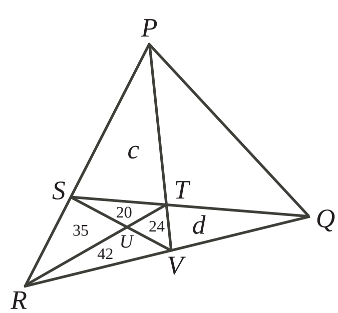


Soit $|\triangle SUT| = a$.
Puisque $|\triangle RST| = 55$, alors $|\triangle RSU| = |\triangle RST| - |\triangle SUT|$, ou $|\triangle RSU| = 55 - a$.
Puisque $|\triangle RSV| = 77$, alors $|\triangle RUV| = |\triangle RSV| - |\triangle RSU|$, ou $|\triangle RUV| = 77-(55-a) = 22+a$.
Puisque $|\triangle RTV| = 66$, alors $|\triangle TUV| = |\triangle RTV| - |\triangle RUV|$, ou $|\triangle TUV| = 66 - (22 + a)$, ou $|\triangle TUV| = 44 - a$.
D'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle SUT|}{|\triangle RSU|} = \dfrac{TU}{UR} = \dfrac{|\triangle TUV|}{|\triangle RUV|}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{55-a} &= \frac{44-a}{22+a} \\
a(22+a) &= (44-a)(55-a) \\
a^2 + 22a &= 2420 - 99a + a^2 \\
121a &= 2420 \\
a &= 20
\end{aligned}$$

On a donc $|\triangle SUT| = 20$, $|\triangle RSU| = 35$, $|\triangle RUV| = 42$ et $|\triangle TUV| = 24$.

Soit $|\triangle PST| = c$ et $|\triangle QTV| = d$. On a la situation suivante :



D'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle PST|}{|\triangle RST|} = \dfrac{PS}{SR} = \dfrac{|\triangle PSV|}{|\triangle RSV|}$.

Donc $\dfrac{c}{55} = \dfrac{c+44}{77}$, d'où $77c = 55c + 55(44)$, ou $22c = 2420$, ou $c = 110$.

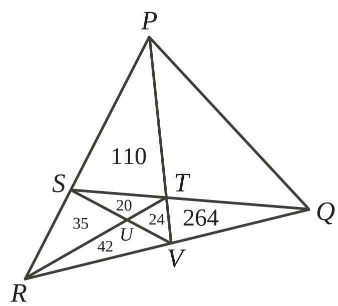
Donc $\dfrac{PS}{SR} = \dfrac{|\triangle PST|}{|\triangle RST|} = \dfrac{110}{55} = 2$. (Ce résultat sera utilisé plus loin.)

De même, d'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle QTV|}{|\triangle RTV|} = \dfrac{QV}{VR} = \dfrac{|\triangle SVQ|}{|\triangle RSV|}$.

Donc $\dfrac{d}{66} = \dfrac{d+44}{77}$, d'où $77d = 66d + 66(44)$, ou $11d = 2904$, ou $d = 264$.

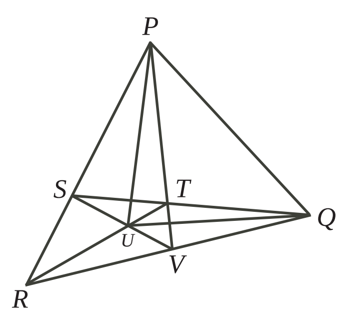
Donc $\dfrac{QV}{VR} = \dfrac{|\triangle QTV|}{|\triangle RTV|} = \dfrac{264}{66} = 4$. (Ce résultat sera utilisé plus loin.)

On a la donc situation suivante :



D'après $(*)$, $\dfrac{|\triangle PTQ|}{|\triangle PST|} = \dfrac{TQ}{ST} = \dfrac{|\triangle QTV|}{|\triangle STV|}$. Donc $\dfrac{|\triangle PTQ|}{110} = \dfrac{264}{44}$, d'où $|\triangle PTQ| = \dfrac{110(264)}{44}$, ou $|\triangle PTQ| = 660$.

Pour calculer l'aire du triangle PQU, on rajoute les segments PU et QU à la figure.



On utilise :

$$|\triangle PQU| = |\triangle PTQ| + |\triangle PST| + |\triangle QTV| + |\triangle STV| - |\triangle PSU| - |\triangle QVU|$$

D'après $(*)$ et les résultats $\dfrac{PS}{SR} = 2$ et $\dfrac{QV}{VR} = 4$ obtenus précédemment, on a :

$$|\triangle PSU| = \frac{PS}{SR}|\triangle RSU| = 2(35) = 70$$

et

$$|\triangle QVU| = \frac{QV}{VR}|\triangle VRU| = 4(42) = 168$$

Donc $|\triangle PQU| = 660 + 110 + 264 + 44 - 70 - 168$, ou $|\triangle PQU| = 840$.

Réponse : (C)

25. <u>1^{re} étape : On simplifie l'équation en utilisant la parité et les propriétés des puissances de 2</u>

On sait que si $2^x = 2^y$, x et y étant des nombres réels, alors $x = y$. En effet, si $2^x = 2^y$, alors $\frac{2^x}{2^y} = 1$, ou $2^{x-y} = 1$. Donc $x - y = 0$, ou $x = y$.

On étudie d'abord les équations de la forme $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, a, b, c et d étant des entiers. (Cette équation est plus générale, mais plus simple, que l'équation donnée. Elle nous permettra d'en tirer des conclusions plus facilement.)
On peut supposer que $a \leq b$ et $c \leq d$ et $a \leq c$. (On peut récrire l'équation pour que ce soit vrai.)
On factorise les deux membres de l'équation pour obtenir $2^a(1 + 2^{b-a}) = 2^c(1 + 2^{d-c})$. On divise ensuite chaque membre par 2^a pour obtenir $1 + 2^{b-a} = 2^{c-a}(1 + 2^{d-c})$.
On démontre, par contradiction, que $c = a$:

> Supposons, au contraire, que $c \neq a$. L'inégalité $c \geq a$ devient donc $c > a$.
> Puisque $c > a$, alors $c - a > 0$. Puisque $c - a$ est un entier, alors $c - a \geq 1$.
> Puisque le membre de droite de la dernière équation a un facteur égal à 2^{c-a}, le membre de droite est pair.
> Le membre de gauche doit aussi être pair. Donc, 2^{b-a} doit être un entier impair.
> Or, 2^{b-a} est un entier impair si et seulement il est égal à 1. On a donc $b - a = 0$, ou $b = a$.
> Le membre de gauche de l'équation est donc égal à 2, tandis que le membre de droite est supérieur à 2, car $2^{c-a} \geq 2$, d'où $1 + 2^{d-c} > 1$. On a donc une contradiction.
> La supposition est donc fausse et on a donc $c = a$.

Puisque $a = c$, l'équation $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$ devient $2^b = 2^d$, d'où $b = d$.
Étant donné une équation $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, a, b, c et d étant des entiers, il y a trois possibilités : ou bien $a = b = c = d$, ou bien $a = c$ et $b = d$ (avec $a \neq b$), ou bien $a = d$ et $b = c$ (avec $a \neq b$).

On examine ces trois possibilités par rapport à l'équation de l'énoncé, tout en notant que m, n et k sont tous des entiers strictement positifs :

- <u>*1er cas :* $4m^2 = m^2 - n^2 + 4 = k + 4 = 3m^2 + n^2 + k$</u>
  Puisque $k + 4 = 3m^2 + n^2 + k$, alors $3m^2 + n^2 = 4$.
  Puisque m et n sont des entiers strictement positifs, alors $m^2 \geq 1$ et $n^2 \geq 1$.
  Puisque $3m^2 + n^2 = 4$, alors il faut que $m = n = 1$.
  L'égalité $4m^2 = k + 4$ implique donc que $4 = k + 4$, ou $k = 0$.
  On rejette cette possibilité, car on sait que k est strictement positif.
- <u>*2e cas :* $4m^2 = k + 4$ et $m^2 - n^2 + 4 = 3m^2 + n^2 + k$ et $4m^2 \neq m^2 - n^2 + 4$</u>
  D'après la deuxième égalité, on a $2m^2 + 2n^2 + k = 4$. Or, puisque $m, n, k > 0$, on a $2m^2 + 2n^2 + k \geq 5$, ce qui contredit l'égalité précédente.
  On rejette donc cette possibilité.
- <u>*3e cas :* $4m^2 = 3m^2 + n^2 + k$ et $m^2 - n^2 + 4 = k + 4$ et $4m^2 \neq m^2 - n^2 + 4$</u>
  On peut récrire la première égalité sous la forme $m^2 - n^2 = k$.
  On peut récrire la deuxième égalité sous la forme $m^2 - n^2 = k$.
  On peut récrire l'inégalité sous la forme $3m^2 + n^2 \neq 4$. D'après le 1er cas, le couple (m, n) ne peut pas être le couple $(1, 1)$, ce qui est cohérent avec les conditions $m^2 - n^2 = k$ et $k > 0$.

Après avoir examiné ces trois possibilités, on a réduit le problème donné au problème suivant : Déterminer le nombre de valeurs entières impaires de k, de 0 à 100, pour lesquelles l'équation $m^2 - n^2 = k$ admet exactement deux couples (m, n) d'entiers strictement positifs qui sont des solutions.

2^e étape : On relie les solutions de $m^2 - n^2 = k$ à des factorisations de k

On factorise le membre de gauche de l'équation pour obtenir $(m+n)(m-n) = k$.
Puisque m, n et k sont des entiers strictement positifs, alors $m+n > 0$ et $k > 0$, d'où $m-n > 0$, ou $m > n$.
Puisque k est impair et que les facteurs $m+n$ et $m-n$ sont des entiers, alors $m+n$ et $m-n$ sont tous deux impairs (si l'un d'eux était pair, le produit serait pair).
Puisque $n > 0$, alors $m+n > m-n$.
Supposons que (m, n) est une solution de l'équation $m^2 - n^2 = k$. Soit $m+n = a$ et $m-n = b$. Alors a et b sont des entiers impairs et $a > b$.
On a alors $ab = k$ et ab est donc une factorisation particulière de k.
Donc, une solution (m, n) de l'équation correspond à une factorisation particulière de k.
On considère maintenant la situation à rebours. On considère que $k = AB$, A et B étant des entiers positifs impairs et $A \geq B$.
Si on pose $m+n = A$ et $m-n = B$, on peut additionner ces équations, membre par membre, pour obtenir $2m = A+B$ (ou $m = \frac{1}{2}(A+B)$) et les soustraire, membre par membre, pour obtenir $2n = A-B$ (ou $n = \frac{1}{2}(A-B)$). On remarque que puisque $n > 0$, alors $A > B$.
Donc, chaque factorisation de k comme produit de deux entiers impairs A et B, $A > B$, donne une solution de l'équation $m^2 - n^2 = k$.
Puisque chaque solution donne une factorisation et que chaque factorisation donne une solution, on peut conclure que le nombre de solutions est égal au nombre de factorisations.
On a réduit le problème donné au problème suivant : Déterminer le nombre d'entièrs impairs k, de 0 à 100, qui admettent exactement deux factorisations comme produits de deux entiers impairs distincts a et b, $a > b$.

3^e étape : On compte les valeurs de k

Puisque k est impair, tous ses diviseurs premiers sont impairs.
Puisque $k < 100$, alors k ne peut admettre trois diviseurs premiers impairs ou plus, car le produit des trois plus petits nombres premiers impairs est égal à $3 \cdot 5 \cdot 7$, ou 105.
Donc, k admet au plus deux diviseurs premiers impairs.

Si $k = pq$, p et q étant deux nombres premiers impairs distincts et $p < q$, alors les diviseurs de k sont $1, p, q$ et pq. Dans ce cas, k admet exactement deux factorisations du type que l'on recherche, soit $1 \cdot pq$ et $p \cdot q$.
Puisque $k < 100$ et $p \geq 3$, alors $q < \frac{100}{3}$. Puisque q est un entier, alors $q \leq 33$.
Les nombres premiers impairs inférieurs à 33 sont $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ et 31.
Si $p \geq 11$, alors $pq > 11^2 = 121$, ce qui est supérieur à 100.
Donc, p doit être inférieur à 11. Donc, p peut seulement égaler 3, 5 ou 7.
Si $p = 3$, il y a 9 valeurs possibles de q, soit les nombres premiers de 5 à 31.
Si $p = 5$, il y a 5 valeurs possibles de q soit les nombres premiers de 7 à 19.
Si $p = 7$, il y a 2 valeurs possibles de q, soit 11 et 13.
Le nombre de valeurs de k, de cette forme, est donc égal à $9 + 5 + 2$, ou 16.

Si $k = p^r q^s$, r et s étant des entiers strictement positifs et r ou s (ou les deux) étant supérieur à 1, alors k admet trois factorisations. (Par exemple, si $r > 1$, alors $k = 1 \cdot p^r q^s = p \cdot p^{r-1} q^s = p^r \cdot q^s$, ces trois factorisations étant distinctes.) Cette forme de k n'apporte donc aucune solution.

Si $k = p$ ou $k = p^2$, p étant un nombre premier impair, alors k n'admet qu'une seule factorisation ($1 \cdot p$ ou $1 \cdot p^2$, selon le cas). Cette forme de k n'apporte donc aucune solution.

Si $k = p^3$, p étant un nombre premier impair, alors les diviseurs de k sont $1, p, p^2$ et p^3.
Donc, k admet exactement deux factorisations du type que l'on recherche, soit $1 \cdot p^3$ et $p \cdot p^2$.

Puisque $k < 100$, alors p doit être égal à 3 (car $5^3 > 100$).
Il y a donc 1 valeur de k de cette forme.

Si $k = p^4$, p étant un nombre premier impair, alors les diviseurs de k sont $1, p, p^2, p^3$ et p^4. Donc, k admet exactement deux factorisations du type que l'on recherche, soit $1 \cdot p^4$ et $p \cdot p^3$. On remarque que k admet une autre factorisation, mais elle est rejetée, car les deux facteurs sont égaux.
Puisque $k < 100$, alors p doit être égal à 3 (car $5^4 > 100$).
Il y a donc 1 valeur de k de cette forme.

Si k admet plus de 4 facteurs p, alors k admet au moins trois factorisations du type voulu. Cette forme de k n'apporte donc aucune solution. (Par exemple, si $k = p^n$ et $n > 4$, alors $k = 1 \cdot p^n = p \cdot p^{n-1} = p^2 \cdot p^{n-2}$ et chaque factorisation est distincte puisque $n - 2 > 2$.)

Ayant épuisé les cas possibles, on voit qu'il y a $16 + 1 + 1$ valeurs, ou 18 de k admissibles. Il y a donc 18 couples d'entiers strictement positifs qui sont des solutions de l'équation donnée.

Réponse : (D)