Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2013

le mercredi 17 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 avril 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) L'expression $\sqrt{113+x}$ est un entier lorsque $113+x$ est un carré parfait.
Pour déterminer le plus petit entier strictement positif x pour lequel $113+x$ est un carré parfait, on cherche d'abord le plus petit carré parfait supérieur à 113.
Puisque $10^2 = 100$ et $11^2 = 121$, le plus petit carré parfait supérieur à 113 est 121.
On a donc $113 + x = 121$, d'où $x = 8$.

(b) La moyenne de 3 et de 11 est égale à $\frac{1}{2}(3 + 11)$, ou 7. Donc $a = 7$.
D'après la consigne, la moyenne de 7 et de b est égale à 11.
On a donc $\frac{1}{2}(7 + b) = 11$, d'où $7 + b = 22$, ou $b = 15$.
(On aurait pu conclure que puisque 7 est 4 de moins que la moyenne de 11, alors b doit être 4 de plus que 11. Donc $b = 11 + 4$, ou $b = 15$.)

(c) Soit c l'âge de Charlot, en années, et b l'âge de Bella, en années.
D'après la première phrase, on a $c = 30 + b$.
D'après la deuxième phrase, on a $c = 6b$.
On reporte $c = 6b$ dans l'équation $c = 30 + b$ pour obtenir $6b = 30 + b$, d'où $5b = 30$, ou $b = 6$.
Puisque $c = 30 + b$, alors $c = 36$. Charlot a donc 36 ans.

2. (a) Puisque $\dfrac{21}{x} = \dfrac{7}{y}$, alors $21 = \dfrac{7x}{y}$. Donc $\dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{7}$, ou $\dfrac{x}{y} = 3$.

(b) *Solution 1*
Puisque

$$\frac{1}{3} \approx 0{,}3333 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$$

alors $\dfrac{1}{5} < 0{,}2013$ et $0{,}2013 < \dfrac{1}{4}$. Donc, n doit être égal à 4.
(On devrait aussi remarquer que $\dfrac{1}{n}$ diminue à mesure que n augmente. Il s'agit donc de la seule valeur de n qui vérifie les conditions.)

Solution 2
Puisque $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}2013$, alors $n + 1 > \dfrac{1}{0{,}2013}$, ou $n > \dfrac{1}{0{,}2013} - 1 \approx 3{,}9677$.
Puisque $\dfrac{1}{n} > 0{,}2013$, alors $n < \dfrac{1}{0{,}2013} \approx 4{,}9677$.
Puisque n est un entier strictement positif qui est

i. plus petit qu'un nombre à peu près égal à 4,9677, et
ii. plus grand qu'un nombre à peu près égal à 3,9677,

alors $n = 4$.

(c) Puisque AH est perpendiculaire à BC, alors l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AH)$.
Or, on sait que cette aire est égale à 84 et que $AH = 8$. Donc $84 = \frac{1}{2}(BC)(8)$, ou $4 \cdot BC = 84$, d'où $BC = 21$.
Le triangle AHB est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, puisque $BH > 0$:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

(On aurait pu reconnaitre deux des côtés du triangle rectangle remarquable 6-8-10.)
Puisque $BC = 21$ et $BH = 6$, alors $HC = BC - BH$, d'où $HC = 21 - 6$, ou $HC = 15$.

Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, puisque $AC > 0$:

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$$

Le périmètre du triangle ABC est égal à $AB + BC + AC$, ou $10 + 21 + 17$, ou 48.

3. (a) La suite de Fibonacci commence par les termes $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Les huit premiers termes sont donc impair, impair, pair, impair, impair, pair, impair, impair.
Si x et y sont deux termes consécutifs de la suite, alors le terme suivant est $x + y$.
On considère n'importe quels deux entiers x et y.
Si x et y sont pairs, alors $x + y$ est pair. Si x et y sont impairs, alors $x + y$ est pair.
Si x est pair et y est impair, alors $x + y$ est impair. Si x est impair et y est pair, alors $x + y$ est impair.
Donc, la parité ou l'imparité de deux termes consécutifs x et y de la suite de Fibonacci détermine si le terme suivant $x + y$ est pair ou impair.
De plus, si deux termes consécutifs ont la même parité ou imparité que deux termes consécutifs précédents, un motif répétitif est créé.
Par exemple, les 4^{e} et 5^{e} termes sont « impair, impair », de même que les 1er et 2^{e} termes.
Le motif « impair, impair, pair » est donc répété. Ce motif a une longueur de 3 termes.
Puisque 99 est un multiple de 3, alors le 99^{e} terme est le troisième terme du motif répété.
Chaque répétition du motif contient deux termes impairs.
Donc, les 99 premiers termes de la suite de Fibonacci contiennent 2×33 termes impairs, c'est-à-dire 66 termes impairs.
Puisque le 100^{e} terme de la suite est le premier terme d'une répétion du motif, il est impair.
Dans les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, il y a donc $66 + 1$ termes impairs, ou 67 termes impairs.

(b) Soit a le premier terme de cette suite arithmétique et soit d la différence constante entre n'importe quels deux termes consécutifs. (Cette différence constante est appelée *raison arithmétique*.)
Les quatre premiers termes sont donc $a, a + d, a + 2d, a + 3d$.
D'après les renseignements donnés, on a $a + (a + 2d) = 6$ et $(a + d) + (a + 3d) = 20$.
La première équation devient $2a + 2d = 6$, ou $a + d = 3$.
La deuxième équation devient $2a + 4d = 20$, ou $a + 2d = 10$.
Donc $(a + 2d) - (a + d) = 10 - 3$, d'où $d = 7$.
Puisque $a + d = 3$ et $d = 7$, alors $a = -4$.
Le dixième terme de la suite est donc $a + 9d$, c'est-à-dire $-4 + 9(7)$, ou 59.

4. (a) Il y a cinq chiffres impairs, soit 1, 3, 5, 7 et 9.
On subdivise les entiers strictement positifs inférieurs à 1000 en trois catégories : ceux d'un chiffre, ceux de deux chiffres et ceux de trois chiffres.
Il y a cinq entiers impairs positifs d'un chiffre, soit 1, 3, 5, 7 et 9.
On considère les entiers positifs de deux chiffres dont les deux chiffres sont impairs.
Un tel entier est de la forme XY, X et Y étant des chiffres.
Le chiffre X peut prendre cinq valeurs, puisqu'il doit être impair. Pour chacune de ces valeurs, le chiffre Y peut aussi prendre cinq valeurs.
Il y a donc 5×5 valeurs, ou 25 entiers positifs de deux chiffres dont les deux chiffres sont impairs.
On considère les entiers positifs de trois chiffres dont les trois chiffres sont impairs.

Un tel entier est de la forme XYZ, X, Y et Z étant des chiffres.
Le chiffre X peut prendre cinq valeurs, puisqu'il doit être impair. Pour chacune de ces valeurs, le chiffre Y peut aussi prendre cinq valeurs. Pour chacune de ces 5×5 valeurs, le chiffre Z peut prendre cinq valeurs.
Il y a donc $5 \times 5 \times 5$ valeurs, ou 125 entiers positifs de trois chiffres dont les trois chiffres sont impairs.
En tout, le nombre d'entiers positifs inférieurs à 1000 dont tous les chiffres sont impairs est égal à $5 + 25 + 125$, ou 155 .

(b) On additionne les deux termes du membre de droite de la deuxième équation pour obtenir $\frac{4}{7} = \frac{b+a}{ab}$.
Puisque $a + b = 16$, alors $\frac{4}{7} = \frac{16}{ab}$, d'où $ab = \frac{16(7)}{4}$, ou $ab = 28$.
On a donc $a + b = 16$ et $ab = 28$.
D'après la première équation, $b = 16 - a$.
On reporte $b = 16 - a$ dans la deuxième équation pour obtenir $a(16 - a) = 28$, ou $16a - a^2 = 28$, ou $a^2 - 16a + 28 = 0$.
Par factorisation, on obtient $(a - 14)(a - 2) = 0$.
Donc $a = 14$ ou $a = 2$.
Si $a = 14$, alors $b = 16 - a$, ou $b = 2$.
Si $a = 2$, alors $b = 16 - a$, ou $b = 14$.
Les couples (a, b) qui vérifient le système d'équations sont $(14, 2)$ et $(2, 14)$.
(On peut vérifier que $\frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{7}{14} + \frac{1}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.)

5. (a) On remplit un tableau des 36 résultats possibles du jet des deux dés et des sommes qui en résultent :

	2	3	5	7	11	13
2	4	5	7	9	13	15
3	5	6	8	10	14	16
5	7	8	10	12	16	18
7	9	10	12	14	18	20
11	13	14	16	18	22	24
13	15	16	18	20	24	26

Parmi les 36 sommes, six sont des nombres premiers (deux sommes chacune de 5, 7 et 13).
La probabilité d'obtenir une somme qui est un nombre premier est donc égale à $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$.
(On remarque que chaque somme est supérieure ou égale à 4. Chacune doit donc être impaire pour être un nombre premier. Puisque la somme de deux nombres impairs est paire, il suffit de vérifier les sommes d'un résultat pair et d'un résultat impair, c'est-à-dire les membres de la première rangée et de la première colonne.)

(b) On détermine d'abord les coordonnées de S.
Pour ce faire, on écrit l'équation de la parabole sous forme canonique en complétant le carré :

$$y = -x^2+4x+1 = -(x^2-4x-1) = -(x^2-4x+2^2-2^2-1) = -((x-2)^2-5) = -(x-2)^2+5$$

Le sommet S a donc pour coordonnées $(2, 5)$.
On détermine ensuite les coordonnées de A et de B.
Puisque A et B sont les points d'intersection de la droite d'équation $y = -x + 1$ et de la

parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$, leurs coordonnées vérifient ces deux équations.
Par comparaison des y, on a $-x + 1 = -x^2 + 4x + 1$, ou $x^2 - 5x = 0$, ou $x(x - 5) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 5$.
Lorsque $x = 0$, alors $y = -x + 1$, d'où $y = 0 + 1$, ou $y = 1$. Le point A, qui est situé sur l'axe des ordonnées, a pour coordonnées $(0, 1)$.
Lorsque $x = 5$, alors $y = -x + 1$, d'où $y = -5 + 1$, ou $y = -4$. Le point B a pour coordonnées $(5, -4)$.
On a donc les points $S(2, 5)$, $A(0, 1)$ et $B(5, -4)$. Donc :

$$\begin{aligned} AS^2 &= (0-2)^2 + (1-5)^2 = 20 \\ BS^2 &= (5-2)^2 + (-4-5)^2 = 90 \\ AB^2 &= (0-5)^2 + (1-(-4))^2 = 50 \end{aligned}$$

Donc $AS^2 + BS^2 - AB^2 = 20 + 90 - 50$, ou $AS^2 + BS^2 - AB^2 = 60$.

6. (a) Puisque ABC est un quart d'une pizza circulaire de centre A et de rayon 20 cm, alors $AC = AB = 20$ cm.
On sait que $\angle CAB = 90°$ (un quart de $360°$).
Puisque $\angle CAB = 90°$ et que A, B et C sont situés sur le cercle qui délimite le plat, alors CB est un diamètre du plat. (Il s'agit d'une propriété des cercles : Si X, Y et Z sont trois points sur un cercle de manière que $\angle ZXY = 90°$, alors YZ doit être un diamètre du cercle.)
Puisque le triangle CAB est rectangle et isocèle, alors $CB = \sqrt{2}AC$, ou $CB = 20\sqrt{2}$ cm.
Donc, le plat a pour rayon $\frac{1}{2}CB$, c'est-à-dire $10\sqrt{2}$ cm.
Le plat circulaire a donc une aire égale à $\pi(10\sqrt{2}\text{ cm})^2$, ou $200\pi\text{ cm}^2$.
L'aire du morceau de pizza est celle d'un quart de cercle de rayon 20 cm. Elle est donc égale à $\frac{1}{4}\pi(20\text{ cm})^2$, ou $100\pi\text{ cm}^2$.
La fraction du plat recouvert par le morceau de pizza est égale à l'aire du morceau divisée par l'aire du plat. Elle est égale à $\dfrac{100\pi\text{ cm}^2}{200\pi\text{ cm}^2}$, ou $\dfrac{1}{2}$.

(b) Soit x m la longueur AF.
Puisque AB a une longueur de 8 m, alors FB a une longueur de $(8 - x)$ m.
Le triangle MAF est rectangle et il a un angle de $60°$. Il s'agit donc d'un triangle remarquable $30°$-$60°$-$90°$. Puisque MF est opposé à l'angle de $60°$ et que AF est opposé à l'angle de $30°$, alors $MF = \sqrt{3}AF$.
Donc $MF = \sqrt{3}x$ m.
Puisque $MP = 2$ m, alors $PF = MF - MP$, d'où $PF = (\sqrt{3}x - 2)$ m.
On considère le triangle BFP, qui est rectangle en F. On a :

$$\tan\theta = \frac{PF}{FB} = \frac{(\sqrt{3}x - 2)\text{ m}}{(8 - x)\text{ m}} = \frac{\sqrt{3}x - 2}{8 - x}$$

Donc $(8 - x)\tan\theta = \sqrt{3}x - 2$, ou $8\tan\theta + 2 = \sqrt{3}x + (\tan\theta)x$.
On a donc $8\tan\theta + 2 = x(\sqrt{3} + \tan\theta)$, ou $x = \dfrac{8\tan\theta + 2}{\tan\theta + \sqrt{3}}$.
Donc $MF = \sqrt{3}x$, ou $MF = \dfrac{8\sqrt{3}\tan\theta + 2\sqrt{3}}{\tan\theta + \sqrt{3}}$ m.

7. (a) Il découle de l'équation donnée que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} - \tan x &= 3 \\
\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= 3 \\
1 - \sin x &= 3\cos x \qquad (\text{puisque } \cos x \neq 0) \\
(1-\sin x)^2 &= 9\cos^2 x \qquad (\text{on élève les deux membres au carré}) \\
1 - 2\sin x + \sin^2 x &= 9(1-\sin^2 x) \\
10\sin^2 x - 2\sin x - 8 &= 0 \\
5\sin^2 x - \sin x - 4 &= 0 \\
(5\sin x + 4)(\sin x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $\sin x = -\frac{4}{5}$ ou $\sin x = 1$.

Si $\sin x = 1$, alors $\cos x = 0$ et $\tan x$ n'est pas définie, ce qui est contraire à l'équation donnée. Cette valeur est donc rejetée.

Donc $\sin x = -\frac{4}{5}$.

(On peut vérifier que si $\sin x = -\frac{4}{5}$, alors $\cos x = \pm\frac{3}{5}$. Alors $\cos x = \frac{3}{5}$ vérifie l'équation donnée, puisque dans ce cas, on a $\frac{1}{\cos x} = \frac{5}{3}$ et $\tan x = -\frac{4}{3}$ et ces deux fractions ont une différence de 3.)

(b) Puisque $f(x) = ax + b$, alors $y = ax + b$ est une équation qui définit la fonction f. On peut alors déterminer l'équation de $g = f^{-1}$ en changeant l'un pour l'autre le x et le y dans cette équation. On obtient $x = ay + b$. On isole y : $ay = x - b$, ou $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.

Donc $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.

On remarque que $a \neq 0$. (Si $a = 0$, alors la représentation graphique de f serait définie par $y = b$, ce qui donnerait une droite horizontale. Une telle fonction n'admet aucune fonction réciproque.)

L'équation $f(x) - g(x) = 44$ devient donc $(ax + b) - \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = 44$, ou $\left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0x + 44$. Cette équation doit être vérifiée par toutes les valeurs de x.

On peut continuer de deux façons.

<u>1re façon : En comparant les coefficients</u>

Puisque l'équation

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0x + 44$$

est vérifiée par toutes les valeurs de x, alors les coefficients de l'expression du membre de gauche doivent être les mêmes que ceux de l'expression du membre de droite.

On a donc $a - \frac{1}{a} = 0$ et $b + \frac{b}{a} = 44$.

D'après la première de ces deux équations, on a $a = \frac{1}{a}$, ou $a^2 = 1$. Donc $a = 1$ ou $a = -1$.

Si $a = 1$, l'équation $b + \frac{b}{a} = 44$ devient $b + b = 44$, d'où $b = 22$.
Si $a = -1$, l'équation $b + \frac{b}{a} = 44$ devient $b - b = 44$, ce qui n'admet aucune solution.
On a donc $a = 1$ et $b = 22$, d'où $f(x) = x + 22$.

2[e] façon : À l'aide de valeurs particulières de x
Puisque l'équation
$$\left(a - \frac{1}{a}\right) x + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 0x + 44$$
est vérifiée par toutes les valeurs de x, alors elle est vérifiée par n'importe quelle valeur de x de notre choix.
Si on choisit $x = 0$, l'équation devient $0 + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 44$, ou $b + \frac{b}{a} = 44$.
Si on choisit $x = b$, l'équation devient $\left(a - \frac{1}{a}\right) b + \left(b + \frac{b}{a}\right) = 44$, ou $ab + b = 44$.
On peut récrire la première de ces équations sous la forme $\frac{ab + b}{a} = 44$.
On reporte $ab + b = 44$ dans cette équation pour obtenir $\frac{44}{a} = 44$, d'où $a = 1$.
Puisque $a = 1$, l'équation $ab + b = 44$ devient $2b = 44$, ou $b = 22$.
Donc $f(x) = x + 22$.

Donc la seule fonction affine f pour laquelle l'équation $f(x) - g(x) = 144$ est vérifiée pour toutes les valeurs de x est la fonction définie par $f(x) = x + 22$.

8. (a) On factorise le membre de gauche de l'équation pour obtenir $a(a^2 + 2b) = 2013$.
On écrit ensuite l'entier 2013 en factorisation première : $2013 = 3 \times 671 = 3 \times 11 \times 61$. (On peut facilement obtenir le facteur 3 en utilisant le test de divisibilité par 3. On obtient $2013 = 3 \times 673$. On peut obtenir le facteur 11 en utilisant le test de divisibilité par 11 ou en divisant successivement par les nombres premiers.)
Puisque $2013 = 3 \times 11 \times 61$, les diviseurs positifs de 2013 sont :
$$1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013$$
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors a et $a^2 + 2b$ le sont aussi.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, alors $a^2 \geq a$ et $2b > 0$, d'où $a^2 + 2b > a$.
Puisque $a(a^2 + 2b) = 2013$, alors a et $a^2 + 2b$ doivent former une paire de diviseurs complémentaires de 2013, c'est-à-dire une paire d'entiers dont le produit est égal à 2013, avec $a < a^2 + 2b$.
On remplit un tableau des diverses possibilités :

a	$a^2 + 2b$	$2b$	b
1	2013	2012	1006
3	671	662	331
11	183	62	31
33	61	-1028	rejeté

Le dernier cas est rejeté, puisque b doit être strictement positif.
Donc, les trois paires de diviseurs complémentaires qui vérifient l'équation sont $(1, 1006)$, $(3, 331)$ et $(11, 31)$.
(On peut vérifier par substitution que chaque couple vérifie l'équation.)

(b) On transforme successivement l'équation donnée en équations équivalentes :

$$\begin{aligned}
\log_2(2^{x-1}+3^{x+1}) &= 2x-\log_2(3^x) \\
\log_2(2^{x-1}+3^{x+1})+\log_2(3^x) &= 2x \\
\log_2((2^{x-1}+3^{x+1})3^x) &= 2x \qquad \text{(on a utilisé } \log_2 A+\log_2 B=\log_2 AB\text{)} \\
(2^{x-1}+3^{x+1})3^x &= 2^{2x} \qquad \text{(puisque M.G. = M.D., alors } 2^{\text{M.G.}}=2^{\text{M.D.}}\text{)} \\
2^{-1}2^x3^x+3^13^x3^x &= 2^{2x} \\
\tfrac{1}{2}\cdot 2^x3^x+3\cdot 3^{2x} &= 2^{2x} \\
2^x3^x+6\cdot 3^{2x} &= 2\cdot 2^{2x} \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par 2)} \\
2^x3^x2^{-2x}+6\cdot 3^{2x}2^{-2x} &= 2 \qquad \text{(on a divisé chaque membre par } 2^{2x}\neq 0\text{)} \\
2^{-x}3^x+6\cdot 3^{2x}2^{-2x} &= 2 \\
\left(\tfrac{3}{2}\right)^x+6\left(\tfrac{3}{2}\right)^{2x} &= 2
\end{aligned}$$

On reporte $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ dans l'équation, sachant que $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2=t^2$.
On obtient les équations équivalentes suivantes :

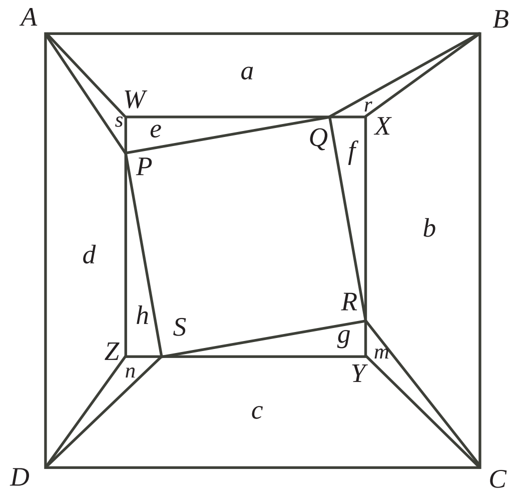
$$\begin{aligned}
t+6t^2 &= 2 \\
6t^2+t-2 &= 0 \\
(3t+2)(2t-1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $t=-\frac{2}{3}$ ou $t=\frac{1}{2}$.
Puisque $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, il faut que $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{1}{2}$.
Donc :

$$x=\log_{3/2}(1/2)=\frac{\log(1/2)}{\log(3/2)}=\frac{\log 1-\log 2}{\log 3-\log 2}=\frac{-\log 2}{\log 3-\log 2}=\frac{\log 2}{\log 2-\log 3}$$

9. (a) On suppose que les segments parallèles EF et WX sont séparés par une distance de x.
Le trapèze $EFXW$ a donc une hauteur de x.
Puisque le carré $EFGH$ a des côtés de longueur 10 et que le carré $WXYZ$ a des côtés de longueur 6, alors les segments ZY et HG sont séparés par une distance de $10-6-x$, ou $4-x$.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit de sa hauteur et de la somme des longueurs des côtés parallèles.
L'aire du trapèze $EFXW$ est donc égale à $\frac{1}{2}x(EF+WX)$, ou $\frac{1}{2}x(10+6)$, ou $8x$.
L'aire du trapèze $GHZY$ est égale à $\frac{1}{2}(4-x)(HG+ZY)$, ou $\frac{1}{2}(4-x)(10+6)$, ou $32-8x$.
Donc, la somme de l'aire du trapèze $EFXW$ et de l'aire du trapèze $GHZY$ est égale à $8x+(32-8x)$, ou 32.
Cette somme est constante. Elle ne dépend donc pas de la position du carré $WXYZ$ à l'intérieur du carré $EFGH$.

(b) On « emboite » le carré $PQRS$ by en traçant des segments horizontaux et verticaux à partir de ses sommets de manière à former le rectangle $WXYZ$, comme dans la figure ci-dessous. (Puisque les quadrilatères $ABQP$, $BCRQ$, $CDSR$ et $DAPS$ sont convexes, toutes les configurations possibles ressembleront à celles de la figure.) On nomme aussi les différentes aires.



Puisque WX est parallèle à AB, alors le quadrilatère $ABXW$ est un trapèze. De même, les quadrilatères $BCYX$, $CDZY$ et $DAWZ$ sont des trapèzes.
La notation $|ABQP|$ représente l'aire du quadrilatère $ABQP$. Les autres aires sont notées de façon semblable.
Soit x la longueur des côtés du carré $ABCD$ et y la longueur des côtés du carré $PQRS$.
Soit $\angle WPQ = \theta$.
Puisque les triangles WPQ, XQR, YRS et ZSP sont rectangles et que chacun des angles du carré $PQRS$ mesure 90°, alors $\angle WPQ = \angle XQR = \angle YRS = \angle ZSP = \theta$. L'exemple suivant le démontre :

$$\angle XQR = 180^\circ - \angle PQR - \angle WQP = 90^\circ - (180^\circ - \angle PWQ - \angle WPQ) = 90^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta$$

D'après cette propriété et puisque $PQ = QR = RS = SP = y$, on peut conclure que les quatre triangles WPQ, XQR, YRS et ZSP sont isométriques.
Donc :

i. les quatre aires e, f, g et h sont égales (c.-à-d. que $e = f = g = h$),

ii. $PZ = QW = RX = SY = y\sin\theta$ et

iii. $WP = XQ = YR = ZS = y\cos\theta$.

D'après ces deux dernières propriétés, on peut conclure que $WZ = XW = YX = ZY$. Par exemple, on a $WZ = WP + PZ = ZS + SY = ZY$. Donc $WXYZ$ est un carré. Soit z la longueur de ses côtés.

On veut démontrer que $(a + r) + (c + n)$ est égal à $(b + m) + (d + s)$.
On remarque que la somme de ces deux quantités est égale à l'aire de la surface entre les carrés $ABCD$ et $WXYZ$. Elle est donc égale à $x^2 - z^2$.
Pour démontrer que les deux quantités sont égales, il suffit donc de démontrer que $(a + r) + (c + n)$ est égal à $\frac{1}{2}(x^2 - z^2)$.
Soit k la hauteur du trapèze $ABXW$ et l la hauteur du trapèze $ZYCD$.
Donc $|ABXW| = a + r = \frac{1}{2}k(AB + WX) = \frac{1}{2}k(x + z)$.
De plus, $|ZYCD| = c + n = \frac{1}{2}l(DC + ZY) = \frac{1}{2}l(x + z)$.

Puisque AB, WX, ZY et DC sont parallèles, alors la somme des hauteurs du trapèze $ABXW$, du carré $WXYZ$ et du trapèze $ZYCD$ est égale à la hauteur du carré $ABCD$.
Donc $k + z + l = x$, ou $k + l = x - z$.
Donc :

$$(a+r)+(c+n) = \tfrac{1}{2}k(x+z) + \tfrac{1}{2}l(x+z) = \tfrac{1}{2}(x+z)(k+l) = \tfrac{1}{2}(x+z)(x-z) = \tfrac{1}{2}(x^2 - z^2)$$

Donc $(a + r) + (c + n) = (b + m) + (d + s)$. On nomme cette équation $(*)$.

On veut démontrer que $r + n = m + s$.
On sait que $r = |\triangle QXB|$. On considère la base QX de ce triangle. La hauteur correspondante est égale à celle du trapèze $ABXW$, c'est-à-dire à k.
Donc $r = \frac{1}{2}(y \cos\theta)k$.
On sait que $n = |\triangle SZD|$. On considère la base SZ de ce triangle. La hauteur correspondante est égale à celle du trapèze $ZYCD$, c'est-à-dire à l.
Donc $n = \frac{1}{2}(y \cos\theta)l$.
D'après ces deux dernières équations, on a :

$$n + r = \tfrac{1}{2}(y\cos\theta)k + \tfrac{1}{2}(y\cos\theta)l = \tfrac{1}{2}y\cos\theta(k+l) = \tfrac{1}{2}y\cos\theta(x-z)$$

On remarque que cette somme dépend seulement de la longueur des côtés des carrés et de l'angle de rotation du carré intérieur. Elle est donc indépendante de la position du carré $PQRS$ à l'intérieur du carré $ABCD$.
On peut donc répéter cette démarche de manière à obtenir la même expression pour $m+s$.
Donc $n + r = m + s$. On nomme cette équation $(**)$.

On soustrait $(*) - (**)$, membre par membre, pour obtenir $a + c = b + d$.
On tient compte de tous ces résultats pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&(|ABQP| + |CDSR|) - (|BCRQ| + |APSD|) \\
&\quad = (a+e+s+c+g+m) - (b+f+r+d+h+n) \\
&\quad = ((a+c)-(b+d)) + ((m+s)-(n+r)) + ((e+g)-(f+h)) \\
&\quad = 0+0+0
\end{aligned}$$

car $a + c = b + d$ et $n + r = m + s$ et $e = f = g = h$.
Donc $|ABQP| + |CDSR| = |BCRQ| + |APSD|$, ce qu'il fallait démontrer.

10. Dans ce qui suit, on utilisera *partition* au lieu de l'expression *partition multiplicative*. De plus, les nombres qui paraissent dans une partition seront appelés les *parties* de la partition.

(a) On détermine le nombre de partitions de 64 en considérant le nombre de parties dans les diverses partitions. On remarque que 64 est une puissance de 2. Donc, tout diviseur de 64 est aussi une puissance de 2. Puisque l'ordre des facteurs n'importe pas, on on écrit les parties en ordre croissant de manière à déterminer les parties plus facilement.

i. Une partie. Il y a une possibilité, soit 64.

ii. Deux parties. Il y a trois possibilités, soit 2×32, 4×16 et 8×8.

iii. Trois parties. On considère d'abord les plus petites premières et deuxièmes parties. On fixe la première partie, tout en ajustant les deuxième et troisième parties. On augmente ensuite la première partie pour recommencer.
On obtient $2 \times 2 \times 16$, $2 \times 4 \times 8$ et $4 \times 4 \times 4$.

iv. Quatre parties. Une telle partition doit inclure au moins deux facteurs 2 ; autrement, il faudrait au moins trois parties avec un facteur supérieur ou égal à 4, ce qui serait trop grand. Avec deux facteurs 2, les deux autres parties ont un produit de 16.
On obtient $2 \times 2 \times 2 \times 8$ et $2 \times 2 \times 4 \times 4$.

v. Cinq parties. Une telle partition doit inclure au moins trois facteurs 2 ; autrement, il faudrait au moins trois parties avec un facteur supérieur ou égal à 4, ce qui serait trop grand. Avec trois facteurs 2, les deux autres parties ont un produit de 8.
On obtient $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4$.

vi. Six parties. Puisque $64 = 2^6$, il y a une seule possibilité, soit $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Donc $P(64) = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$, ou $P(64) = 11$.

(b) On remarque que $1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 5^3$.
On détermine la valeur de $P(p^3q^3)$, p et q étant deux nombres premiers distincts. On verra que cette valeur ne dépend pas de p, ni de q. Cette valeur sera donc la valeur de $P(1000)$, puisque la factorisation première de 1000 est de cette forme.

Soit $n = p^3q^3$, p et q étant deux nombres premiers distincts.
L'entier n admet trois facteurs premiers p.
Dans une partition, ces facteurs peuvent paraitre ensemble en formant une partie (sous la forme p^3), ils peuvent paraitre en formant deux parties distinctes (sous les formes p et p^2), ou ils peuvent pararaitre en formant trois parties (sous les formes p, p et p). Ce sont les seules façons de séparer les trois facteurs p.
De même, n admet trois facteurs premiers q et ces trois facteurs peuvent paraitre de trois façons semblables aux précédentes.
On détermine $P(p^3q^3)$ en considérant le nombre de parties divisibles par p et le nombre de parties divisibles par q et en comptant le nombre de partitions dans chaque cas. En d'autres mots, on remplit le tableau suivant :

		Nombre de parties divisibles par p		
		1	2	3
Nombre de parties divisibles par q	1			
	2			
	3			

On remarque que le tableau est symétrique, puis que l'on peut changer les facteurs p et q l'un pour l'autre.

On considère divers cas à partir de la diagonale descendante (de gauche à droite) et les parties du tableau en dessous de cette diagonale.

1er cas : Une partie est divisible par p, l'autre partie est divisible par q

La partition doit être p^3q^3 (c.-à-d. le nombre n lui-même) ou $p^3 \times q^3$.
Il y a donc deux partitions dans ce cas.

2e cas : Une partie est divisible par p, deux parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent ensemble sous la forme p^3. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q et q^2.
Le facteur p^3 peut paraitre ou non dans une des parties divisibles par q.
On obtient les partitions $p^3 \times q \times q^2$, $p^3q \times q^2$ et $q \times p^3q^2$.
Il y a trois partitions dans ce cas. De même, il y a trois partitions lorsqu'une partie est divisible par q et deux parties sont divisibles par p.

3e cas : Une partie est divisible par p, trois parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent ensemble sous la forme p^3. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q, q et q.
Le facteur p^3 peut paraitre ou non dans une des parties divisibles par q.
On obtient les partitions $p^3 \times q \times q \times q$ et $p^3q \times q \times q$.
(On remarque que l'on peut changer l'un pour l'autre les trois diviseurs q et il suffit donc de placer p^3 avec l'un d'entre eux.)
Il y a deux partitions dans ce cas. De même, il y a deux partitions lorsqu'une partie est divisible par q et trois parties sont divisibles par p.

4e cas : Deux parties sont divisibles par p, deux parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p peuvent paraitre sous les formes p et p^2. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q et q^2.
Les facteurs p et p^2 peuvent paraître ou non dans une des parties divisibles par q.
S'il n'y a aucune partie qui est un multiple de p et de q, il y a une seule partition, soit $p \times p^2 \times q \times q^2$.
S'il y a une partie qui est un multiple de p et de q, on a deux choix quant à la puissance de p et deux choix quant à la puissance de q. (Il n'y a aucun choix par rapport aux autres parties.) Il y a donc 2×2 partitions, c'est-à-dire 4 partitions :

$$p^2q^2 \times p \times q \qquad pq^2 \times p^2 \times q \qquad p^2q \times p \times q^2 \qquad pq \times p^2 \times q^2$$

S'il y a deux parties qui sont des multiples de p et de q, il y a deux choix par rapport à la puissance de p dans la partie qui contient q. Il y a donc deux partitions, soit $pq \times p^2q^2$ et $p^2q \times pq^2$.
Il y a sept partitions dans ce cas.

5e cas : Deux parties sont divisibles par p, trois parties sont divisibles par q

Les trois facteurs p paraissent sous les formes p et p^2. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q, q et q.
Les facteurs p et p^2 peuvent paraitre ou non dans une des parties divisibles par q.
S'il n'y a aucune partie qui est un multiple de p et de q, il y a une seule partition, soit $p \times p^2 \times q \times q \times q$.
S'il y a une partie qui est un multiple de p et de q, on a deux choix quant à la puissance de p qui paraitra dans cette partie (puisque les puissances de q sont identiques).
Il y a donc deux telles partitions, soit $p^2q \times p \times q \times q$ et $pq \times p^2 \times q \times q$.
S'il y a deux parties qui sont des multiples de p et de q, il y a une partition, soit $pq \times p^2q \times q$, puisque les puissances de q sont identiques .
Il y a quatre partitions dans ce cas. De même, il y a quatre partitions lorsque deux parties

sont divisibles par q et trois parties sont divisibles par p.

<u>6^{e} cas : Trois parties sont divisibles par p, trois parties sont divisibles par q</u>
Les trois facteurs p paraissent sous les formes p, p et p. Les trois facteurs q paraissent sous les formes q, q et q.
Il peut y avoir 0, 1, 2 ou 3 parties de la partition qui sont des multiples de p et de q. Puisque les puissances de p et de q sont identiques, cela détermine les partions. Les partitions sont :

$$p \times p \times p \times q \times q \times q \qquad p \times p \times pq \times q \times q \qquad p \times pq \times pq \times q \qquad pq \times pq \times pq$$

Il y a quatre partitions dans ce cas.

On remplit le tableau :

		Nombre de parties divisibles par p		
		1	2	3
Nombre de parties divisibles par q	1	2	3	2
	2	3	7	4
	3	2	4	4

On additionne les nombres du tableau pour obtenir $P(p^3q^3) = 31$.
Donc $P(1000) = 31$.

(c) Comme dans la partie (b), la valeur de $P(n)$ dépend seulement de la structure de la factorisation première de n et non pas des nombres premiers dans la factorisation première.
Donc $P(4 \times 5^m) = P(2^2 \times 5^m) = P(p^2q^m)$, p et q étant n'importe quels nombres premiers distincts.
Donc $P(4 \times 5^m) = P(p^2q^m) = P(5^2 \times 2^m) = P(25 \times 2^m)$.
On compte le nombre de partitions multiplicatives de $N = 5^2 \times 2^m$ en considérant la position et les nombres de facteurs 2 et 5 dans les partitions.
Puisque N admet deux facteurs 5, ces facteurs peuvent paraitre dans une même partie ou dans deux parties distinctes.
On remarque que chaque facteur de N est un produit de la forme 5^j2^k, j et k étant des entiers tels que $0 \leq j \leq 2$ et $0 \leq k \leq m$.

On compte d'abord le nombre de partitions dans lesquelles les deux 5 paraissent dans la même partie.
On considère une telle partition.
Dans cette partition, la partie qui contient les deux 5 sera de la forme 5^22^k, k étant un entier tels que $0 \leq k \leq m$.
La partition sera donc de la forme $5^22^k \times \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ étant une partition de 2^{m-k} (c.-à-d. des autres facteurs de N).
Puisque l'ordre des parties n'importe pas, il y a $P(2^{m-k})$ telles partitions $\mathcal{P}$. Il s'agit donc du nombre de partitions de N de cette forme.
Puisque k varie de 0 à m, alors le nombre de partitions dans lesquelles les deux 5 paraissent dans la même partie est égal à :

$$P(2^m) + P(2^{m-1}) + \cdots + P(2^1) + P(2^0)$$

On compte ensuite le nombre de partitions dans lesquelles les deux 5 paraissent dans des parties distinctes.
On considère une telle partition.

Dans cette partition, les deux parties qui contiennent un 5 seront de la forme 5×2^a et 5×2^b, a et b étant des entiers tels que $0 \leq a, b \leq m$ et $a + b \leq m$.
Puisque l'ordre des parties n'importe pas, on peut restreindre davantage les valeurs de a et de b en exigeant que $0 \leq a \leq b \leq m$ et $a + b \leq m$ pour éviter de compter des partitions deux fois.
Cette partition sera donc de la forme $(5 \times 2^a) \times (5 \times 2^b) \times \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ étant une partition de 2^{m-a-b} (c.-à-d. des autres facteurs de N).
Puisque l'ordre des parties n'importe pas, il y a $P(2^{m-a-b})$ telles partitions $\mathcal{P}$, ce qui est donc égal au nombre de partitions de N de cette forme.

Pour déterminer le nombre total de partitions, dans ce cas, il faut additionner les valeurs de $P(2^{m-a-b})$ pour tous les couples possibles (a, b) tels que $0 \leq a \leq b \leq m$ et $a + b \leq m$.
Pour ce faire, on considère les valeurs possibles de s, où $s = a + b$, et on compte le nombre de couples (a, b) qui correspondent à cette somme.
Si $s = a + b = 0$, il y a un couple (a, b), soit $(0, 0)$.
Si $s = a + b = 1$, il y a un couple (a, b), soit $(0, 1)$.
Si $s = a + b = 2$, il y a deux couples (a, b), soit $(0, 2)$ et $(1, 1)$.
De façon générale, si s est pair, alors $\frac{1}{2}s$ est un entier et il y a alors $(\frac{1}{2}s + 1)$ couples (a, b), soit :

$$(0, s), (1, s-1), (2, s-2), \ldots, (\tfrac{1}{2}s - 1, \tfrac{1}{2}s + 1), (\tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}s)$$

Toute grande valeur de a donnerait une valeur de b inférieure à celle de a.
De façon générale, si s est impair, alors $\frac{1}{2}(s-1)$ est un entier et il y a alors $(\frac{1}{2}(s-1)+1)$ couples, ou $\frac{1}{2}(s+1)$ couples (a, b), soit :

$$(0, s), (1, s-1), (2, s-2), \ldots, (\tfrac{s-3}{2}, \tfrac{s+3}{2}), (\tfrac{s-1}{2}, \tfrac{s+1}{2})$$

Toute grande valeur de a donnerait une valeur de b inférieure à celle de a.
Pour résumer, si $s = a + b$ est pair, il y a $\frac{1}{2}s + 1$ couples (a, b) et si $s = a + b$ est impair, il y a $\frac{1}{2}(s + 1)$ couples (a, b).
Donc, à mesure que s augmente, à partir de 0, les nombres de couples (a, b) forment la suite $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$
Le terme de cette suite qui correspond à la valeur de $a + b$ donne le nombre de fois que $P(2^{m-a-b})$ doit être inclu dans le compte du nombre total de partitions dans ce cas.
En d'autres mots, si $a + b = 0$, il y a $1 \times P(2^m)$ partitions ; si $a + b = 1$, il y a $1 \times P(2^{m-1})$ partitions ; si $a + b = 2$, il y a $2 \times P(2^{m-2})$ partitions ; et ainsi de suite.
On peut récrire cela de façon plus compacte en disant que pour une valeur donnée de s, le nombre de couples (a, b) est égal à $\left\lfloor \dfrac{s+2}{2} \right\rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ étant le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x). Le nombre de partitions est donc égal à $\left\lfloor \dfrac{s+2}{2} \right\rfloor \times P(2^{m-s})$.
Dans ce cas, le nombre total de partitions de N est égal à :

$$1 \times P(2^m) + 1 \times P(2^{m-1}) + 2 \times P(2^{m-2}) + 2 \times P(2^{m-3}) + \cdots + \left\lfloor \frac{s+2}{2} \right\rfloor \times P(2^{m-s}) + \cdots$$

$$+ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \times P(2^1) + \left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor \times P(2^0)$$

On considère maintenant les deux cas, tout en additionnant les expressions correspondantes pour les nombres de partitions. Le nombre total de partitions est donc :

$$2 \times P(2^m) + 2 \times P(2^{m-1}) + 3 \times P(2^{m-2}) + 3 \times P(2^{m-3}) + \cdots + \left(1 + \left\lfloor \frac{s+2}{2} \right\rfloor\right) \times P(2^{m-s}) + \cdots$$

$$+ \left(1 + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor\right) \times P(2^1) + \left(1 + \left\lfloor \frac{m+2}{2} \right\rfloor\right) \times P(2^0)$$

La suite d'entiers demandée est donc :

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 3 \\ &\vdots \\ a_s &= 1 + \left\lfloor \frac{s+2}{2} \right\rfloor \\ &\vdots \end{aligned}$$