Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

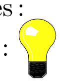
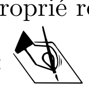
le mercredi 17 avril 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 18 avril 2013
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Durée : 2 heures et demie
Nombre de questions : 10
L'utilisation d'une calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
Chaque question vaut 10 points.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées a l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1. (a) Quel est le plus petit entier strictement positif x pour lequel $\sqrt{113+x}$ est un entier ?

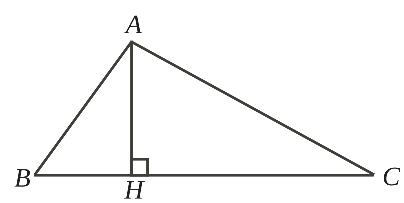
   (b) La moyenne de 3 et de 11 est égale à a. La moyenne de a et de b est égale à 11. Quelle est la valeur de b ?

   (c) Charlot a 30 ans de plus que sa fille Bella. Charlot a aussi six fois l'âge de Bella. Déterminer l'âge de Charlot.

2. (a) Sachant que $\dfrac{21}{x} = \dfrac{7}{y}$ et que $x, y \neq 0$, quelle est la valeur de $\dfrac{x}{y}$?

   (b) Pour quel entier strictement positif n les inégalités $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}2013$ et $0{,}2013 < \dfrac{1}{n}$ sont-elles vraies toutes les deux ?

   (c) Dans la figure ci-contre, le point H est situé sur le côté BC du triangle ABC de manière que AH soit perpendiculaire à BC. De plus, $AB = 10$, $AH = 8$ et le triangle ABC a une aire de 84. Déterminer le périmètre du triangle ABC.



3. (a) Dans la suite de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, chaque terme après les deux premiers est égal à la somme des deux termes précédents. Parmi les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, combien sont impairs ?

   (b) Dans une suite arithmétique, le premier terme et le troisième terme ont une somme de 6. De plus, le deuxième terme et le quatrième terme ont une somme de 20. Déterminer le dixième terme de la suite.

   (Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

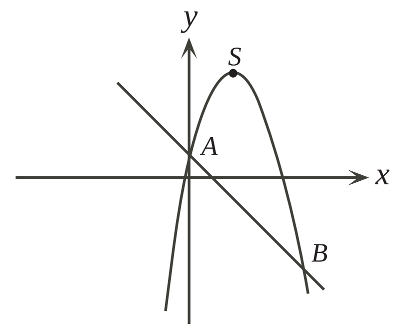
4. (a) Combien y a-t-il d'entiers positifs inférieurs à 1000 dont tous les chiffres sont impairs ?

(b) Déterminer tous les couples (a, b) qui vérifient le système d'équations suivant :

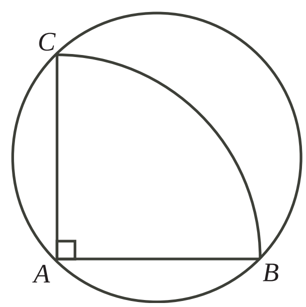
$$\begin{aligned} a + b &= 16 \\ \frac{4}{7} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{aligned}$$

5. (a) Thierry a deux dés identiques. Chaque dé a six faces portant les numéros 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Lorsque Thierry jette les deux dés, quelle est la probabilité pour que la somme des nombres sur les faces supérieures soit un nombre premier ?

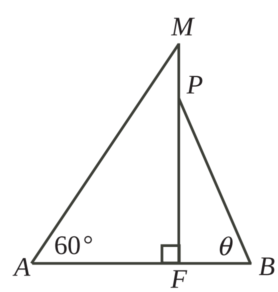
(b) Dans la figure ci-contre, S est le sommet de la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$. De plus, A et B sont les points d'intersection de la parabole et de la droite d'équation $y = -x + 1$. Déterminer la valeur de l'expression $AS^2 + BS^2 - AB^2$.



6. (a) Dans la figure ci-contre, ABC est un quart d'une pizza circulaire de centre A et de rayon 20 cm. Comme l'indique la figure, le morceau de pizza est placé sur un plat circulaire de manière que les points A, B et C touchent au bord du plat. Quelle fraction du plat le morceau de pizza recouvre-t-il ?



(b) Le pont AB d'un voilier a une longueur de 8 m. Un cordage s'étend à un angle de 60° du point A jusqu'au sommet (M) du mât du voilier. Un deuxième cordage s'étend du point B au point P situé à 2 m dessous le point M. Il forme un angle θ avec l'horizontale, comme l'indique la figure. Déterminer la hauteur MF du mât en fonction de θ.



7. (a) Sachant que $\dfrac{1}{\cos x} - \tan x = 3$, quelle est la valeur numérique de $\sin x$?

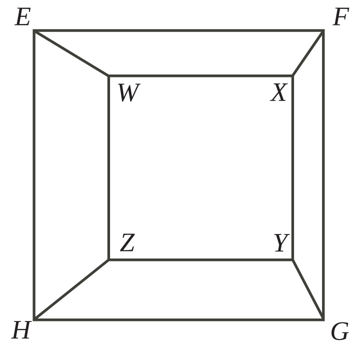
(b) Déterminer toutes les fonctions affines $f(x) = ax + b$ telles que si $g(x) = f^{-1}(x)$ pour toutes les valeurs de x, alors $f(x) - g(x) = 44$ pour toutes les valeurs de x. (Remarque : f^{-1} est la fonction réciproque de f.)

8. (a) Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $a^3 + 2ab = 2013$.

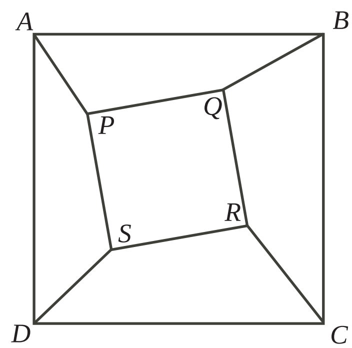
(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles

$$\log_2(2^{x-1} + 3^{x+1}) = 2x - \log_2(3^x)$$

9. (a) Dans la figure ci-contre, le carré $WXYZ$ a des côtés de longueur 6. Il est placé à l'intérieur du carré $EFGH$, qui a des côtés de longueur 10, de manière que les carrés ne se touchent pas et que WX soit parallèle à EF. Démontrer que la somme de l'aire du trapèze $EFXW$ et de l'aire du trapèze $GHZY$ ne dépend pas de la position du carré $WXYZ$ à l'intérieur du carré $EFGH$.



(b) Dans la figure ci-contre, un carré $PQRS$ est placé à l'intérieur d'un plus grand carré $ABCD$ de manière que les deux carrés de se touchent pas. On a tracé des segments de droites AP, BQ, CR et DS de manière à diviser la région entre les carrés en quatre quadrilatères convexes qui ne chevauchent pas. Sachant que les côtés de $PQRS$ *ne sont pas* parallèles à des côtés de $ABCD$, démontrer que la somme de l'aire du quadrilatère $APSD$ et de celle de $BCRQ$ est égale à la somme de l'aire du quadrilatère $ABQP$ et de celle de $CDSR$. (Remarque : Un quadrilatère est convexe si chacun de ses angles intérieurs a une mesure inférieure à 180°.)



10. Une *partition multiplicative* d'un entier strictement positif n est une façon d'exprimer n comme produit d'entiers supérieurs à 1. On considère qu'un entier est une partition multiplicative de lui-même. De plus, l'ordre des facteurs n'importe pas. Ainsi $2 \times 3 \times 5$ et $2 \times 5 \times 3$ sont considérées comme la même partition de 30. Étant donné un entier strictement positif n, $n \geq 2$, alors $P(n)$ représente le nombre de partitions multiplicatives de n. On définit aussi $P(1) = 1$. On remarque que $P(40) = 7$, puisque les partitions multiplicatives de 40 sont 40, 2×20, 4×10, 5×8, $2 \times 2 \times 10$, $2 \times 4 \times 5$ et $2 \times 2 \times 2 \times 5$.

(a) Déterminer la valeur de $P(64)$.

(b) Déterminer la valeur de $P(1000)$.

(c) Déterminer, preuve à l'appui, une suite d'entiers $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de manière que

$$P(4 \times 5^m) = a_0 P(2^m) + a_1 P(2^{m-1}) + a_2 P(2^{m-2}) + \cdots + a_{m-1} P(2^1) + a_m P(2^0)$$

pour chaque entier strictement positif m.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2013!
En 2012, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2013.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2013/2014
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)