Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2013

(10^{e} année – Secondaire IV)

le jeudi 21 février 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 février 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $\dfrac{8+4}{8-4} = \dfrac{12}{4} = 3$

Réponse : (B)

2. On a $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \times 2 = 4$ et $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Donc $2^3 + 2^2 + 2^1 = 8 + 4 + 2 = 14$.

Réponse : (C)

3. Puisque $\sqrt{81} = 9$, l'équation devient $x + 9 = 25$, d'où $x = 16$.

Réponse : (A)

4. On peut diviser chaque entier par 3 à l'aide d'une calculatrice et vérifier combien des réponses sont des entiers.
On peut aussi utiliser le fait qu'un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Les sommes respectives des chiffres des nombres 222, 2222, 22 222 et 222 222 sont 6, 8, 10 et 12.
Deux de ces sommes sont divisibles par 3, soit 6 et 12. Donc, deux des entiers sont divisibles par 3, soit 222 et 222 222.

Réponse : (C)

5. Puisque le champ initial a une longueur de 20 m et une largeur de 5 m, alors son aire est égale à (20×5) m^2, ou 100 m^2.
La nouvelle longueur de champ est de 20 m + 10 m, ou 30 m. La nouvelle aire est donc égale à (30×5) m^2, ou 150 m^2.
L'augmentation est donc de 150 m^2 $-$ 100 m^2, ou 50 m^2.
(On peut aussi remarquer que puisque la longueur augmente de 10 m et que la largeur est inchangée à 5 m, alors l'augmentation de l'aire est égale à (10×5) m^2, ou 50 m^2.)

Réponse : (C)

6. Puisque les coches indiquent que le cylindre est divisé en quatre parties de même volume, on voit que le niveau de lait est légèrement inférieur à $\frac{3}{4}$ de la hauteur, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}$ du cylindre plein.
Or, $\frac{3}{4}$ du volume du cylindre est égal à $\frac{3}{4} \times 50$ L, ou 37,5 L.
Le choix de réponse qui est légèrement inférieur à 37,5 L est 36 L, soit le choix (D).

Réponse : (D)

7. Puisque le triangle PQR est équilatéral, alors $PQ = QR = RP$.
Alors $4x = x + 12$, d'où $3x = 12$, ou $x = 4$.

Réponse : (C)

8. D'après la définition de l'opération, $3 \diamond 6 = \dfrac{3+6}{3 \times 6}$, d'où $3 \diamond 6 = \dfrac{9}{18}$, ou $3 \diamond 6 = \dfrac{1}{2}$.

Réponse : (E)

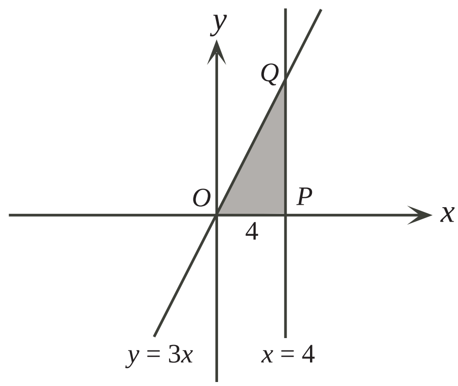
9. D'après le théorème de Pythagore, l'aire du carré formé sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés formés sur les deux autres côtés.
Donc, l'aire du carré sur PQ est égale à l'aire du carré sur PR moins l'aire du carré sur QR, c'est-à-dire à $169 - 144$, ou 25.

Réponse : (E)

10. Puisque les trois soeurs ont une moyenne d'âge de 27 ans, la somme de ces âges est de 3×27 ans, ou 81 ans.
Puisque Bruno et ses soeurs ont une moyenne d'âge de 28 ans, la somme de ces âges est de 4×28 ans, ou 112 ans.
L'âge de Bruno, en années, est égal à la différence entre ces sommes, soit $112 - 81$, ou 31.
Bruno a 31 ans.

Réponse : (E)

11. Soit O l'origine (où la droite d'équation $y = 3x$ coupe l'axe des abscisses).
Soit P le point où la droite d'équation $x = 4$ coupe l'axe des abscisses et Q le point d'intersection des droites d'équations $x = 4$ et $y = 3x$.



Puisque la droite d'équation $x = 4$ est perpendiculaire à l'axe des abscisses, le triangle donné est rectangle en P.
Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(OP)(PQ)$.
Or, P est situé sur l'axe des abscisses et sur la droite d'équation $x = 4$. Il a donc pour coordonnées $(4, 0)$. Donc $OP = 4$.
Le point Q a aussi une abscisse de 4. Puisque Q est situé sur la droite d'équation $y = 3x$, ses coordonnées $(4, y)$ vérifient cette équation. Donc $y = 3(4)$, ou $y = 12$. Donc, Q a pour coordonnées $(4, 12)$.
Puisque P a pour coordonnées $(4, 0)$ et que Q a pour coordonnées $(4, 12)$, alors $PQ = 12$.
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(4)(12)$, ou 24.

Réponse : (B)

12. *Solution 1*
Puisque $a(x + b) = 3x + 12$ pour toutes les valeurs de x, alors $ax + ab = 3x + 12$ pour toutes les valeurs de x.
Puisque l'équation est vraie pour toutes les valeurs de x, les coefficients doivent être les mêmes dans chaque membre de l'équation.
Donc $a = 3$ et $ab = 12$, d'où $3b = 12$, ou $b = 4$.
Donc $a + b = 3 + 4$, ou $a + b = 7$.

Solution 2
Puisque $a(x+b) = 3x+12$ pour toutes les valeurs de x, alors l'équation est vraie pour les valeurs particulières $x = 0$ et $x = 1$.
Lorsque $x = 0$, l'équation devient $a(0 + b) = 3(0) + 12$, d'où $ab = 12$.
Lorsque $x = 1$, l'équation devient $a(1 + b) = 3(1) + 12$, d'où $a + ab = 15$.
Puisque $ab = 12$, la dernière équation devient $a + 12 = 15$, ou $a = 3$.
Puisque $ab = 12$ et $a = 3$, alors $b = 4$.
Donc $a + b = 3 + 4$, ou $a + b = 7$.

Réponse : (D)

13. *Solution 1*
Si $x = 1$, l'expression $3x + 1$ a une valeur de 4, ce qui est un entier pair.
Pour cette valeur de x, voici les valeurs des expressions des cinq choix de réponses :

(A) $x + 3 = 4$ (B) $x - 3 = -2$ (C) $2x = 2$ (D) $7x + 4 = 11$ (E) $5x + 3 = 8$

Seule l'expression (D) a une valeur impaire. Puisque $x = 1$ répond au critère initial, soit que l'expression prend une valeur entière impaire, la réponse doit être (D).

Solution 2
Soit x un entier pour lequel l'expression $3x + 1$ prend une valeur entière paire. Donc $3x$ est un entier impair, car il est 1 de moins qu'un entier pair.
Puisque $3x$ a une valeur entière impaire, alors x est un entier impair (si x était pair, $3x$ serait le produit d'un entier pair et d'un entier impair, ce qui serait un entier pair).
Puisque x est un entier impair, alors $x + 3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (A) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $x - 3$ est un entier pair (un entier impair moins un entier impair est toujours un entier pair). Donc, le choix (B) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $2x$ est un entier pair (le produit d'un entier pair et d'un entier impair est toujours pair). Donc, le choix (C) n'est pas le bon.
Puisque x est un entier impair, alors $7x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $7x+4$ est un entier impair (la somme d'un entier impair et d'un entier pair est toujours impaire).
Puisque x est un entier impair, alors $5x$ est un entier impair (le produit de deux entiers impairs est toujours impair. Donc $5x+3$ est un entier pair (la somme de deux entiers impairs est toujours paire). Donc, le choix (E) n'est pas le bon.
La seule expression qui doit être impaire est $7x + 4$.

Réponse : (D)

14. Pour former le plus grand entier à partir d'un ensemble donné de chiffres, on place le plus grand chiffre dans la colonne des milliers, le deuxième plus grand chiffre dans la colonne des centaines, le troisième plus grand chiffre dans la colonne des dizaines et le dernier chiffre dans la colonne des unités. En effet, un grand chiffre contribue davantage s'il est placé là où il a une plus grande valeur.
Donc, en utilisant les chiffres 2, 0, 1 et 3, le plus grand entier que l'on peut former est 3210.
Pour former le plus petit entier à partir d'un ensemble donné de chiffres, on place les chiffres en ordre croissant de gauche à droite, soit de la colonne des milliers jusqu'à la colonne des unités.
Or dans ce problème, on demande des entiers supérieurs à 1000. Donc, le chiffre des milliers doit être au moins 1. On forme donc le plus petit entier en plaçant le chiffre 1 dans la colonne des milliers et les autres chiffres en ordre croissant. On obtient 1023.
La différence entre le plus grand et le plus petit entier est donc égale à $3210 - 1023$, ou 2187.

Réponse : (A)

15. Puisque 40 % des chansons de la nouvelle liste sont de style country, alors les 60 % des chansons qui restent ($100\,\% - 40\,\% = 60\,\%$) doivent être de style pop ou hip-hop .
Puisque le rapport du nombre de chansons hip-hop au nombre de chansons pop reste le même, alors 65 % de 60% des chansons qui restent doivent être de style hip-hop.
Or, 65 % de 60 % $= 65\,\% \times 60\,\% = 0{,}65 \times 0{,}6 = 0{,}39 = 39\,\%$. Donc, les chansons hip-hop représentent maintenant 39 % des chansons sur la liste de lecture.

Réponse : (E)

16. On peut déterminer que $5^{35} - 6^{21}$ est un entier strictement positif, puisque

$$5^{35} - 6^{21} = (5^5)^7 - (6^3)^7 = 3125^7 - 216^7$$

et $3125 > 216$.
On note aussi que toutes les puissances de 5 ont un chiffre des unités égal à 5. En effet, puisque $5 \times 5 = 25$ et que ce produit a un chiffre des unités égal à 5, alors le chiffre des unités de 5^3 est obtenu en multipliant par 5 le chiffre des unités 5 de 25. De même, chaque puissance successive de 5 a un chiffre des unités égal à 5.
De la même manière, toutes les puissances de 6 ont un chiffre des unités égal à 6.
Donc 5^{35} a un chiffre des unités égal à 5 et 6^{21} a un chiffre des unités égal à 6. Si on soustrait un nombre ayant un chiffre des unités égal à 6 d'un nombre ayant un chiffre des unités égal à 5, on obtient un chiffre des unités égal à 9.
Donc lorsqu'on évalue l'expression $5^{35} - 6^{21}$, la réponse a un chiffre des unités égal à 9.

Réponse : (B)

17. On a :

$$\begin{array}{rcll} \text{Périmètre du triangle } PST & = & PS + ST + PT & \\ & = & PS + (SU + UT) + PT & \\ & = & PS + SQ + TR + PT & \text{(puisque } SU = SQ \text{ et } UT = TR) \\ & = & (PS + SQ) + (PT + TR) & \\ & = & PQ + PR & \\ & = & 19 + 17 & \\ & = & 36 & \end{array}$$

Donc, le triangle PST a un périmètre de 36.

Réponse : (A)

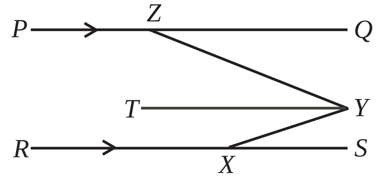
18. Lorsqu'on divise 109 par l'entier x, on obtient un reste de 4. Donc, x doit être un diviseur de 105. En effet, soit q le quotient de la division de 109 par x. Puisqu'il y a un reste de 4, alors $109 = qx + 4$, d'où $qx = 105$.
Puisque $105 = 5 \times 21 = 5 \times 3 \times 7$, les diviseurs (entiers) positifs de 105 sont :

$$1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105$$

Seuls 15, 21 et 35 sont des diviseurs de deux chiffres. Ce sont les seules valeurs possibles de x.
La somme des valeurs possibles de x est donc égale à $15 + 21 + 35$, ou 71.

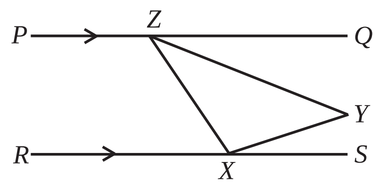
Réponse : (D)

19. *Solution 1*
Au point Y, on trace un segment TY parallèle à PQ et à RS et on efface le segment ZX, comme dans la figure suivante.



Puisque TY est parallèle à RS, alors $\angle TYX = \angle YXS = 20°$.
Donc $\angle ZYT = \angle ZYX - \angle TYX$, d'où $\angle ZYT = 50° - 20°$, ou $\angle ZYT = 30°$.
Puisque PQ est parallèle à TY, alors $\angle QZY = \angle ZYT = 30°$.

Solution 2
Puisque QZ et XS sont parallèles, $\angle QZX + \angle ZXS = 180°$.



Or, $\angle QZX = \angle QZY + \angle YZX$ et $\angle ZXS = \angle ZXY + \angle YXS$.
On sait que $\angle YXS = 20°$.
De plus, la somme des mesures d'angles du triangle XYZ est égale à 180°.
Donc $\angle YZX + \angle ZXY + \angle ZYX = 180°$, d'où $\angle YZX + \angle ZXY = 180° - \angle ZYX$, ou $\angle YZX + \angle ZXY = 180° - 50°$, ou $\angle YZX + \angle ZXY = 130°$.
Puisque PQ est parallèle à RS, alors $\angle QZY + \angle YZX + \angle ZXY + \angle YXS = 180°$. On reporte les résultats précédents dans cette équation pour obtenir $\angle QZY + 130° + 20° = 180°$.
Donc $\angle QZY = 180° - 130° - 20°$, d'où $\angle QZY = 30°$.

RÉPONSE : (A)

20. Soit d km la longueur du parcours.
Luce parcourt donc $\frac{d}{2}$ km en faisant son jogging à une vitesse de 6 km/h et elle parcourt $\frac{d}{2}$ km en courant à une vitesse de 12 km/h.
On sait que le temps écoulé est égal à la distance parcourue divisée par la vitesse.
Puisque Luce met x heure pour faire le parcours complet, alors $x = \frac{d/2}{6} + \frac{d/2}{12}$, d'où $x = \frac{d}{12} + \frac{d}{24}$, ou $x = \frac{2d}{24} + \frac{d}{24}$, ou $x = \frac{3d}{24}$, ou $x = \frac{d}{8}$.
Aussi, Luc parcourt $\frac{d}{3}$ km en marchant à une vitesse de 5 km/h et il parcourt $\frac{2d}{3}$ km en courant à une vitesse de 15 km/h.
Puisque Luc met y heure pour faire le parcours complet, alors $y = \frac{d/3}{5} + \frac{2d/3}{15}$, d'où $y = \frac{d}{15} + \frac{2d}{45}$, ou $y = \frac{3d}{45} + \frac{2d}{45}$, ou $y = \frac{5d}{45}$, ou $y = \frac{d}{9}$.
Donc $\frac{x}{y} = \frac{d/8}{d/9}$, d'où $\frac{x}{y} = \frac{9}{8}$.

RÉPONSE : (A)

21. On remarque que la somme des chiffres des unités, soit $X + Y + Z$, donne un chiffre des unités égal à X. Donc, $Y + Z$ doit avoir un chiffre des unités égal à 0. Puisqu'aucun des chiffres de l'addition est nul, il doit y avoir une retenue. Puisque Y et Z sont des chiffres différents, de 1 à 9, leur somme ne peut dépasser 17. On doit donc avoir $Y + Z = 10$ et la retenue est égale à 1. En comparant la colonne des unités et la colonne des dizaines, dans la réponse, on peut conclure que $Y = X + 1$.

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & X & X & X \\ & Y & Y & Y \\ + & Z & Z & Z \\ \hline Z & Y & Y & X \end{array}$$

Voici deux façons de terminer la solution.

1[re] façon

On considère la somme indiquée ci-dessus.

À l'exception de la retenue, les trois colonnes de chiffres qui doivent être additionnés sont identiques. Or, dans la réponse, la colonne des dizaines et la colonne des centaines ont un Y au bas. Il doit donc y avoir une retenue de 1 en haut de la colonne des centaines.

De plus, en additionnant la colonne des centaines, qui est maintenant identique à la colonne des dizaines, on aura la même réponse, soit le chiffre Y au bas et une retenue de 1. Donc $Z = 1$.

On a donc la situation ci-contre.

On sait aussi que $Y + Z = 10$. Puisque $Z = 1$, alors $Y = 9$.

De plus, on sait que $Y = X + 1$. Puisque $Y = 9$, alors $X = 8$.

(On peut vérifier l'addition. Si $X = 8$, $Y = 9$ et $Z = 1$, alors $888 + 999 + 111 = 1998$, ce qui correspond à l'addition donnée.)

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & X & X & X \\ & Y & Y & Y \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & Y & Y & X \end{array}$$

2[e] façon

Puisque $Y + Z = 10$, alors $YYY + ZZZ = 1110$.

En effet, chaque colonne donne une retenue de 1 qui est ajoutée à la somme de la colonne suivante à la gauche. On peut aussi constater que YYY et ZZZ sont des multiples de 111, c'est-à-dire que $YYY = Y \times 111$ et $ZZZ = Z \times 111$. Donc $YYY + ZZZ = (Y + Z) \times 111 = 10 \times 111 = 1110$.

L'addition donnée devient donc $1110 + XXX = ZYYX$.

Si on avait $X = 9$, la somme donnée deviendrait $1110 + 999 = 2009$, d'où $Y = 0$. Puisque tous les chiffres sont non nuls, ce ne peut être le cas.

Donc $X \leq 8$.

Donc, $1110 + XXX$ ne peut pas dépasser $1110 + 888$, ou 1998. Donc, Z doit être égal à 1, peu importe la valeur de X.

Puisque $Y + Z = 10$, alors $Y = 9$.

L'addition donnée devient donc $1110 + XXX = 199X$.

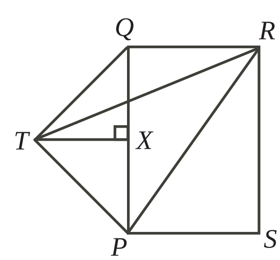
Puisque X est un chiffre, alors $X + 1 = 9$, d'où $X = 8$.

On peut vérifier que ces chiffres vérifient l'addition donnée.

Réponse : (D)

22. *Solution 1*

Au point T, on abaisse une perpendiculaire TX au côté QP.



Puisque le triangle QTP est isocèle, X est le milieu de QP. Puisque ce triangle est aussi rectangle, alors $\angle TPQ = \angle TQP = 45°$.

Puisque $QP = 4$, alors $QX = XP = 2$.

Puisque $\angle TQP = 45°$ et $\angle QXT = 90°$, alors le triangle QXT aussi est isocèle et rectangle.

Donc $TX = QX = 2$.

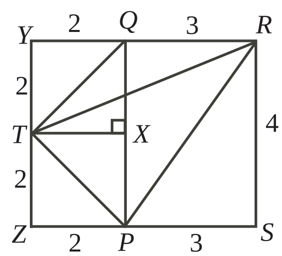
On calculera l'aire du triangle PTR en additionnant l'aire du triangle QRP à l'aire du triangle QTP et en soustrayant l'aire du triangle QRT.

Puisque $QR = 3$, $PQ = 4$ et $\angle PQR = 90°$, l'aire du triangle QRP est égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.

Puisque $QP = 4$, $TX = 2$ et que TX est perpendiculaire à QP, l'aire du triangle QTP est égale

à $\frac{1}{2}(4)(2)$, ou 4.
On considère la base QR du triangle QRT. La hauteur correspondante est donc la longueur de QX qui est perpendiculaire à QR. L'aire du triangle QRT est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(2)$, ou 3.
L'aire du triangle PTR est donc égale à $6 + 4 - 3$, ou 7.

Solution 2
Au point T, on abaisse une perpendiculaire TX au côté QP. Puisque le triangle QTP est isocèle, X est le milieu de QP.
Puisque $QP = 4$, alors $QX = XP = 2$. Puisque le triangle TPQ est isocèle et rectangle, alors $\angle TPQ = \angle TQP = 45°$.
Puisque $\angle TQP = 45°$ et $\angle QXT = 90°$, alors le triangle QXT aussi est isocèle et rectangle.
Donc $TX = QX = 2$.
On prolonge le segment RQ jusqu'à un point Y et le segment SP jusqu'à un point Z de manière que YZ soit perpendiculaire à YR et à ZS et que le segment YZ passe au point T.
Chacun des quadrilatères $YQXT$ et $TXPZ$ a trois angles droits (en Y, Q et X et en X, P et Z, respectivement). Ce sont donc des rectangles.
Puisque $QX = TX = XP = 2$, ce sont donc des carrés avec des côtés de longueur 2.
Or, $YRSZ$ est un rectangle. On a $RS = 4$ et $YR = YQ + QR$, d'où $YR = 2 + 3$, ou $YR = 5$.



L'aire du triangle PTR est égale à l'aire du rectangle $YRSZ$ moins l'aire des triangles TYR, RSP et PZT.
Le rectangle $YRSZ$ mesure 5 sur 4. Son aire est donc égale à 5×4, ou 20.
Puisque $TY = 2$ et $YR = 5$ et que TY est perpendiculaire à YR, alors l'aire du triangle TYR est égale à $\frac{1}{2}(TY)(YR)$, ou 5.
Puisque $RS = 4$ et $SP = 3$ et que RS est perpendiculaire à SP, alors l'aire du triangle RSP est égale à $\frac{1}{2}(RS)(SP)$, ou 6.
Puisque $PZ = ZT = 2$ et que PZ est perpendiculaire à ZT, alors l'aire du triangle PZT est égale à $\frac{1}{2}(PZ)(ZT)$, ou 2.
L'aire du triangle PTR est donc égale à $20 - 5 - 6 - 2$, ou 7.

Réponse : (C)

23. On considère le premier sac qui contient 2 billes rouges et 2 billes bleues pour un total de 4 billes. Il y a 4 choix possibles pour la première bille. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles pour la deuxième bille. En tout, il y a 4×3 façons, ou 12 façons, de choisir deux billes l'une après l'autre.
Pour obtenir deux billes rouges : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille rouge) pour que la première bille soit rouge. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille rouge) pour que la deuxième bille soit rouge. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes rouges.
Pour obtenir deux billes bleues : Il y a 2 choix possibles (l'une ou l'autre bille bleue) pour que la première bille soit bleue. Dans chaque cas, il y a 1 choix possible (l'autre bille bleue) pour que la deuxième bille soit bleue. En tout, il y a 2×1 façons, ou 2 façons, de choisir 2 billes bleues.
Il y a donc $2 + 2$, ou 4 façons de choisir deux billes de la même couleur.

La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit 4, divisé par le nombre de choix possibles, soit 12. Elle est donc égale à $\frac{4}{12}$, ou $\frac{1}{3}$.

On considère le deuxième sac qui contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes, soit $v+4$ billes en tout.
Il y a $v+4$ façons de choisir la première bille. Il reste alors $v+3$ billes dans le sac. Pour chacun des $v+4$ choix, il y a donc $v+3$ choix pour la deuxième bille. En tout, il y a $(v+4)(v+3)$ façons de choisir deux billes l'une après l'autre.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes rouges.
Comme pour le premier sac, il y a 2×1 façons, ou 2 façons de choisir 2 billes bleues.
Pour deux billes vertes : Il y a v façons de choisir une première bille verte. Il reste alors $v-1$ billes vertes dans le sac. Pour chacun de ces v choix, il y a $v-1$ façons de choisir une deuxième bille verte. En tout, il y a donc $v(v-1)$ façons de choisir deux billes vertes du sac.
Il y a donc $(2+2+v(v-1))$ façons, ou (v^2-v+4) façons de choisir deux billes de la même couleur.
La probabilité de choisir deux billes de la même couleur est égale au nombre de choix favorables, soit (v^2-v+4), divisé par le nombre de choix possibles, soit $(v+4)(v+3)$. Elle est donc égale à $\frac{v^2-v+4}{(v+4)(v+3)}$.

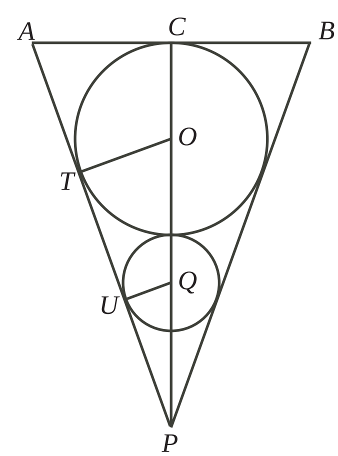
Puisque les deux probabilités sont égales et que $v \neq 0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3} & = & \frac{v^2-v+4}{(v+4)(v+3)} \\ (v+4)(v+3) & = & 3v^2-3v+12 \\ v^2+7v+12 & = & 3v^2-3v+12 \\ 10v & = & 2v^2 \\ v & = & 5 \qquad \text{(puisque } v \neq 0\text{)} \end{array}$$

Donc $v = 5$.

Réponse : (B)

24. Soit r le rayon de la petite boule. Puisque le rayon de la grande boule est deux fois le rayon de la petite boule, il est égal à $2r$.
On exprimera la hauteur et le rayon du cône en fonction de r et on utilisera ces résultats pour résoudre le problème.
Par symétrie, le centre Q de la petite boule et le centre O de la grande boule sont situés sur le segment qui joint le centre du haut circulaire C du cône et l'apex P du cône.
On trace une section transversale du cône qui passe par C et P.
Toutes les sections de cette sorte coupent le cône en donnant des triangles isométriques.
Par symétrie, les centres O et Q des boules sont situés sur un segment qui est dans le plan de la coupe transversale. Donc, ce plan coupe les deux boules en formant deux « grands cercles » (c'est-à-dire la plus grande section transversale possible de chaque boule).



Puisque le haut de la boule du haut est au même niveau que le haut du cône, la boule du haut touche au haut circulaire du cône au centre C.
Puisque les boules touchent au cône tout autour, les deux cercles sont tangents au triangle dans

la section transversale.
On nomme ABP le triangle de la section transversale.
On sait que CP est perpendiculaire à AB au point C.
Aux points O et Q on trace des rayons OT et QU perpendiculaires à AP, T et U étant les points de contact des cercles et de AP.
On a donc $OT = 2r$ et $QU = r$.
Puisque les deux cercles se touchent, le segment OQ passe par leur point de contact et on a $OQ = 2r + r$, ou $OQ = 3r$.
Or, les triangles OTP et QUP sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent un angle en P.
Puisque $\dfrac{OT}{QU} = \dfrac{2r}{r} = 2$, alors $\dfrac{OP}{QP} = 2$, ou $OP = 2QP$.
Puisque $OP = OQ + QP = 3r + QP$, alors $3r + QP = 2QP$, ou $QP = 3r$.
On a $CP = CO + OQ + QP$, ou $CP = 2r + 3r + 3r$, ou $CP = 8r$. Le cône a donc une hauteur de $8r$.
(On a utilisé le fait que CO est un rayon du grand cercle, d'où $CO = 2r$.)
Les triangles ACP et QUP sont semblables, puisque le triangle ACP est rectangle en C et que les deux triangles partagent un même angle en P.
Donc $\dfrac{AC}{CP} = \dfrac{QU}{UP}$.
On sait que $CP = 8r$ et $QU = r$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle UPQ, on a

$$UP = \sqrt{QP^2 - QU^2} = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = \sqrt{8}r$$

puisque $r > 0$.
Donc $AC = \dfrac{CP \cdot QU}{UP}$, d'où $AC = \dfrac{8r \cdot r}{\sqrt{8}r}$, ou $AC = \sqrt{8}r$.
D'après l'énoncé, on sait que la quantité d'eau qui reste dans le cône est de 2016π. Cela veut dire que le volume du cône moins le volume des deux boules est égal à 2016π.
On utilise les formules de volume pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\pi(AC)^2(CP) - \tfrac{4}{3}\pi(QU)^3 - \tfrac{4}{3}\pi(OT)^3 &= 2016\pi \\
\tfrac{1}{3}\pi(\sqrt{8}r)^2(8r) - \tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{4}{3}\pi(2r)^3 &= 2016\pi \\
64\pi r^3 - 4\pi r^3 - 32\pi r^3 &= 6048\pi \\
28r^3 &= 6048 \\
r^3 &= 216 \\
r &= 6
\end{aligned}$$

La petite boule a donc un rayon de 6.

Réponse : (B)

25. Soit $L(n) = n - Z(n!)$ le $n^{\text{ième}}$ nombre de la liste de Louis.
On sait que le nombre de zéros trainants d'un entier strictement positif m (que l'on note $Z(m)$) est égal au nombre de facteurs 10 de m que l'on peut former. Par exemple, 2400 a deux zéros trainants, car $2400 = 24 \times 10 \times 10$. Puisque $10 = 2 \times 5$, le nombre de facteurs 10 de m est déterminé par le nombre de facteurs 2 et 5 dans la factorisation première de m.
On considère $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$.
Puisque $5 > 2$, alors $n!$ contient plus de facteurs 2 que de facteurs 5 dans sa factorisation première.

En effet, dans la multiplication $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$, les multiples de 2 paraissent à tous les deux facteurs à partir de la droite, tandis que les multiples de 5 paraissent à tous les cinq facteurs à partir de la droite. Les multiples de 2, qui apportent un facteur 2, sont donc plus nombreux que les multiples de 5, qui apportent un facteur 5.
Donc, la valeur de $Z(n!)$ est égale au nombre de facteurs 5 dans la factorisation première de $n!$.
Soit $V(m)$ le nombre de facteurs 5 dans la factorisation première de m.
On a donc $Z(n!) = V(n!)$, d'où $L(n) = n - V(n!)$.
Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, alors $V((n+1)!) = V(n+1) + V(n!)$. (En effet, les facteurs 5 de la factorisation première de $(n+1)!$ qui ne sont pas dans celle de $n!$ parviennent du nombre $n+1$ lui-même.)
Donc si $n+1$ n'est pas un multiple de 5, alors $V(n+1) = 0$ et $V((n+1)!) = V(n!)$.
Si $n+1$ est un multiple de 5, alors $V(n+1) > 0$ et $V((n+1)!) > V(n!)$.
On remarque que :

$$\begin{aligned} L(n+1) - L(n) &= ((n+1) - V((n+1)!)) - (n - V(n!)) \\ &= ((n+1) - n) - (V((n+1)!) - V(n!)) \\ &= 1 - V(n+1) \end{aligned}$$

Si $n+1$ n'est pas un multiple de 5, alors $V(n+1) = 0$ et $L(n+1) - L(n) = 1$.
Donc lorsque $n+1$ n'est pas un multiple de 5, le terme correspondant dans la liste est 1 de plus que le terme précédent ; donc les termes de la liste augmentent de 1 pendant quatre termes consécutifs lorsque les termes ne sont pas des multiples de 5 (puisque les multiples de 5 surviennent à tous les 5 entiers).
Lorsque $n+1$ est un multiple de 5, le terme correspondant dans la liste sera le même que le terme précédent si la factorisation première de $n+1$ comprend un seul facteur 5. Le terme correspondant sera inférieur au terme précédent si la factorisation première de $n+1$ comprend plus d'un facteur 5.
Après un peu de tâtonnements, on conclut que pour qu'un entier paraisse trois fois dans la liste, il doit y avoir un entier n qui admet au moins cinq facteurs 5 dans sa factorisation première.
On montrera que dans la liste de $L(100)$ à $L(10\,000)$, il y a six entiers qui paraissent trois fois.
Puisque le plus grand choix de réponse est 6, ce doit être la réponse correcte.

Soit $N = 5^5k = 3125k$, k étant un entier strictement positif quelconque. Si $N \leq 10\,000$, alors k peut égaler 1, 2 ou 3.
Soit $a = L(N)$.
On remplit un tableau avec les valeurs de $L(N-6)$ à $L(N+6)$. Puisque la factorisation première de N admet cinq facteurs 5, alors $N-5$ et $N+5$ sont tous les deux divisibles par 5 (la factorisation première de chacun n'admet qu'un seul facteur 5), et aucun autre entier de la liste n'est divisible par 5. On rappelle aussi que $L(m+1) - L(m) = 1 - V(m+1)$, comme on l'a démontré précédemment.

m	$N-6$	$N-5$	$N-4$	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$	$N+3$	$N+4$	$N+5$	$N+6$
$V(m)$	0	1	0	0	0	0	5	0	0	0	0	1	0
$L(m)$	a	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	$a+4$	$a+5$

Donc si $N = 5^5k$, les entiers $L(N) = a$ et $L(N) + 4 = a + 4$ paraissent chacun trois fois dans la liste.
Puisqu'il existe trois valeurs de k qui placent N dans l'intervalle $100 \leq N \leq 10\,000$, il y a six entiers dans la liste de Louis qui paraissent trois fois.

Pour démontrer qu'il n'existe aucun autre entier qui parait trois fois dans la liste de Louis, au lieu de dépendre des choix de réponse, il faudrait démontrer quelques autres faits. Par exemple, il faudrait démontrer que :

Si n et k sont des entiers strictement positifs tels que $k \geq 7$ et $n \leq 10\,000$ et $n + k \leq 10\,000$, alors $L(n + k) \neq L(n)$.

Ceci nous permettrait d'affirmer que si deux entiers de la liste sont égaux, alors ils doivent parvenir de $L(n)$ à $L(n + 6)$ pour une valeur quelconque de n. Ceci nous permettrait d'affirmer que si trois entiers de la liste sont égaux, alors ils doivent parvenir de $L(n - 6)$ à $L(n + 6)$ pour une valeur quelconque de n. Il faudrait aussi démontrer que :

Étant donné un entier strictement positif n, $n \leq 10\,000$, de manière que la liste de $L(n - 6)$ à $L(n + 6)$ contienne trois termes égaux, alors un des entiers de la liste de $n - 6$ à $n + 6$ doit être divisible par 3125.

Cela nous permettrait de terminer la démonstration.

Réponse : (E)