Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2013

le jeudi 21 novembre 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 novembre 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*
   Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les côtés AB et DC sont parallèles et ils ont la même longueur.
   Puisque A et B ont tous deux une ordonnée de 3, alors AB est horizontal.
   Puisque A a pour coordonnées $(2, 3)$ et que B a pour coordonnées $(7, 3)$, alors AB a une longueur de $7 - 2$, ou 5.
   Donc, DC est horizontal et il a une longueur de 5.
   Puisque D a une ordonnée de 7, alors C a une ordonnée de 7.
   Puisque DC a une longueur de 5 et que D a une abscisse de 3, alors C a une abscisse de $3 + 5$, ou 8.
   Donc, C a pour coordonnées $(8, 7)$.

   Solution 2
   Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les côtés AD et BC sont parallèles et ils ont la même longueur.
   Pour se déplacer de $A(2, 3)$ à $D(3, 7)$, il faut se déplacer de 1 unité vers la droite et de 4 unités vers le haut (puisque les abscisses ont une différence de 1 et que les ordonnées ont une différence de 4).
   Pour se déplacer de $B(7, 3)$ à C, il faut aussi se déplacer de 1 unité vers la droite et de 4 unités vers le haut.
   Donc, C a pour coordonnées de $(7 + 1, 3 + 4)$, ou $(8, 7)$.

   Réponse : (8,7)

2. Puisque Benoît ne reçoit pas la carte 1, il reçoit la carte 2, 3 ou 4.
   On sait que le numéro de Viana est 1 de plus que celui de René.
   Si Benoît reçoit la carte 2, alors René et Vianna reçoivent les cartes numéros 3 et 4 respectivement. Dans ce cas, Sara reçoit la carte numéro 1.
   Si Benoît reçoit la carte 3, alors René et Vianna reçoivent les cartes numéros 1 et 2 respectivemen. Dans ce cas, Sara reçoit la carte numéro 4.
   Si Benoît reçoit la carte 4, alors René et Vianna reçoivent les cartes numéros 1 et 2 respectivement, ou 2 et 3. Dans ce premier cas, Sara reçoit la carte numéro 3. Dans le deuxième cas, Sara reçoit la carte numéro 1.
   Donc, Sara peut recevoir la carte numéro 1, 3 ou 4 et elle ne peut donc pas recevoir la carte numéro 2.

   Réponse : 2

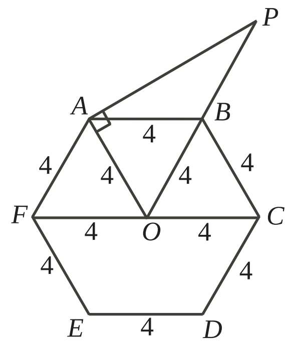
3. On remarque que $99! = 99(98)(97)\cdots(3)(2)(1)$ et $101! = 101(100)(99)(98)(97)\cdots(3)(2)(1)$.
   Donc $101! = 101(100)(99!)$.
   Donc :

$$\frac{99!}{101! - 99!} = \frac{99!}{101(100)(99!) - 99!} = \frac{99!}{99!(101(100) - 1)} = \frac{1}{101(100) - 1} = \frac{1}{10\,099}$$

   Donc $n = 10\,099$.

   Réponse : $n = 10\,099$

4. On trace les segments FO et OC.
Puisque $ABCDEF$ est un hexagone régulier avec des côtés de longueur 4, alors $FA = AB = BC = 4$.
Puisque $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O, alors $FO = AO = BO = CO$.
Donc, les triangles FOA, AOB et BOC sont isométriques, puisque leurs côtés sont isométriques deux à deux.
De plus, les angles FOA, AOB et BOC représentent chacun $\frac{1}{6}$ de l'angle plein de centre O.
Donc $\angle FOA = \angle AOB = \angle BOC = \frac{1}{6}(360°) = 60°$.
Puisque le triangle AOB est isocèle $(AO = BO)$ et que $\angle AOB = 60°$, alors $\angle OAB = \angle OBA$, d'où $\angle OAB = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$.
Donc, le triangle AOB est équilatéral, d'où $AO = AB = 4$.



Or dans le triangle OAP, on a $\angle OAP = 90°$ et $\angle AOP = \angle AOB = 60°$. Le triangle OAP est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
D'après le rapport des longueurs des côtés dans un triangle remarquable 30°-60°-90°, on a $AP = \sqrt{3}(AO)$, ou $AP = 4\sqrt{3}$.
L'aire du triangle OAP est donc égale à $\frac{1}{2}(OA)(AP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(4\sqrt{3})$, ou $8\sqrt{3}$.

Réponse : $8\sqrt{3}$

5. On sait qu'un entier strictement positif est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Puisque la somme des chiffres ne dépend pas de l'ordre des chiffres, on peut changer l'ordre des chiffres d'un entier divisible par 3 pour obtenir un autre entier divisible par 3.
On remarque que le nombre 10 000 n'est pas divisible par 3. Tous les entiers entre 1000 et 10 000 sont des entiers de quatre chiffres.
On considère un entier de quatre chiffres dont les chiffres sont consécutifs. On peut replacer les chiffres en ordre décroissant pour obtenir les possibilités 3210, 4321, 5432, 6543, 7654, 8765 et 9876.
Les sommes des chiffres de ces nombres respectifs sont 6, 10, 14, 18, 22, 26 et 30.
Parmi ces sommes, seules 6, 18 et 30 sont divisibles par 3. Donc parmi les sept nombres 3210, 4321, 5432, 6543, 7654, 8765 et 9876, seuls les nombres 3210, 6543 et 9876 sont divisibles par 3.
Puisque la somme des chiffres ne dépend pas de l'ordre des chiffres, alors n'importe quel entier de quatre chiffres dont les chiffres sont les mêmes que ceux des nombres 3210, 6543 ou 9876 satisfait aux conditions.
Il y a 24 entiers de quatre chiffres qui ont les mêmes chiffres que 6543. (Il y a 4 possibilités pour le chiffre des milliers ; pour chacune de ces possibilités, il y a 3 possibilités pour le chiffre des centaines ; pour chacune de ces possibilités, il y a 2 possibilités pour le chiffre des dizaines ; pour chacune de ces possibilités, il y a 1 possibilité pour le chiffre des unités. En tout, il y a $4 \times 3 \times 2 \times 1$ entiers, ou 24 entiers qui ont les mêmes chiffres que 6543.)

De même, il y a 24 entiers de quatre chiffres qui ont les mêmes chiffres que 9876.
De plus, il y a 18 entiers de quatre chiffres qui ont les mêmes chiffres que 3210. (Il y a 3 possibilités pour le chiffre des milliers (puisque 0 ne peut être le chiffre des milliers) ; pour chacune de ces possibilités, il y a 3 possibilités pour le chiffre des centaines ; pour chacune de ces possibilités, il y a 2 possibilités pour le chiffre des dizaines ; pour chacune de ces possibilités, il y a 1 possibilité pour le chiffre des unités. En tout, il y a $3 \times 3 \times 2 \times 1$ entiers, ou 18 entiers de quatre chiffres qui ont les mêmes chiffres que 3210.)
En tout, il y a $24 + 24 + 18$ entiers, ou 66 entiers strictement positifs qui satisfont aux trois propriétés.

Réponse : 66

6. *Solution 1*

On considère deux cas, soit $y < 60$ et $y \geq 60$.
On utilise le fait que $\min(a, b) \leq a$, $\min(a, b) \leq b$, $\max(a, b) \geq a$ et $\max(a, b) \geq b$. En d'autres mots, le minimum de deux nombres est inférieur ou égal à chacun des deux nombres et le maximum de deux nombres est supérieur ou égal à chacun des deux nombres.
On utilise aussi le fait que si $a \leq b$, alors $\min(a, b) = a$ et $\max(a, b) = b$. On remarque que si $a = b$, ces identités sont toujours valides.

<u>1^er^ cas : $y < 60$</u>

Puisque $y < 60$ et $\min(x, y) \leq y$, alors $\min(x, y) < 60$.
Puisque $\min(x, y) < 60$, alors le membre de gauche est égal à $\max(60, \min(x, y))$, ou 60.
De plus, $\max(60, x) \geq 60$. Puisque $y < 60$, le membre de droite est égal à $\min(\max(60, x), y)$, ou y.
Donc lorsque $y < 60$, l'équation est vérifiée lorsque $60 = y$, ce qui ne se produit jamais.
Il n'y a donc aucun couple (x, y), où $y < 60$, qui vérifie l'équation.

<u>2^e^ cas : $y \geq 60$</u>

Lorsque $x < y$, on a $\min(x, y) = x$. Dans ce cas, le membre de gauche est égal à $\max(60, x)$.
Lorsque $x < y$, alors 60 et x ne dépassent pas y. Donc, le plus grand de 60 et x ne dépasse pas y. En d'autres mots, $\max(60, x) \leq y$. Donc le membre de droite est égal à $\min(\max(60, x), y)$, ou $\max(60, x)$.
Lorsque $x < y$, l'équation devient $\max(60, x) = \max(60, x)$. Elle est donc vérifiée par tout couple (x, y).

Lorsque $x \geq y$, alors $\min(x, y) = y$. Puisque $y \geq 60$, le membre de gauche est égal à $\max(60, y)$, ou y.
Lorsque $x \geq y$, alors $x \geq 60$. Donc $\max(60, x) = x$ et le membre de droite est égal à $\min(x, y)$, ou y.
Lorsque $x \geq y$, l'équation devient $y = y$. Elle est donc vérifiée par tout couple (x, y).

L'équation donnée est donc vérifiée par tout couple (x, y) tel que $y \geq 60$.
Puisque $1 \leq x \leq 100$, il y a 100 valeurs possibles de x.
Puisque $60 \leq y \leq 100$, il y a 41 valeurs possibles de y.
En tout, il y a 100×41 couples, ou 4100 couples qui vérifient l'équation.

Solution 2

Dans cette solution, on utilise le fait que si $a \leq b$, alors $\min(a, b) = a$ et $\max(a, b) = b$.
L'équation initiale $\max(60, \min(x, y)) = \min(\max(60, x), y)$ est nommée $(*)$.

On considère les arrangements possibles de 60, x et y.
Il y a 6 arrangements possibles. On examine les parties des membres de gauche (MG) et de

droite (MD), en procédant de l'intérieur vers l'extérieur :

Cas	$\min(x,y)$	MG $= \max(60, \min(x,y))$	$\max(60,x)$	MD $= \min(\max(60,x),y)$
$60 \leq x \leq y$	$= x$	$= \max(60,x) = x$	$= x$	$= \min(x,y) = x$
$60 \leq y \leq x$	$= y$	$= \max(60,y) = y$	$= x$	$= \min(x,y) = y$
$x \leq 60 \leq y$	$= x$	$= \max(60,x) = 60$	$= 60$	$= \min(60,y) = 60$
$x \leq y \leq 60$	$= x$	$= \max(60,x) = 60$	$= 60$	$= \min(60,y) = y$
$y \leq 60 \leq x$	$= y$	$= \max(60,y) = 60$	$= x$	$= \min(x,y) = y$
$y \leq x \leq 60$	$= y$	$= \max(60,y) = 60$	$= 60$	$= \min(60,y) = y$

Si $60 \leq x \leq y$, alors $(*)$ devient $x = x$. Tous les couples (x,y), $60 \leq x \leq y$, vérifient $(*)$.
Si $60 \leq y \leq x$, alors $(*)$ devient $y = y$. Tous les couples (x,y), $60 \leq y \leq x$, vérifient $(*)$.
Si $x \leq 60 \leq y$, alors $(*)$ devient $60 = 60$. Tous les couples (x,y), $x \leq 60 \leq y$, vérifient $(*)$.
Si $x \leq y \leq 60$, alors $(*)$ devient $60 = y$. Seuls les couples (x,y) tels que $y = 60$ et $x \leq 60$ vérifient $(*)$. Ces couples (x,y) ont été comptabilisés dans le 3$^{\text{e}}$ cas.
Si $y \leq 60 \leq x$, alors $(*)$ devient $60 = y$. Seuls les couples (x,y) tels que $y = 60$ et $x \geq 60$ vérifient $(*)$. Ces couples (x,y) ont été comptabilisés dans le 2$^{\text{e}}$ cas.
Si $y \leq x \leq 60$, alors $(*)$ devient $60 = y$. Seuls les couples (x,y) tels que $y = 60$ et $60 \leq x \leq 60$ (d'où $x = 60$), vérifient $(*)$. Donc dans ce cas, seul le couple $(60,60)$ vérifie $(*)$. Or, ce cas a été comptabilisé dans le 1$^{\text{er}}$ cas.

Il faut donc compter le nombre de couples (x,y) d'entiers strictement positifs, tels que $x \leq 100$ et $y \leq 100$, qui vérifient l'une des inéquations suivantes : $60 \leq x \leq y$ ou $60 \leq y \leq x$ ou $x \leq 60 \leq y$.
D'après les intervalles pour x et y, on voit que l'on a toujours $y \geq 60$. De plus, x peut être inférieur ou égal à 60 ou il peut être supérieur ou égal à y et il peut être supérieur ou inférieur à y.
En d'autres mots, les trois intervalles sont équivalents à $y \geq 60$.
Donc, $(*)$ est vérifiée par tous les couples (x,y) où $y \geq 60$.
Puisque $1 \leq x \leq 100$, il y a 100 valeurs possibles de x.
Dans chaque cas, puisque $60 \leq y \leq 100$, il y a 41 valeurs possibles de y.
En tout, il y a 100×41, ou 4100 couples qui vérifient l'équation.

Réponse : 4100

Partie B

1. (a) Dans le deuxième bloc de casiers, les deux premières colonnes contiennent deux casiers chacune. La première colonne contient les casiers 21 et 22, tandis que la deuxième colonne contient les casiers 23 et 24.
Donc, la somme des numéros de casiers dans la colonne qui contient le casier numéro 24 est égale à $23 + 24$, ou 47.

(b) Supposons qu'une colonne contient deux casiers dont les numéros sont x et $x + 1$, x étant un entier strictement positif quelconque.
La somme des numéros de casiers de cette colonne est donc $x + (x + 1)$, ou $2x + 1$, ce qui donne toujours une somme impaire.
Supposons qu'une colonne contient quatre casiers dont les numéros sont y, $y + 1$, $y + 2$ et $y + 3$, y étant un entier strictement positif quelconque.
La somme des numéros de casiers de cette colonne est donc

$$y + (y + 1) + (y + 2) + (y + 3) = 4y + 6 = 2(2y + 3),$$

ce qui donne toujours une somme paire.
Puisque 123 est un nombre impair, la colonne dont les numéros de casiers ont une somme de 123 contient deux casiers.
Soit x et $x+1$ les numéros des casiers. On a donc $2x+1 = 123$, d'où $2x = 122$, ou $x = 61$.
Les numéros de casiers dans cette colonne sont 61 et 62.
(On sait que chaque bloc de casiers contient 20 casiers. Le casier numéro 61 est donc dans la 1re colonne du 4e bloc. Il s'agit bien d'une colonne de deux casiers.)

(c) Puisque 538 est un nombre pair, alors selon la partie (b), il doit être la somme de quatre numéros de casiers.
Soit y, $y + 1$, $y + 2$ et $y + 3$ les numéros des quatre casiers. On a donc $4y + 6 = 538$, d'où $4y = 532$, ou $y = 133$.
Les numéros de casiers dans cette colonne sont 133, 134, 135 et 136.
(Puisque chaque bloc de casiers contient 20 casiers, le casier 140 est le dernier casier du 7e bloc. La dernière colonne de ce bloc contient donc les casiers 137, 138, 139 et 140. L'avant-dernière colonne du 7e bloc contient donc les casiers 133, 134, 135 et 136, ce qui confirme que ces numéros sont bien dans une même colonne.)

(d) Puisque 2013 est impair, il doit être la somme des numéros d'une colonne de deux casiers, comme on l'a vu dans la partie (b).
Soit x et $x + 1$ les numéros des casiers. On a donc $2x + 1 = 2013$, d'où $2x = 2012$, ou $x = 1006$.
Il faudrait donc que les numéros de casiers soient 1006 et 1007.
Or, le premier numéro dans chaque colonne est impair, car chaque colonne a un nombre pair de casiers, Puisque le premier numéro de la première colonne est 1, le dernier numéro sera pair, ce qui indique que le premier numéro de la colonne suivante sera impair, et ainsi de suite.
Donc, les casiers 1006 et 1007 ne peuvent pas paraitre dans une colonne de deux casiers Il n'y a donc aucune colonne dont les numéros de casiers ont une somme de 2013.

2. (a) On développe et simplifie pour obtenir :

$$(a-1)(6a^2-a-1) = 6a^3-a^2-a-6a^2+a+1 = 6a^3-7a^2+1$$

(b) Pour résoudre l'équation $6\cos^3\theta - 7\cos^2\theta + 1 = 0$, on pose $\cos\theta = a$ que l'on reporte dans l'équation. L'équation devient $6a^3 - 7a^2 + 1 = 0$.
D'après la partie (a), on peut factoriser le membre de gauche pour obtenir l'équation $(a-1)(6a^2-a-1) = 0$.
L'expression $6a^2 - a - 1$ peut être factorisée pour obtenir $(3a+1)(2a-1)$.
L'équation devient donc $(a-1)(3a+1)(2a-1) = 0$.
Les racines sont $a = 1$, $a = -\frac{1}{3}$ et $a = \frac{1}{2}$.
On a donc $\cos\theta = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ou $\cos\theta = \frac{1}{2}$. On cherche donc les valeurs de θ qui se trouvent dans l'intervalle $-180° < \theta < 180°$ telles que $\cos\theta = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ou $\cos\theta = \frac{1}{2}$.
Lorsque $-180° < \theta < 180°$ et $\cos\theta = 1$, alors $\theta = 0°$.
Lorsque $-180° < \theta < 180°$ et $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, alors $\theta \approx 109{,}5°$ ou $\theta \approx -109{,}5°$. (On obtient la valeur positive de θ au moyen d'une calculatrice. On obtient la valeur négative en pensant à la symétrie de la fonction cos par rapport à l'axe des ordonnées ou en pensant à la symétrie des valeurs de $\cos\theta$ dans le cercle unitaire.)
Lorsque $-180° < \theta < 180°$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$, alors $\theta = 60°$ ou $\theta = -60°$.
Les solutions de l'équation $6\cos^3\theta - 7\cos^2\theta + 1 = 0$, arrondies au besoin au dixième près, sont $0°, 60°$, $-60°$, $109{,}5°$ et $-109{,}5°$.

(c) Pour résoudre l'inéquation $6\cos^3\theta - 7\cos^2\theta + 1 < 0$, on factorise le membre de gauche pour obtenir :

$$(\cos\theta - 1)(3\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) < 0$$

D'après la partie (b), on connait les valeurs de θ pour lesquelles le membre de gauche est égal à 0. On examine donc les intervalles entre ces valeurs pour déterminer si le membre de gauche est positif ou négatif. Pour remplir la dernière colonne du tableau, on considère le produit des trois facteurs. Le produit de trois termes positifs est positif, le produit de deux termes positifs et d'un terme négatif est négatif, le produit d'un terme positif et de deux termes négatifs est positif et le produit de trois termes négatifs est négatif.

Intervalle de θ	Intervalle de $\cos\theta$	$\cos\theta - 1$	$3\cos\theta + 1$	$2\cos\theta - 1$	Produit
$-180° < \theta < -109{,}5°$	$-1 < \cos\theta < -\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-109{,}5° < \theta < -60°$	$-\frac{1}{3} < \cos\theta < \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-60° < \theta < 0°$	$\frac{1}{2} < \cos\theta < 1$	$-$	$+$	$+$	$-$
$0° < \theta < 60°$	$\frac{1}{2} < \cos\theta < 1$	$-$	$+$	$+$	$-$
$60° < \theta < 109{,}5°$	$-\frac{1}{3} < \cos\theta < \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$109{,}5° < \theta < 180°$	$-1 < \cos\theta < -\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$

D'après cette analyse, les valeurs de θ telles que $6\cos^3\theta - 7\cos^2\theta + 1 < 0$ et $-180° < \theta < 180°$ sont celles dans les intervalles

$$-180° < \theta < -109{,}5°, \quad -60° < \theta < 0°, \quad 0° < \theta < 60° \quad \text{et} \quad 109{,}5° < \theta < 180°.$$

On aurait pu déterminer ces intervalles en examinant les valeurs positives de θ et en utilisant le fait que la fonction cos est paire pour déterminer les intervalles où la fonction est négative.

3. (a) Une suite $(2,2)$ satisfait aux conditions suivantes : Si $x_i = A$, alors $x_{i+2} = B$ et si $x_i = B$, alors $x_{i+2} = A$.
Supposons que dans une suite $(2,2)$, on a $x_1 = A$.
Alors $x_{1+2} = x_3 = B$, $x_{3+2} = x_5 = A$, $x_7 = B$, $x_9 = A$ et ainsi de suite.
D'après cette régularité, chaque terme de numéro impair est déterminé par $x_1 = A$ et ces termes de numéros impairs alternent : $A, B, A, B, \ldots$
De même, supposons que dans une suite $(2,2)$, on a $x_1 = B$.
Alors $x_{1+2} = x_3 = A$, $x_{3+2} = x_5 = B$, $x_7 = A$, $x_9 = B$ et ainsi de suite.
D'après cette régularité, chaque terme de numéro impair est déterminé par $x_1 = B$ et ces termes de numéros impairs alternent $B, A, B, A, \ldots$
On remarque que la valeur de x_1 n'a aucun effet sur les termes de numéros pairs.
Donc, la valeur de x_1 détermine tous les termes de numéros impairs dans la suite.
Si, dans une suite $(2,2)$, on a $x_2 = A$, alors $x_4 = B$, $x_6 = A$, $x_8 = B$, et ainsi de suite. Si, dans une suite $(2,2)$, on a $x_2 = B$, alors $x_4 = A$, $x_6 = B$, $x_8 = A$, et ainsi de suite.
Donc, la valeur de x_2 détermine tous les termes de numéros pairs dans la suite.
Or, il y a 2 valeurs possibles de x_1. Pour chacune de ces valeurs, il y a 2 valeurs possibles de x_2.
Il y a donc 2×2, ou 4 suites $(2,2)$ possibles. Ce sont :

$$AABBAABBAA\ldots \qquad ABBAABBAAB\ldots$$

$$BAABBAABBA\ldots \qquad BBAABBAABB\ldots$$

(b) Une suite $(1,2)$ satisfait aux conditions suivantes : Si $x_i = A$, alors $x_{i+1} = B$ et si $x_i = B$, alors $x_{i+2} = A$.
Il y a deux possibilités : $x_1 = A$ ou $x_1 = B$.

Supposons qu'il existe une suite $(1,2)$ avec $x_1 = A$.
Alors $x_{1+1} = x_2 = B$, $x_{2+2} = x_4 = A$ et $x_{4+1} = x_5 = B$.
Le début de la suite, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, devient donc A, B, x_3, A, B.
On considère x_3. Si $x_3 = B$, alors $x_5 = A$, ce qui est faux. Si $x_3 = A$, alors $x_4 = B$, ce qui est faux.
Puisqu'il n'y a aucune valeur possible de x_3, alors une suite $(1,2)$ ne peut commencer par $x_1 = A$.

Supposons qu'il existe une suite $(1,2)$ avec $x_1 = B$.
Alors $x_3 = A$ et $x_4 = B$.
Le début de la suite, x_1, x_2, x_3, x_4, devient donc B, x_2, A, B.
On considère x_2. Si $x_2 = B$, alors $x_4 = A$, ce qui est faux. Si $x_2 = A$, alors $x_3 = B$, ce qui est faux.
Puisqu'il n'y a aucune valeur possible de x_2, alors une suite $(1,2)$ ne peut commencer par $x_1 = B$.

Une suite $(1,2)$ ne peut donc commencer par $x_1 = A$ ou par $x_1 = B$. Donc, il n'existe aucune suite $(1,2)$.

(c) Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite (m,n).
On considère la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ définie par :

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_r = x_1, y_{r+1} = y_{r+2} = \cdots = y_{2r} = x_2, \ldots$$

En d'autres mots, on définit $y_{(q-1)r+1} = y_{(q-1)r+2} = \cdots = y_{qr} = x_q$ pour tout entier q strictement positif.

Ceci signifie que les premiers r termes de la suite égalent x_1, les r termes suivants égalent x_2, les r termes suivants égalent x_3, et ainsi de suite, le $q^{\text{ième}}$ groupe de r termes ayant pour termes x_q :

$$\overbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}^{r \text{ fois}}, \overbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}^{r \text{ fois}}, \ldots, \overbrace{x_q, x_q, \ldots, x_q}^{r \text{ fois}}, \ldots$$

Par exemple, on considère la suite $(2, 2)$ $ABBAABBAABBA\ldots$
Si $r = 3$, on obtiendrait la suite suivante avec ce processus :

$$AAABBBBBBAAAAAABBBBBBAAAAAABBBBBBAAA\ldots$$

Il s'agit d'une suite $(6, 6)$.
Il reste à démontrer que la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ est une suite (rm, rn).
On considère un terme y_i de manière que $(q-1)r + 1 \le i \le qr$.
Alors $y_i = x_q$.
(Dans l'exemple ci-haut, on on considère le terme $y_{11} = A$.
On remarque que $3(3) + 1 \le 11 \le 4(3)$, d'où $y_{11} = x_4$.)
On doit démontrer que si $y_i = A$, alors $y_{i+rm} = B$ et que si $y_i = B$, alors $y_{i+rn} = A$.
(Dans l'exemple ci-haut : Puisque $y_{11} = A$, on veut démontrer que $y_{11+6} = B$.)
Si $y_i = x_q = A$, alors $x_{q+m} = B$ puisque les x forment une suite (m, n).
(Dans l'exemple ci-haut : Puisque $x_4 = A$, alors $x_6 = B$.)
On considère y_{i+rm}. Puisque $(q-1)r+1 \le i \le qr$, alors $(q-1)r+1+rm \le i+rm \le qr+rm$, ou $(q + m - 1)r + 1 \le i + rm \le (q + m)r$.
Par définition, $y_{i+rm} = x_{q+m}$. Puisque $x_{q+m} = B$, alors $y_{i+rm} = B$, ce qu'il fallait démontrer.
(Dans l'exemple ci-haut : On considère y_{17}.
Puisque $5(3) + 1 \le 17 \le 6(3)$, alors $y_{17} = x_6 = B$, ce qu'il fallait démontrer.)
Si $y_i = x_q = B$, alors $x_{q+n} = A$ puisque les x forment une suite (m, n).
On considère y_{i+rn}. Puisque $(q-1)r+1 \le i \le qr$, alors $(q-1)r+1+rn \le i+rn \le qr+rn$ ou $(q + n - 1)r + 1 \le i + rn \le (q + n)r$.
Par définition, $y_{i+rn} = x_{q+n}$. Puisque $x_{q+n} = A$, alors $y_{i+rn} = A$, ce qu'il fallait démontrer.
Donc, la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ est une suite (rm, rn).
Donc s'il existe une suite (m, n), alors il existe une suite (rm, rn).

(d) Tout entier strictement positif m peut être écrit sous la forme $m = 2^p c$, p étant un entier non négatif et c étant un entier impair. (Pour le voir, on écrit m en factorisation première. Les facteurs 2 sont exprimés par 2^p et le produit des autres facteurs impairs est égal à c.)
On écrit $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$, p et q étant des entiers non négatifs et c et d étant des entiers positifs impairs.
On démontrera qu'il existe une suite (m, n) si et seulement si m et n admettent le même nombre de facteurs premiers 2 (c'est-à-dire si et seulement si $p = q$).
On procède par étapes.

<u>Étape 1 : Il existe une suite (c, d) lorsque c et d sont tous deux des entiers positifs impairs</u>
On considère la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dans laquelle chaque terme dont le numéro impair est A et chaque terme dont le numéro pair est B.
Il s'agit donc de la suite $ABABAB\ldots$
On démontre qu'il s'agit d'une suite (c, d).
Supposons que $x_i = A$. Alors i doit être impair, puisque seuls les termes qui ont un numéro impair égalent A.

Puisque i est impair et que c est impair, alors $i+c$ est pair. Donc $x_{i+c} = B$.
On sait donc que si $x_i = A$, alors $x_{i+c} = B$.
Supposons que $x_i = B$. Alors i doit être pair, puisque seuls les termes qui ont un numéro pair égalent B.
Puisque i est pair et que d est impair, alors $i+d$ est impair. Donc $x_{i+d} = A$.
On sait donc que si $x_i = B$, alors $x_{i+d} = A$.
Donc, $ABABAB\ldots$ est une suite (c,d).
Il existe donc une suite (c,d) lorsque c et d sont tous deux des entiers positifs impairs.

Étape 2 : Il existe une suite (m,n) lorsque $m = 2^p c$ et $n = 2^p d$
On sait que c et d sont des entiers positifs impairs et que p est un entier non négatif.
D'après l'étape 1, on sait qu'il existe une suite (c,d).
D'après la partie (c), en posant $r = 2^p$, on sait qu'il existe une suite $(2^p c, 2^p d)$. Il existe donc une suite (m,n).

On a démontré que si m et n admettent le même nombre de facteurs 2, alors il existe une suite (m,n). Il reste à démontrer que si m et n n'admettent pas le même nombre de facteurs 2, alors il n'existe aucune suite (m,n).

Étape 3 : S'il existe une suite (rm,rn), alors il existe aussi une suite (m,n)
On sait que r, m et n sont des entiers strictement positifs.
Soit $y_1, y_2, y_3, \ldots$ une suite (rm,rn).
On considère la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$, définie par $x_i = y_{ri}$. (Il s'agit de la suite $y_r, y_{2r}, y_{3r}, \ldots$)
On veut démontrer qu'il s'agit d'une suite (m,n).
Supposons que $x_i = A$. Alors $y_{ri} = A$, d'où $y_{ri+rm} = B$.
Or $ri + rm = r(i+m)$, d'où $x_{i+m} = y_{ri+rm} = B$.
Supposons que $x_i = B$. alors $y_{ri} = B$, d'où $y_{ri+rn} = A$.
Or $ri + rn = r(i+n)$, d'où $x_{i+n} = y_{ri+rn} = A$.
Donc, la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une suite (m,n).
Donc s'il existe une suite (rm,rn), il existe aussi une suite (m,n).

Étape 4 : S'il existe une suite (m,n), il existe aussi une suite (n,m)
On sait que m et n sont des entiers strictement positifs.
Supposons que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une suite (m,n). On considère la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ définie par $y_i = B$ si $x_i = A$ et $y_i = A$ si $x_i = B$.
On veut démontrer que $y_1, y_2, y_3, \ldots$ est une suite (n,m).
Si $y_i = A$, alors $x_i = B$. Donc $x_{i+n} = A$, d'où $y_{i+n} = B$.
Donc, à chaque fois que $y_i = A$, on a $y_{i+n} = B$.
Si $y_i = B$, alors $x_i = A$. Donc $x_{i+m} = B$, d'où $y_{i+m} = A$.
Donc, à chaque fois que $y_i = B$, on a $y_{i+m} = A$.
La suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ est donc une suite (n,m).
Donc s'il existe une suite (m,n), alors il existe une suite (n,m).
Ceci démontre aussi que s'il n'existe aucune suite (n,m), alors il n'existe aucune suite (m,n).

Étape 5 : Définition supplémentaire d'une suite (m,n)
Supposons que la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une suite (m,n).
On sait que si $x_i = A$, alors $x_{i+m} = B$ et que si $x_i = B$, alors $x_{i+n} = A$.
Supposons que $x_i = A$. Alors $x_{i+m} = B$ et $x_{i+m+n} = A$.
Que sait-on de x_{i+n} ? Si $x_{i+n} = A$, on aurait $x_{i+m+n} = B$, ce qui n'est pas le cas.
Donc si $x_i = A$, alors $x_{i+n} = B$.
De même, on peut démontrer que si $x_i = B$, alors $x_{i+m} = A$.

Donc dans une suite (m, n), on sait que si $x_i = A$, alors $x_{i+m} = B$ et $x_{i+n} = B$ et si $x_i = B$, alors $x_{i+n} = A$ et $x_{i+m} = A$.

Étape 6 : Si m est impair et n est pair, alors une suite (m, n) n'existe pas

Supposons que la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ est une suite (m, n).
Supposons que $x_1 = A$.
On considère le terme x_{1+mn}.
On se rapproche d'abord de x_{1+mn} en considérant chaque $m^{\text{ième}}$ terme après x_1.
D'après la définition et l'étape 5, on a $x_1 = A$, $x_{1+m} = B$, $x_{1+2m} = A$, $x_{1+3m} = B$, et ainsi de suite.
Puisque n est pair, alors en bougeant de x_1 à x_{1+mn} de cette manière, on avance d'un nombre pair de termes. Donc $x_{1+mn} = A$.
On se rapproche ensuite de x_{1+mn} en considérant chaque $n^{\text{ième}}$ terme après x_1.
D'après la définition et l'étape 5, on a $x_1 = A$, $x_{1+n} = B$, $x_{1+2n} = A$, $x_{1+3n} = B$, et ainsi de suite.
Puisque m est impair, alors en bougeant de x_1 à x_{1+mn} de cette manière, on avance d'un nombre impair de termes. Donc $x_{1+mn} = B$.
On a donc une contradiction. Donc on ne peut avoir $x_1 = A$.
De la même manière, on peut démontrer que si $x_1 = B$, alors le $(1 + mn)^{\text{ième}}$ terme mène à une contradiction.
Donc si m est impair et n est pair, une suite (m, n) n'existe pas.
D'après l'étape 4, ceci démontre aussi que si m est pair et n est impair, une suite (m, n) n'existe pas.

Étape 7 : m et n n'admettent pas le même nombre de diviseurs 2

On montre qu'il n'existe aucune suite (m, n).
Supposons que $m = 2^p c$ et $n = 2^q d$, p et q étant des entiers non négatifs, $p \neq q$, et c et d étant des entiers impairs positifs.
On peut supposer que $p < q$.
D'après l'étape 3, s'il existe une suite $(2^p c, 2^q d)$, alors il existe une suite $(c, 2^{q-p} d)$ (en utilisant $r = 2^p$).
Or c est impair et $2^{q-p} d$ est pair. D'après l'étape 6, il n'existe aucune suite (m, n).
Donc, si m et n n'admettent pas le même nombre de diviseurs 2, alors il n'existe aucune suite (m, n).

On conclut donc qu'il existe une suite (m, n) si et seulement si m et n admettent le même nombre de diviseurs 2.