Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le jeudi 21 novembre 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 novembre 2013

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

WATERLOO MATHEMATICS

Durée : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarques :

Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

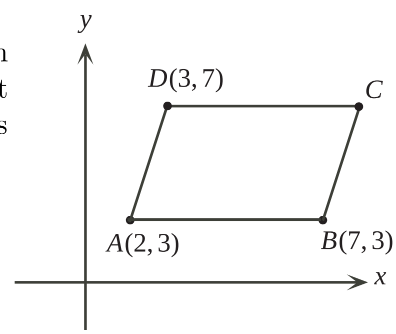
Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que $12{,}566\ldots$ ou $4{,}646\ldots$
	4.	**L'utilisation de la calculatrice est permise**, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
	5.	Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. Les points A, B, C et D sont situés dans le premier quadrant. Quelles sont les coordonnées du point C ?

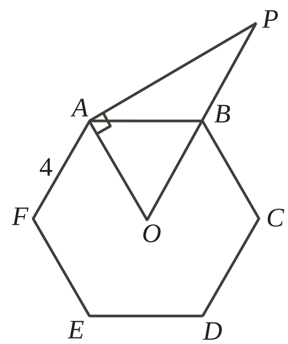


2. Monsieur Matte a quatre cartes numérotées 1, 2, 3 et 4. Il donne une carte chacun à Benoît, Viana, René et Sara. Benoît ne reçoit pas la carte 1. Le numéro de Viana est 1 de plus que le numéro de René. Quel numéro Sara *ne peut-elle pas* avoir reçu ?

3. Sachant que $\dfrac{99!}{101!-99!}=\dfrac{1}{n}$, déterminer la valeur de n.

   (Étant donné un entier strictement positif m, alors $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m inclusivement. Par exemple, $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$ et $99! = 99(98)(97)\cdots(3)(2)(1)$.)

4. Dans la figure ci-contre, $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O. Ses côtés ont une longueur de 4. Le segment de droite perpendiculaire à OA et issu de A coupe le prolongement de OB au point P. Quelle est l'aire du triangle OAP ?



5. Chacun des entiers positifs 2013 et 3210 satisfait aux trois propriétés suivantes :
   (i) Il est un entier entre 1000 et 10 000,
   (ii) ses quatre chiffres sont des entiers consécutifs et
   (iii) il est divisible par 3.

   Combien y a-t-il d'entiers positifs qui satisfont à ses trois propriétés ?

6. Étant donné deux entiers strictement positifs p et q, $\max(p, q)$ représente le maximum de p et de q, tandis que $\min(p, q)$ représente le minimum de p et de q. Par exemple, $\max(30, 40) = 40$ et $\min(30, 40) = 30$. De plus, $\max(30, 30) = 30$ et $\min(30, 30) = 30$.

   Déterminer le nombre de couples (x, y) qui vérifient l'équation

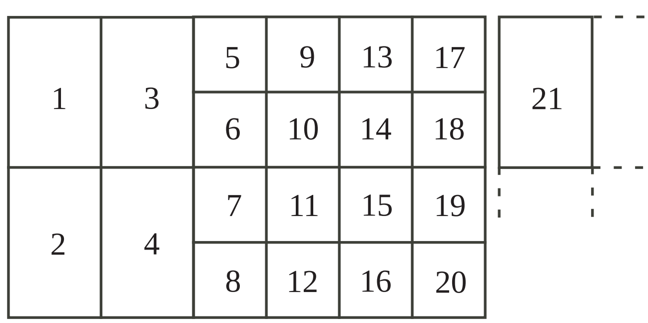
$$\max(60, \min(x, y)) = \min(\max(60, x), y)$$

   x et y étant des entiers strictement positifs de manière que $x \leq 100$ et $y \leq 100$.

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. À l'école secondaire Ladouceur, les casiers sont placés en blocs de 20 casiers. Chaque bloc de casiers est composé de six colonnes de casiers ; les deux premières colonnes de chaque bloc contiennent deux grands casiers chacune, tandis que les quatre dernières colonnes contiennent quatre petits casiers chacune. Les casiers sont numérotés à partir de 1, en descendant chaque colonne l'une après l'autre. Les 21 premiers casiers, ainsi que leur numéro, sont illustrés dans la figure suivante.



   (a) Quelle est la somme des numéros de casiers dans la colonne qui contient le casier numéro 24 ?

   (b) Dans une colonne, les numéros de casiers ont une somme de 123. Quels sont les numéros de casiers dans cette colonne ?

   (c) Dans une autre colonne, les numéros de casiers ont une somme de 538. Quels sont les numéros de casiers dans cette colonne ?

   (d) Expliquer pourquoi il est impossible que les numéros de casiers d'une colonne aient une somme de 2013.

2. (a) Développer et simplifier l'expression $(a-1)(6a^2-a-1)$.

   (b) Déterminer toutes les valeurs de θ telles que $6\cos^3\theta - 7\cos^2\theta + 1 = 0$ et $-180° < \theta < 180°$. Au besoin, arrondir les réponses au dixième près.
   (Remarquer que $\cos^3\theta = (\cos\theta)^3$.)

   (c) Déterminer toutes les valeurs de θ telles que $6\cos^3\theta - 7\cos^2\theta + 1 < 0$ et $-180° < \theta < 180°$.

3. Étant donné deux entiers strictement positifs, m et n, une suite (m,n) est une suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de lettres A et B de manière que si $x_i = A$, i étant un entier strictment positif, alors $x_{i+m} = B$ et si $x_i = B$, i étant un entier strictment positif, alors $x_{i+n} = A$. Par exemple, $ABABAB\ldots$ est une suite $(1,1)$.

   (a) Déterminer toutes les suites $(2,2)$.

   (b) Démontrer qu'il n'existe aucune suite $(1,2)$.

   (c) Pour tout entier strictement positif r, démontrer que s'il existe une suite (m,n), alors il existe une suite (rm,rn).

   (d) Déterminer tous les couples (m,n) pour lesquels il existe une suite (m,n).