Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2013

le jeudi 21 novembre 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 novembre 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque ABC est un segment de droite, $\angle CBE = 180^\circ - \angle ABE$, d'où $\angle CBE = 180^\circ - 130^\circ$, ou $\angle CBE = 50^\circ$.
   Puisque les mesures des angles du triangle BCE ont une somme de 180°, alors $\angle BCE = 180^\circ - \angle CBE - \angle BEC$, d'où $\angle BCE = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ$, ou $\angle BCE = 70^\circ$.
   Puisque BCD est un segment de droite, $\angle DCE = 180^\circ - \angle BCE$, d'où $\angle DCE = 180^\circ - 70^\circ$, ou $\angle DCE = 110^\circ$.
   Donc, $x^\circ = 110^\circ$, ou $x = 110$.
   (On aurait pu utiliser le fait que l'angle DCE est un angle extérieur du triangle BCE.
   Ainsi, $\angle DCE = \angle CBE + \angle BEC$, d'où $\angle DCE = 50^\circ + 60^\circ$, ou $\angle DCE = 110^\circ$. Donc $x = 110$.)

   Réponse : 110

2. *Solution 1*
   Tout entier qui est un multiple de 8 est aussi un multiple de 2 et de 4, puisque 8 est un multiple de 2 et de 4.
   On cherche donc le plus petit entier positif qui est un multiple de 6 et de 8.
   On considère les premiers multiples positifs de 8 et on détermine le plus petit qui est aussi un multiple de 6.
   $1 \times 8 = 8$; ce n'est pas un multiple de 6.
   $2 \times 8 = 16$; ce n'est pas un multiple de 6.
   $3 \times 8 = 24$; c'est un multiple de 6. C'est donc le plus petit entier strictement positif qui est un multiple de 2, de 4, de 6 et de 8.

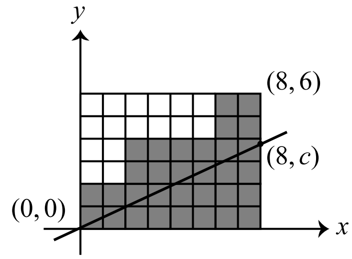
   Solution 2
   Tout entier qui est un multiple de 8 est aussi un multiple de 2 et de 4, puisque 8 est un multiple de 2 et de 4.
   On cherche donc le plus petit entier positif qui est un multiple de 6 et de 8.
   Cet entier est le plus petit commun multiple de 6 et de 8.
   En factorisation première, on a $6 = 2 \times 3$ et $8 = 2^3$.
   On peut obtenir le plus petit commun multiple de 6 et de 8 en observant les facteurs premiers de ces deux nombres. Les seuls facteurs premiers de 6 et 8 sont 2 et 3. Le facteur 3 parait un maximum de 1 fois (dans 6) et le facteur 2 parait un maximum de 3 fois (dans 8).
   Le plus petit commun multiple de 6 et de 8 est donc $3 \times 2^3 = 24$.
   Le plus petit entier strictement positif qui est un multiple de 2, de 4, de 6 et de 8 est 24.

   Réponse : 24

3. Puisque $x = 3$ et $y = 7$ vérifient l'équation $y = ax + (1-a)$, alors $7 = 3a + (1-a)$, ou $7 = 2a+1$.
   Donc $2a = 6$, ou $a = 3$. L'équation devient donc $y = 3x - 2$.
   Lorsque $x = 8$, alors $y = 3(8) - 2$, ou $y = 22$.

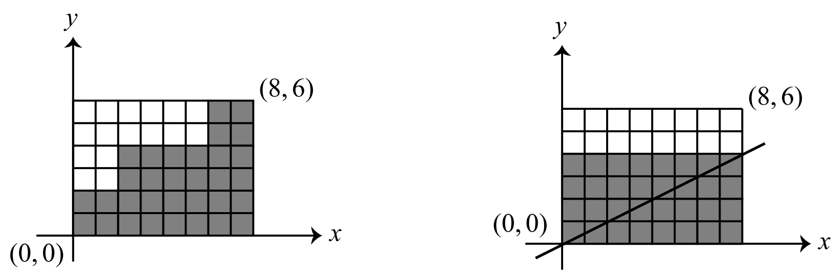
   Réponse : 22

4. *Solution 1*
   Puisque 32 carreaux 1×1 sont ombrés, la partie ombrée a une aire de 32.
   On veut tracer un segment reliant les points $(0, 0)$ et $(8, c)$ qui coupe la région ombrée en deux régions ayant chacune une aire de $\frac{32}{2}$, ou 16.
   Si la pente du segment reliant les points $(0, 0)$ et $(8, c)$ n'est pas trop grande, la région du bas sera un triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, $(8, 0)$, et $(8, c)$.



Puisque ce triangle est rectangle en $(8, 0)$, il a une base de 8 et une hauteur de c.
On veut que ce triangle ait une aire de 16. Il faut donc que $\frac{1}{2}(8)(c) = 16$, d'où $4c = 16$, ou $c = 4$.
(Puisque $c = 4$, ce segment passe aux points $(0, 0)$ et $(8, 4)$. Ce segment a une pente de $\frac{4-0}{8-0}$, ou $\frac{1}{2}$. Ce segment passe donc aux points $(2, 1)$ et $(4, 2)$, ce qui confirme que le segment ne passe pas dans la région non ombrée.)

Solution 2
On fait bouger le carré ombré 2×2, en haut à droite, pour compléter un rectangle ombreé 8×4, comme dans les figures avant-après ci-dessous.



La région ombrée est maintenant un rectangle ayant pour sommet inférieur gauche le point $(0, 0)$ et pour sommet supérieur droit le point $(8, 4)$.
La région ombrée est coupée en deux parties de même aire si on trace un segment qui relie les points $(0, 0)$ et $(8, 4)$.
On remarque que la région ombrée initiale est située au-dessus de ce segment. (Puisque le segment a une pente de $\frac{4-0}{8-0}$, ou $\frac{1}{2}$, il passe aux points $(2, 1)$ et $(4, 2)$.)
Donc, l'aire de la région au-dessus du segment n'a pas changé lorsqu'on a fait bouger le carré ombré 2×2.
En renversant le mouvement du carré ombré 2×2, on ne change donc pas l'aire de la région ombrée au-dessus du segment, ni celle de la région ombrée au-dessous du segment.
Donc, le segment qui joint les points $(0, 0)$ et $(8, 4)$ coupe la région en deux régions de même aire. Donc $c = 4$.

Réponse : $c = 4$

5. Puisque 1000 et 10 000 ne sont pas des palindromes, alors chaque palindrome entre 1000 et 10 000 est un nombre de quatre chiffres de la forme $ABBA$, A et B étant des chiffres et $A \neq 0$.
On cherche des palindromes $ABBA$ qui sont divisibles par 6.
Un entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 (c.-à-d. s'il est pair) et s'il est divisible par 3.
Puisque $ABBA$ doit être pair, alors A doit être pair.
Donc $A = 2$, $A = 4$, $A = 6$ ou $A = 8$.
Pour qu'un entier positif soit divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres soit divisible par 3.
Pour chaque valeur possible de A, on détermine les valeurs de B qui donnent des palindromes divisibles par 6 :

- 1^er^ cas : $A = 2$
  On a $ABBA = 2BB2$ et la somme des chiffres est égale à $2 + B + B + 2$, ou $2B + 4$.
  On cherche tous les chiffres B pour lesquels le nombre $2B + 4$ est divisible par 3.
  Puisque B ne peut dépasser 9, alors $2B+4$ ne peut dépasser $2(9)+4$, ou 22. De plus, $2B+4$ est toujours pair, puisque $2B + 4 = 2(B + 2)$.
  Donc, $2B + 4$ doit être un multiple pair de 3 qui qui ne dépasse pas 22.
  Donc, $2B + 4$ pourrait égaler 6, 12 ou 18.
  Si $2B + 4 = 6$, alors $2B = 2$, ou $B = 1$.
  Si $2B + 4 = 12$, alors $2B = 8$, ou $B = 4$.
  Si $2B + 4 = 18$, alors $2B = 14$, ou $B = 7$.
  (On aurait pu considérer chaque valeur possible de B de 0 à 9 et diviser chaque nombre $2BB2$ par 6 pour vérifier.)
- 2^e^ cas : $A = 4$
  On a $ABBA = 4BB4$.
  On utilise la même approche que dans le 1^er^ cas pour conclure que les valeurs de B pour lesquelles le nombre $4BB4$ est divisible par 6 sont $B = 2$, $B = 5$ et $B = 8$.
- 3^e^ cas : $A = 6$
  On a $ABBA = 6BB6$.
  On utilise la même approche que dans le 1^er^ cas pour conclure que les valeurs de B pour lesquelles le nombre $6BB6$ est divisible par 6 sont sont $B = 0$, $B = 3$, $B = 6$ et $B = 9$.
- 4^e^ cas : $A = 8$
  On a $ABBA = 8BB8$.
  On utilise la même approche que dans le 1^er^ cas pour conclure que les valeurs de B pour lesquelles le nombre $8BB8$ est divisible par 6 sont sont $B = 1$, $B = 4$ et $B = 7$.

Il y a donc $3 + 3 + 4 + 3$ palindromes, ou 13 palindromes entre 1000 et 10 000 qui sont des multiples de 6.

Réponse : 13

6. Puisqu'on donne $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \times 7}$, il semble avisé de considérer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
On utilise un dénominateur commun :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \qquad (*)$$

En commençant par l'expression

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = 1,$$

on soustrait et on ajoute au membre de gauche les mêmes quantités :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{44} + \frac{1}{44} - \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = 1$$

On regroupe des termes du membre de gauche :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{42} - \frac{1}{43}\right) + \left(\frac{1}{43} - \frac{1}{44}\right) + \left(\frac{1}{44} - \frac{1}{45}\right) + \frac{1}{45} = 1$$

On utilise $(*)$, ci-dessus, pour obtenir :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42 \times 43} + \frac{1}{43 \times 44} + \frac{1}{44 \times 45} + \frac{1}{45} = 1$$

On obtient :

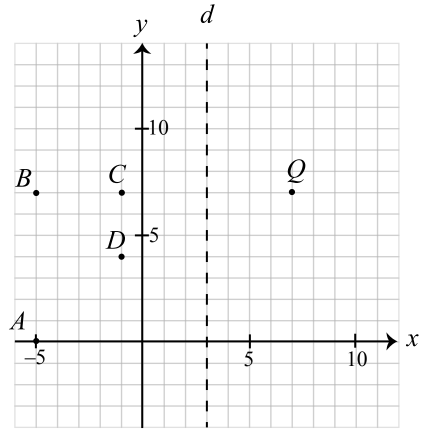
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1806}+\frac{1}{1892}+\frac{1}{1980}+\frac{1}{45}=1$$

Donc, le triplet $(x, y, z) = (1806, 1892, 1980)$, où $1000 < x < y < z < 2000$, vérifie les conditions données.
D'autres solutions existent, mais on en demandait une seule.

Réponse : $(1806, 1892, 1980)$

Partie B

1. (a) Les points D, B et A subissent une réflexion par rapport à une droite verticale. Dans chaque cas, l'ordonnée de l'image sera donc la même que celle du point initial.
Le point D a pour abscisse -1 et il subit une réflexion par rapport à la droite d'équation $x = 3$.
Le point D est donc situé à $3 - (-1)$ unités, ou 4 unités à la gauche de cette droite.
Son image est donc située à 4 unités à la droite de la droite d'équation $x = 3$.
Le point P a donc pour coordonnées $(3 + 4, 4)$, ou $(7, 4)$.
De même, l'image R du point $B(-5, 7)$ par rapport à la droite d'équation $x = 3$ a pour coordonnées $(3 + 8, 7)$, ou $(11, 7)$.
Le point A a la même abscisse que le point B. L'abscisse de S est donc la même que celle de R. Donc, S a pour coordonnées $(11, 0)$.



(b) Le périmètre du polygone $ABCDPQRS$ est égal à la somme des longueurs de ses 8 côtés. Puisque chaque côté est horizontal ou vertical, la longueur de chaque côté horizontal est égale à la différence des abscisses des extrémités et la longueur de chaque côté vertical est égale à la différence des ordonnées des extrémités.
Le périmètre est égal à $AB + BC + CD + DP + PQ + QR + RS + SA$.
À partir des coordonnées des points $A(-5, 0)$ et $B(-5, 7)$, on a $AB = 7 - 0 = 7$.
À partir des coordonnées des points $B(-5, 7)$ et $C(-1, 7)$, on a $BC = -1 - (-5) = 4$.
De même, on obtient $CD = 3$, $DP = 8$, $PQ = 3$, $QR = 4$, $RS = 7$ et $SA = 16$.
Le périmètre du polygone $ABCDPQRS$ est égal à $7 + 4 + 3 + 8 + 3 + 4 + 7 + 16$, ou 52.
(On aurait pu calculer la longueur des côtés à la gauche de la droite d et doubler ce résultat. En effet, le polygone est formé en faisant réfléchir la partie à la gauche de d et en réunissant cette partie à son image.)

(c) Le grand cylindre a pour hauteur AB. D'après la partie (b), $AB = 7$.
Le petit cylindre a pour hauteur CD. D'après la partie (b), $CD = 3$.
La longueur du rayon du grand cylindre est égale à la distance de d à chacun des points B, R, S et A. Dans la partie (a), on a vu qu'il s'agit d'une distance de 8.
La longueur du rayon du petit cylindre est égale à la distance de d à chacun des points C, Q, P et D. Dans la partie (a), on a vu qu'il s'agit d'une distance de 4.

Le volume du solide est égal au volume du grand cylindre moins le volume du petit cylindre. Un cylindre de rayon r et de hauteur h a un volume égal à $\pi r^2 h$. Le volume du solide est donc égal à :

$$\pi(8^2)(7) - \pi(4^2)(3) = 448\pi - 48\pi = 400\pi$$

La surface totale du solide est formée de la face latérale et de la base du grand cylindre, de la face latérale et de la base du petit cylindre, en plus de la surface du haut du grand

cylindre moins celle du petit cylindre.
L'aire de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égale à $2\pi rh$, tandis que l'aire de sa base est égale à πr^2.
L'aire totale du solide est égale à :

$$(\pi(8^2)+2\pi(8)(7))+(\pi(4^2)+2\pi(4)(3))+(\pi 8^2-\pi 4^2)=176\pi+40\pi+48\pi=264\pi$$

(L'expression $\pi 8^2-\pi 4^2$ représente l'aire de la base supérieure du grand cylindre moins celle du petit cylindre.)
Le solide a un volume de 400π et une aire totale de 264π.

2. (a) On place la 1^{re} boule dans la tasse 1.
On place ensuite une boule dans chaque 5^{e} tasse en suivant l'ordre établi. Le numéro de chaque tasse qui reçoit une boule est donc 5 de plus que celui de la tasse précédente, moyennant l'ajustement suivant : Si ce numéro est inférieur ou égal à 12, c'est bien le numéro de la tasse ; si le numéro est supérieur à 12, on soustrait 12 pour obtenir le numéro de la tasse.
La 2^{e} boule va dans la tasse numéro $1+5$, ou 6 ; la 3^{e} boule va dans la tasse numéro $6+5$, ou 11 ; la 4^{e} boule va dans la tasse numéro « $11+5$ », ou « 16 » ; puisque $16-12=4$, il s'agit de la tasse numéro 4.
On continue jusqu'à ce que l'on place une deuxième boule dans la tasse numéro 1.
Dans l'ordre, on place une boule dans les tasses 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8, 1.

(b) On place la 1^{re} boule dans la tasse 1.
On place la boule suivante dans la tasse numéro $1+6$, ou 7.
On place la boule suivante dans la tasse numéro $7+6=13$, c'est-à dire la tasse numéro $13-9$, ou 4.
On place la boule suivante dans la tasse numéro $4+6$, ou 10, c'est-à-dire dans la tasse numéro $10-9$, ou 1.
On s'arrête donc ici.
On a donc placé des boules dans trois tasses (les tasses 1, 7 et 4). Donc, les tasses 2, 3, 5, 6, 8 et 9 ne reçoivent aucune boule.

(c) On place la 1^{re} boule dans la tasse 1.
On atteint de nouveau la tasse numéro 1 après avoir parcouru 120 tasses.
Puisqu'on place une boule dans chaque 3^{e} tasse, on place $\frac{120}{3}$ boules, ou 40 boules additionnelles après la première. La 41^{e} boule est placée dans la tasse numéro 1 et on s'arrête.
Les boules ont donc été placées dans 40 tasses (la tasse numéro 1 contient 2 boules).
Puisque 40 tasses contiennent au moins une boule, il y a $120-40$ tasses, ou 80 tasses qui ne contiennent pas au moins une boule à la fin.

(d) On place la 1^{re} boule dans la tasse 1.
Puisqu'on place une boule dans chaque 7^{e} tasse et qu'on doit déposer 238 boules en tout, on doit parcourir 337×7 tasses, ou 2359 tasses à partir de la tasse numéro 1.
Puisque la tasse numéro 1 est atteinte après avoir parcouru 1000 tasses, elle sera atteinte de nouveau après avoir parcouru 1000 tasses. Il reste 359 autres tasses avant d'arriver à la tasse numéro 360.
La 238^{e} boule est donc placée dans la tasse numéro 360.

3. (a) Les différences entre les nombres de l'ensemble sont :

$6-3=3$	$13-3=10$	$21-3=18$	$32-3=29$
	$13-6=7$	$21-6=15$	$32-6=26$
		$21-13=8$	$32-13=19$
			$32-21=11$

Donc, la LDP est $3, 7, 8, 10, 11, 15, 18, 19, 26, 29$.

(b) Puisque $x > 16$, les différences entre les nombres de l'ensemble sont :

$4-1=3$	$9-1=8$	$16-1=15$	$x-1$
	$9-4=5$	$16-4=12$	$x-4$
		$16-9=7$	$x-9$
			$x-16$

La somme de ces différences est égale à $50+(x-1)+(x-4)+(x-9)+(x-16)$, ou $4x+20$.
On sait que ces différences forment la LDP et que leur somme est égale à 112. Donc $4x+20=112$, d'où $4x=92$, ou $x=23$.

(c) Chacun des quatre ensembles

$$\{3,5,10,11,14\} \qquad \{3,5,10,13,14\} \qquad \{3,6,7,12,14\} \qquad \{3,4,7,12,14\}$$

admet un LDP qui ne contient que des entiers distincts. Ils répondent donc tous aux critères du problème.
Voici une façon d'obtenir ces ensembles.

On donne l'ensemble $\{3,q,r,s,14\}$ et la condition $3<q<r<s<14$.
Les différences entre des nombres adjacents (p. ex. 3 et q, q et r, etc.) sont appelées « différences primaires ». Lorsqu'on considère deux nombres ayant un nombre entre eux (p. ex., 3 et r, q et s, r et 14), les différences entre les deux nombres sont appelées « différences secondaires ».
On considère les quatre différences primaires $q-3$, $r-q$, $s-r$ et $14-s$. Chacune est un entier strictement positif. Si la LDP ne contient que des entiers distincts, alors ces quatre différences doivent être doivent être distinctes.
On remarque aussi que $(q-3)+(r-q)+(s-r)+(14-s)=14-3=11$. (La somme des quatre différences primaires est égale à la différences entre le premier et le dernier nombre.)
La somme de quatre entiers strictement positifs doit être supérieure ou égale à $1+2+3+4$, ou 10. Pour obtenir une somme de 11, il faudrait que les entiers soient 1, 2, 3 et 5 :

> Si chaque entier était égal à 2 ou plus, leur somme serait au moins égale à $2+3+4+5$ ou 14. Donc, un des entiers doit être égal à 1.
> Si chacun des trois entiers qui restent était égal à 3 ou plus, leur somme serait au moins égale à $1+3+4+5$, ou 13. Donc, un des entiers qui restent doit être égal à 2.
> Si chacun des deux entiers qui restent était égal à 3 ou plus, leur somme serait au moins égale à $1+2+4+5$, ou 12. Donc, un des deux entiers qui restent doit être égal à 3.
> Trois des nombres sont donc 1, 2, et 3. Le quatrième doit donc être 5.

Les quatre différences primaires doivent donc être 1, 2, 3 et 5. On tente de placer ces différences de manière que la LDP ne contienne que des nombres distincts.
On remarque que chaque différence secondaire est la somme de deux différences primaires correspondantes. (Par exemple, $r - 3 = (q - 3) + (r - q)$.)
Pour que les nombres de la LDP soient distincts, les différences primaires 1 et 2 ne peuvent pas être adjacentes, autrement on créerait la différence secondaire $1 + 2$, ou 3, qui serait la même que la différence primaire 3.
De même, les différences primaires 2 et 3 ne peuvent pas être adjacentes, autrement on créerait la différence secondaire $2+3$, ou 5 qui serait la même que la différence primaire 5.
On doit donc placer les entiers 1, 2, 3 et 5 de manière que le 2 ne soit pas adjacent à 1 ou à 3.
Dans ce cas, le 2 doit être la première différence primaire ou la dernière (puisqu'il doit être adjacent à une seule autre différence primaire) et il doit être adjacent à 5.
Supposons que 2 est la première différece primaire. La liste ordonnée des différences primaires est donc $2, 5, 1, 3$ ou $2, 5, 3, 1$.
En commençant par le nombre 3 dans l'ensemble de nombres, cet ensemble serait $\{3, 5, 10, 11, 14\}$ ou $\{3, 5, 10, 13, 14\}$.
Le premier ensemble a pour LDP $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$ et ces nombres sont distincts.
Le deuxième ensemble a pour LDP $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11$ et ces nombres sont distincts
On peut aussi renverser l'ordre des différences primaires pour obtenir $\{3, 6, 7, 12, 14\}$ et $\{3, 4, 7, 12, 14\}$ qui donnent chacune une LDP contenant des nombres distincts.
L'argument présenté ci-haut démontre que ce sont les seuls ensembles possibles.
Donc, les quatre ensembles qui répondent aux critères donnés sont :

$$\{3, 5, 10, 11, 14\} \qquad \{3, 5, 10, 13, 14\} \qquad \{3, 6, 7, 12, 14\} \qquad \{3, 4, 7, 12, 14\}$$

N'importe lequel de ces ensembles suffit pour répondre à la question.

(d) On considère un ensemble d'entiers de la forme $\{3, q, r, s, t\}$ où $3 < q < r < s < t$ et $t < 14$. On veut démontrer qu'un tel ensemble admet une LDP qui contient des entiers non distincts.
On utilisera les différences primaires et secondaires comme dans la partie (c).
S'il existe des répétitions dans les différences primaires, alors le résultat est vrai.
On suppose donc que les différences primaires sont distinctes.
Donc, les différences primaires $q - 3$, $r - q$, $s - r$ et $t - s$ sont distinctes et leur somme doit être supérieure ou égale à $1 + 2 + 3 + 4$, ou 10.
Or, $t - 3 = (q - 3) + (r - q) + (s - r) + (t - s)$ et cette somme est supérieure ou égale à 10.
Puisque $t < 14$, alors $t - 3 < 11$. Donc $t - 3$ doit être égal à 10, d'où $t = 13$.
Puisque la somme des différences primaires est égale à 10, les sommes doivent être 1, 2, 3 et 4.
Si 1 est adjacent à 2 ou à 3, on obtiendrait des différences secondaires de $2 + 1$ ou $3 + 1$, c'est-à-dire 3 ou 4, ce qui créerait des répétitions dans la LDP.
On suppose donc que 1 n'est pas adjacent à 2 ou à 3. Donc 1 doit être adjacent à 4 seulement et il doit donc paraître au début ou à la fin de la liste des différences primaires.
Or, cela implique que 2 et 3 sont adjacents. Si 1 et 4 sont adjacents et si 2 et 3 sont adjacents, on obtient alors deux différences secondaires égales à 5 (puisque $1 + 4 = 5$ et $2 + 3 = 5$).
Il y a donc une répétition dans la LDP.
Donc, tout ensemble de cette forme a une LDP qui contient des entiers. non distincts.