Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le jeudi 21 novembre 2013
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 novembre 2013
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Durée : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarques :

Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

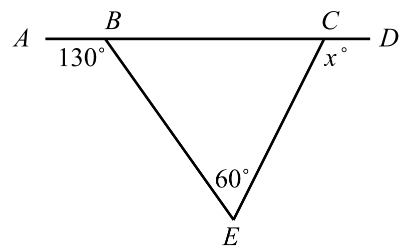
Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 . . . ou 4,646 . . .
	4.	**L'utilisation de la calculatrice est permise**, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
	5.	Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

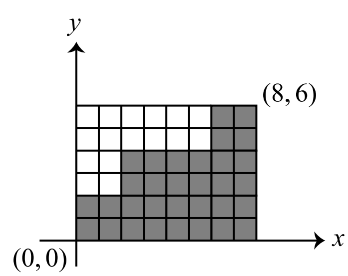
1. Dans la figure ci-contre, les points B et C sont situés sur AD.
   Quelle est la valeur de x ?



2. Quel est le plus petit entier strictement positif qui est un multiple de 2, de 4, de 6 et de 8 ?

3. On considère l'équation $y = ax + (1 - a)$, a étant un nombre inconnu.
   Si $x = 3$, on sait que y a une valeur de 7. Si $x = 8$, quelle est la valeur de y ?

4. Un quadrillage 8×6 est placé dans le premier quadrant d'un plan cartésien, avec deux de ses côtés sur les axes, comme dans la figure ci-contre. En tout, 32 des carreaux du quadrillage sont ombrés. On trace un segment reliant les points $(0, 0)$ et $(8, c)$, de manière à couper la partie ombrée en deux régions de même aire. Quelle est la valeur de c ?



5. Un *palindrome* est un entier strictement positif que l'on peut lire de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 1331 est un palindrome. Déterminer le nombre de palindromes entre 1000 et 10 000 qui sont des multiples de 6.

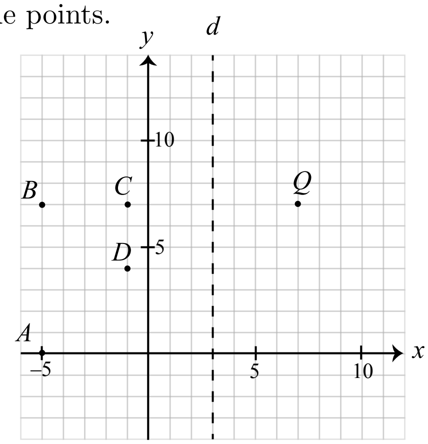
6. On remarque que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ et $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \times 7}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = 1$.

   Déterminer un triplet (x, y, z) d'entiers strictment positifs, $1000 < x < y < z < 2000$, tel que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{45} = 1$$

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

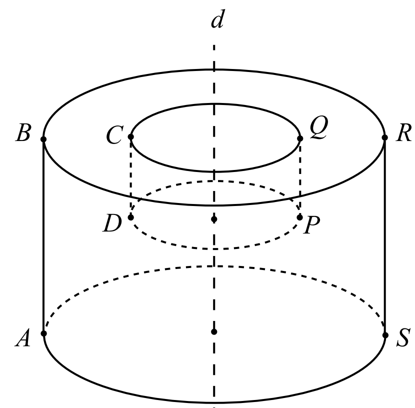


1. Les points $A(-5,0)$, $B(-5,7)$, $C(-1,7)$ et $D(-1,4)$ sont représentés dans la figure ci-contre. La droite d a pour équation $x = 3$ et le point Q est l'image du point C par une réflexion dans d.

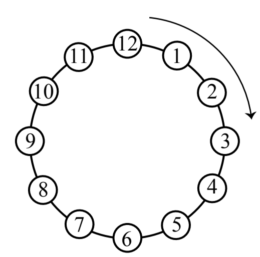
   (a) Le point P est l'image du point D par une réflexion dans d.
   Le point R est l'image du point B par une réflexion dans d.
   Le point S est l'image du point A par une réflexion dans d.
   Quelles sont les coordonnées de P, R et S ?

   (b) Déterminer le périmètre du polygone $ABCDPQRS$.

   (c) Le polygone $ABCDPQRS$ subit une rotation autour de la droite d de manière à créer le solide ci-contre. Ce solide est un grand cylindre dont on a enlevé un petit cylindre. Déterminer le volume et l'aire totale de ce solide. (Remarque : Un cylindre de rayon r et de hauteur h a un volume de $\pi r^2 h$ et une aire totale de $2\pi r^2 + 2\pi rh$.)



2. Dans chaque partie de ce problème, des tasses sont placées en rond et numérotées $1, 2, 3$, et ainsi de suite. On place une boule dans la tasse 1. Ensuite, en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre, on place une boule dans chaque $n^{\text{ième}}$ tasse qui suit jusqu'à ce que la tasse 1 contienne 2 boules. Par exemple, si on a 12 tasses et que l'on place une boule dans chaque 3$^{\text{e}}$ tasse, les boules sont placées, dans l'ordre, dans les tasses 1, 4, 7, 10, 1.



   (a) On a 12 tasses en rond et on place une boule dans chaque 5$^{\text{e}}$ tasse, en commençant et en finissant par la tasse 1. Indiquer, dans l'ordre, les tasses qui reçoivent une boule.

   (b) On a 9 tasses en rond et on place une boule dans chaque 6$^{\text{e}}$ tasse, en commençant et en finissant par la tasse 1. Indiquer les tasses qui ne reçoivent aucune boule.

   (c) On a 120 tasses en rond et on place une boule dans chaque 3$^{\text{e}}$ tasse, en commençant et en finissant par la tasse 1. Combien de tasses *ne contiennent pas* au moins une boule à la fin ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (d) On a 1000 tasses en rond et on place une boule dans chaque 7$^{\text{e}}$ tasse, en commençant et en finissant par la tasse 1. Déterminer le numéro de la tasse qui reçoit la 338$^{\text{e}}$ boule.

3. La *liste des différences positives (LDP)* d'un ensemble d'entiers est une liste, écrite en ordre croissant, des différences positives de toutes les paires possibles d'entiers de l'ensemble. Par exemple, l'ensemble $\{2, 5, 12\}$ produit une LDP de trois entiers distincts, soit $3, 7, 10$, tandis que l'ensemble $\{3, 4, 6, 9\}$ produit une LDP de six entiers qui ne sont pas tous distincts, soit $1, 2, 3, 3, 5, 6$.

   (a) Quelle est la LDP de l'ensemble $\{3, 6, 13, 21, 32\}$?

   (b) On considère l'ensemble $\{1, 4, 9, 16, x\}$, où $x > 16$. Sachant que les entiers de la LDP de cet ensemble ont une somme de 112, déterminer la valeur de x.

   (c) Donner un ensemble de la forme $\{3, q, r, s, 14\}$, où $3 < q < r < s < 14$, dont la LDP ne contient que des entiers distincts.

   (d) Démontrer que tout ensemble d'entiers de la forme $\{3, q, r, s, t\}$, où $3 < q < r < s < t$ et $t < 14$, a une LDP qui contient des entiers non distincts.