Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2012

le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le triangle PTQ est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = 32^2 + 24^2$, ou $PQ^2 = 1024 + 576$, ou $PQ^2 = 1600$. Puisque $PQ > 0$, $PQ = 40$.

   (b) Le triangle QTR est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore, $51^2 = TR^2 + 24^2$, ou $TR^2 = 2601 - 576$, ou $TR^2 = 2025$. Puisque $TR > 0$, $TR = 45$.
   Or, $PR = PT + TR$, d'où $PR = 32 + 45$, ou $PR = 77$.
   Dans le triangle PQR, QT est perpendiculaire à la base PR. Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times (PR) \times (QT)$, ou $\frac{1}{2} \times 77 \times 24$, ou 924.

   (c) D'après la partie (b), PR a une longueur de 77.
   Puisque $QS : PR = 12 : 11$, alors $\dfrac{QS}{77} = \dfrac{12}{11}$, d'où $QS = 77 \times \dfrac{12}{11}$, ou $QS = 84$.
   Donc $TS = QS - QT$, d'où $TS = 84 - 24$, ou $TS = 60$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PTS, $PS = \sqrt{32^2 + 60^2}$, ou $PS = \sqrt{4624}$, ou $PS = 68$, puisque $PS > 0$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle RTS, $RS = \sqrt{45^2 + 60^2}$, ou $RS = \sqrt{5625}$, ou $RS = 75$, puisque $RS > 0$.
   Le quadrilatère $PQRS$ a donc un périmètre de $40 + 51 + 75 + 68$, ou 234.

2. (a) On développe : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$.
   Puisque $a^2 + b^2 = 24$ et $ab = 6$, alors $(a + b)^2 = 24 + 2(6)$, ou $(a + b)^2 = 36$.

   (b) On développe : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xy$.
   Puisque $(x + y)^2 = 13$ et $x^2 + y^2 = 7$, alors $13 = 7 + 2xy$, d'où $2xy = 6$, ou $xy = 3$.

   (c) On développe : $(j + k)^2 = j^2 + 2jk + k^2 = (j^2 + k^2) + 2jk$.
   Puisque $j + k = 6$ et $j^2 + k^2 = 52$, alors $6^2 = 52 + 2jk$, d'où $2jk = -16$, ou $jk = -8$.

   (d) On développe : $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^4 + n^4) + 2m^2n^2$.
   Puisque $m^2 + n^2 = 12$ et $m^4 + n^4 = 136$, alors $12^2 = 136 + 2m^2n^2$, d'où $2m^2n^2 = 8$, ou $m^2n^2 = 4$. Donc $mn = \pm 2$.

3. (a) Puisque $\angle MON = 90°$, les pentes de NO et de OM ont un produit de -1.
   La pente de NO est égale à $\dfrac{n^2 - 0}{n - 0}$, ou n, puisque $n \neq 0$ (les points N et O étant distincts).
   La pente de OM est égale à $\dfrac{\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0}$, ou $\dfrac{1}{2}$.
   Donc $n \times \dfrac{1}{2} = -1$, ou $n = -2$.

   (b) Puisque $\angle ABO = 90°$, les pentes de BA et de BO ont un produit de -1.
   La pente de BA est égale à $\dfrac{b^2 - 4}{b - 2}$, ou $\dfrac{(b - 2)(b + 2)}{b - 2}$, ou $b + 2$, puisque $b \neq 2$ (A et B étant distincts).
   La pente de BO est égale à $\dfrac{b^2 - 0}{b - 0}$, ou b, puisque $b \neq 0$ (B et O étant distincts).
   Donc $(b + 2) \times b = -1$, ou $b^2 + 2b + 1 = 0$.
   Donc $(b + 1)(b + 1) = 0$, d'où $b = -1$.

   (c) Puisque $\angle PQR = 90°$, les pentes de PQ et de RQ ont un produit de -1.
   La pente de PQ est égale à $\dfrac{p^2 - q^2}{p - q}$, ou $\dfrac{(p - q)(p + q)}{p - q}$, ou $p + q$, puisque $p \neq q$ (P et Q étant distincts).

La pente de RQ est égale à $\dfrac{r^2-q^2}{r-q}$, ou $\dfrac{(r-q)(r+q)}{r-q}$, ou $r+q$, puisque $r \neq q$ (R et Q étant distincts).
Donc $(p+q) \times (r+q) = -1$.
Puisque p, q et r sont des entiers, $p+q$ et $r+q$ le sont aussi.
Or $(p+q) \times (r+q) = -1$ si $p+q=1$ et $r+q=-1$ ou si $p+q=-1$ et $r+q=1$ (ce sont les seules possibilités pour des entiers p, q, et r qui vérifient $(p+q) \times (r+q) = -1$).
Dans le premier cas, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $p+q+r+q = 1+(-1)$, ou $2q+p+r=0$.
Dans le deuxième cas, on additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $p+q+r+q=-1+1$, ou $2q+p+r=0$.
Dans les deux cas, on obtient $2q+p+r=0$, ce qu'il fallait démontrer.

4. (a) Puisque p est un nombre premier impair, alors $p > 2$.
Puisque les seuls diviseurs premiers de $2p^2$ sont 2 et p, alors les diviseurs positifs de $2p^2$ sont 1, 2, p, $2p$, p^2 et $2p^2$.
Donc $S(2p^2) = 1+2+p+2p+p^2+2p^2$, ou $S(2p^2) = 3p^2+3p+3$.
Or $S(2p^2) = 2613$. Donc $3p^2+3p+3 = 2613$, ou $3p^2+3p-2610=0$, ou $p^2+p-870=0$.
Donc $(p+30)(p-29)=0$, d'où $p=29$ ($p \neq -30$ puisque p est un nombre premier impair).

(b) Soit $m=2p$ et $n=9q$, p et q étant des nombres premiers supérieurs à 3.
Les diviseurs positifs de m sont donc 1, 2, p et $2p$ (puisque $p>3$).
Donc $S(m) = 1+2+p+2p$, ou $S(m) = 3p+3$.
Les diviseurs positifs de n sont 1, 3, q, $3q$, 9 et $9q$ (puisque $q>3$).
Donc $S(n) = 1+3+9+q+3q+9q$, ou $S(n) = 13q+13$.
Puisque $S(m) = S(n)$, alors $3p+3 = 13q+13$, ou $3p-13q=10$.
Or puisque m et n sont des entiers consécutifs, alors $m-n=1$ ou $n-m=1$.

Si $m-n=1$, alors $2p-9q=1$.
On résout le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} 2p-9q &= 1 \qquad (1) \\ 3p-13q &= 10 \qquad (2) \end{aligned}$$

On multiplie les membres de l'équation (1) par 3 et ceux de l'équation (2) par 2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} 6p-27q &= 3 \qquad (3) \\ 6p-26q &= 20 \qquad (4) \end{aligned}$$

On soustrait l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $q=17$.
On reporte $q=17$ dans l'équation (1) pour obtenir $2p-9(17)=1$, ou $2p=154$, ou $p=77$.
Or, puisque p est un nombre premier, cette solution est rejetée.
Il n'y a donc aucune solution lorsque $m-n=1$.

Si $n-m=1$, alors $9q-2p=1$.
On résout le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} 9q-2p &= 1 \qquad (5) \\ 3p-13q &= 10 \qquad (6) \end{aligned}$$

On multiplie les membres de l'équation (5) par 3 et ceux de l'équation (6) par 2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} 27q - 6p &= 3 \qquad (7) \\ 6p - 26q &= 20 \qquad (8) \end{aligned}$$

On additionne les équations (7) et (8), membre par membre, pour obtenir $q = 23$.
On reporte $q = 23$ dans l'équation (6) pour obtenir $3p - 13(23) = 10$, ou $3p = 309$, ou $p = 103$.
Puisque $q = 23$ et $p = 103$ sont des nombres premier supérieurs à 3, alors $m = 2(103)$ et $n = 9(23)$, c'est-à-dire $m = 206$ et $n = 207$ sont le seul couple d'entiers consécutifs qui vérifient les conditions de l'énoncé.

(c) Puisque les seuls diviseurs premiers de p^3q sont p et q, les seuls diviseurs positifs de p^3q sont 1, p, q, pq, p^2, p^2q, p^3 et p^3q (puisque p et q sont des nombres premiers distincts).
Donc $S(p^3q) = p^3q + p^3 + p^2q + p^2 + pq + p + q + 1$.
On factorise :

$$\begin{aligned} S(p^3q) &= p^3q + p^3 + p^2q + p^2 + pq + p + q + 1 \\ &= (p^3q + p^2q + pq + q) + (p^3 + p^2 + p + 1) \\ &= q(p^3 + p^2 + p + 1) + (p^3 + p^2 + p + 1) \\ &= (q + 1)(p^3 + p^2 + p + 1) \\ &= (q + 1)(p^2(p + 1) + (p + 1)) \\ &= (q + 1)(p + 1)(p^2 + 1) \end{aligned}$$

On cherche le nombre de couples d'entiers premiers distincts, p et q, chacun inférieur à 30, pour lesquels $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ n'est pas divisible par 24.
Il y a 10 nombres premiers inférieurs à 30, soit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.
Donc, le nombre de couples (p, q) possibles, $p \neq q$, est égal à 10×9, ou 90.
On considère les couples (p, q) pour lesquels $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ *est* divisible par 24 et on soustraira leur nombre de 90.

Si p ou q est égal à 23, alors 24 est un diviseur de $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.
Il y a 9 couples de la forme $(23, q)$ et 9 couples de la forme $(p, 23)$, pour un total de 18 couples. Ceci tient compte de toutes les possibilités avec le nombre premier 23. On peut donc le retirer de notre liste des 10 nombres premiers.

Puisque $24 = 2^3 \times 3$, on peut déterminer les valeurs possibles de q qui correspondent à une valeur particulière de p en considérant que chacun de ces facteurs premiers (trois 2 et un 3) doit paraître dans la factorisation première $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1)$.
Par exemple, si $p = 2$, alors $(q + 1)(p + 1)(p^2 + 1) = (q + 1)(3)(5)$.
Donc pour que $(q+1)(p+1)(p^2+1)$ soit un multiple de 24, $q+1$ doit être un multiple de 8 (puisqu'il manque 2^3).
Donc lorsque $p = 2$, la seule valeur possible de q est 7 (on l'obtient en considérant les 8 autres valeurs dans la liste des nombres premiers).
On organise les valeurs possibles de p (et les valeurs de q qui en résultent) dans le tableau suivant :

p	$(p+1)(p^2+1)$	$q+1$ doit être un multiple de	q (différents de p)	N^bre de couples
2	$(3)(5)$	$2^3=8$	$q=7$	1
3	$(4)(10)=2^3\times 5$	3	$q=2,5,11,17,29$	5
5	$(6)(26)=2^2\times 3\times 13$	2	$q=3,7,11,13,17,19,29$	7
7	$(8)(50)=2^3\times 50$	3	$q=2,5,11,17,29$	5
11	$(12)(122)=2^3\times 3\times 61$	toutes valeurs de q	$q=2,3,5,7,13,17,19,29$	8
13	$(14)(170)=2^2\times 595$	$2\times 3=6$	$q=5,11,17,29$	4
17	$(18)(290)=2^2\times 3\times 435$	2	$q=3,5,7,11,13,19,29$	7
19	$(20)(362)=2^3\times 905$	3	$q=2,5,11,17,29$	5
29	$(30)(842)=2^2\times 3\times 2105$	2	$q=3,5,7,11,13,17,19$	7

Le nombre total de couples (p,q) pour lesquels 24 est un diviseur de $S(p^3q)$ est égal à :

$$18+1+5+7+5+8+4+7+5+7=67$$

Donc, le nombre de couples d'entiers premiers distincts, p et q, chacun inférieur à 30, pour lesquels $S(p^3q)$ *n'est pas* divisible par 24, est égal à $90-67$, ou 23.