



The CENTRE for EDUCATION  
in MATHEMATICS and COMPUTING

[www.cemc.uwaterloo.ca](http://www.cemc.uwaterloo.ca)

# Concours Hypatie

(11<sup>e</sup> année – Sec. V)

le jeudi 12 avril 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

**WATERLOO**  
MATHEMATICS

Great-West Life  
ASSURANCE COMPANY



Canada Life

STRONGER COMMUNITIES TOGETHER™

Canadian  
Institute of  
Actuaries



Institut  
canadien  
des actuaires

**Deloitte.**

©2012 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

**Durée :** 75 minutes

**Nombre de questions :** 4

**L'utilisation d'une calculatrice est permise.**

**Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme  $\pi + 1$  et  $\sqrt{2}$ , et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

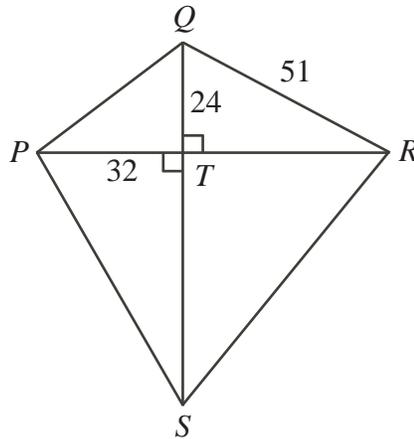
*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à l'adresse <http://www.cemc.uwaterloo.ca>.*

## REMARQUES

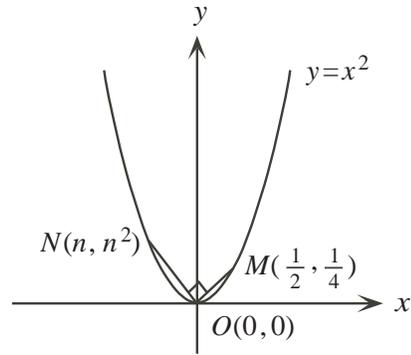
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier séparée pour rédiger un brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

1. On considère le quadrilatère  $PQRS$  suivant tel que  $QR = 51$ . Les diagonales de  $PQRS$  se coupent à angle droit au point  $T$  de manière que  $PT = 32$  et  $QT = 24$ .

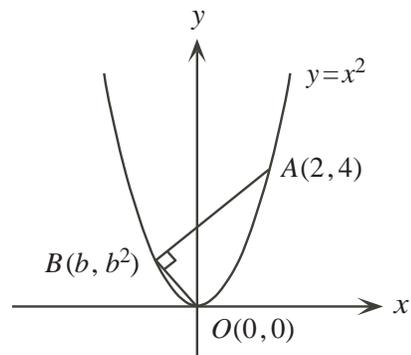


- (a)  Calculer la longueur de  $PQ$ .
- (b)  Calculer l'aire du triangle  $PQR$ .
- (c)  Déterminer le périmètre du quadrilatère  $PQRS$ , sachant que  $QS : PR = 12 : 11$ .
2.  (a) Déterminer la valeur de  $(a + b)^2$ , sachant que  $a^2 + b^2 = 24$  et  $ab = 6$ .
-  (b) Déterminer la valeur de  $xy$ , sachant que  $(x + y)^2 = 13$  et  $x^2 + y^2 = 7$ .
-  (c) Déterminer la valeur de  $jk$ , sachant que  $j + k = 6$  et  $j^2 + k^2 = 52$ .
-  (d) Déterminer les valeurs possibles de  $mn$ , sachant que  $m^2 + n^2 = 12$  et  $m^4 + n^4 = 136$ .

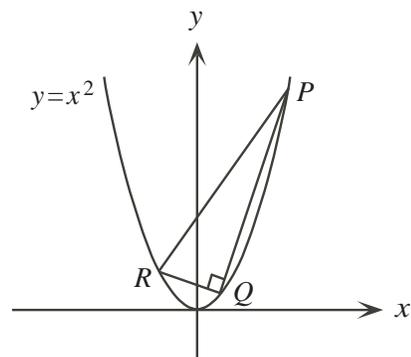
3.  (a) Dans la figure ci-contre, les points  $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  et  $N(n, n^2)$  sont situés sur la parabole d'équation  $y = x^2$ . Déterminer la valeur de  $n$  pour laquelle  $\angle MON = 90^\circ$ .



-  (b) Dans la figure ci-contre, les points  $A(2, 4)$  et  $B(b, b^2)$  sont les extrémités d'une corde de la parabole d'équation  $y = x^2$ . Déterminer la valeur de  $b$  pour laquelle  $\angle ABO = 90^\circ$ .



-  (c) Dans la figure ci-contre, le triangle rectangle  $PQR$  est inscrit sur la parabole d'équation  $y = x^2$ . Les points  $P, Q$  et  $R$  ont pour coordonnées respectives  $(p, p^2)$ ,  $(q, q^2)$  et  $(r, r^2)$ . Démontrer que  $2q + p + r = 0$ , sachant que  $p, q$  et  $r$  sont des entiers.



4. Les diviseurs positifs de 21 sont 1, 3, 7 et 21. Soit  $S(n)$  la somme des diviseurs positifs de  $n$ . Par exemple,  $S(21) = 1 + 3 + 7 + 21$ , c'est-à-dire que  $S(21) = 32$ .

-  (a) Sachant que  $p$  est un nombre premier impair, déterminer la valeur de  $p$  pour laquelle  $S(2p^2) = 2613$ .
-  (b) Les entiers consécutifs 14 et 15 sont tels que  $S(14) = S(15)$ . Déterminer tous les couples d'entiers consécutifs,  $m$  et  $n$ , pour lesquels  $m = 2p$  et  $n = 9q$ ,  $p$  et  $q$  étant des nombres premiers supérieurs à 3 et  $S(m) = S(n)$ .
-  (c) Déterminer le nombre de couples d'entiers premiers distincts,  $p$  et  $q$ , chacun inférieur à 30, pour lesquels  $S(p^3q)$  n'est pas divisible par 24.



## Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

### *Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2012!  
En 2011, plus de 13 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Fryer, Galois et Hypatie.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

### *Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2012/2013
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

**[www.cemc.uwaterloo.ca](http://www.cemc.uwaterloo.ca)**