Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2012

le jeudi 12 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le triangle ACP est rectangle en P. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 15^2 + 20^2$, ou $AC^2 = 625$, d'où $AC = 25$, puisque $AC > 0$.
La distance de A à C est de 25.

(b) Le triangle ABQ est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $39^2 = BA^2 + 15^2$, ou $BA^2 = 1521 - 225$, ou $BA^2 = 1296$. Donc $BA = \sqrt{1296}$, ou $BA = 36$, puisque $BA > 0$.
La distance de B à A est de 36.

(c) Le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, $BA^2 = BC^2 + AC^2$, ou $1296 = BC^2 + 625$, d'où $BC^2 = 671$. Donc $BC = \sqrt{671}$, puisque $BC > 0$, ou $BC \approx 25{,}904$.
Donc, la boule de Budan est à une distance de 25,904 du cochonnet.
Dans la partie (a), on a déterminé que la boule d'Adam est à une distance de 25 du cochonnet.
Donc, la boule d'Adam est le plus près du cochonnet.

2. (a) On obtient la moyenne de deux nombres en divisant leur somme par 2.
Donc, les moyennes des nombres, choisis deux à deux, sont :

$$\frac{25+5}{2} = \frac{30}{2} = 15,\ \frac{5+29}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ et } \frac{25+29}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

(b) La moyenne de 2 et de 6 est égale à $\frac{2+6}{2}$, ou 4.
Puisque 6 est supérieur à 2, la moyenne de 6 et de n est supérieure à la moyenne de 2 et de n. Donc, la moyenne de 6 et de n est 13 et la moyenne de 2 et de n est 11.
Donc $\frac{6+n}{2} = 13$, d'où $6 + n = 26$, ou $n = 20$.
On peut vérifier que la moyenne de 2 et de 20 est bien 11.

(c) Lorsqu'on additionne chaque nombre à la moyenne des deux autres nombres, on obtient :

$$2 + \frac{a+b}{2},\ a + \frac{2+b}{2},\ b + \frac{2+a}{2}$$

Pour déterminer les expressions qui correspondent aux résultats 14, 17 et 21, on doit placer les trois expressions en ordre croissant.
Puisque $2 < a < b$, alors $2 + (2 + a + b) < a + (2 + a + b) < b + (2 + a + b)$.
Donc $4 + a + b < 2a + 2 + b < 2b + 2 + a$.
On divise chaque membre par 2 pour obtenir $\frac{4+a+b}{2} < \frac{2a+2+b}{2} < \frac{2b+2+a}{2}$, ou $\frac{4}{2} + \frac{a+b}{2} < \frac{2a}{2} + \frac{2+b}{2} < \frac{2b}{2} + \frac{2+a}{2}$, ou $2 + \frac{a+b}{2} < a + \frac{2+b}{2} < b + \frac{2+a}{2}$.
Ces trois expressions, dans l'ordre, correspondent donc à 14, 17 et 21.
Donc $2 + \frac{a+b}{2} = 14$ et $b + \frac{2+a}{2} = 21$.
On résout le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$2 + \frac{a+b}{2} = 14 \qquad (1)$$

$$b + \frac{2+a}{2} = 21 \qquad (2)$$

On multiplie chaque membre de chaque équation par 2 pour obtenir :

$$4 + a + b = 28 \qquad (3)$$

$$2b + 2 + a = 42 \qquad (4)$$

On simplifie pour obtenir :

$$\begin{aligned} a+b &= 24 && (5)\\ a+2b &= 40 && (6) \end{aligned}$$

On soustrait l'équation (5) de l'équation (6), membre par membre, pour obtenir $b = 16$.
On reporte $b = 16$ dans l'équation (5) pour obtenir $a + 16 = 24$, d'où $a = 8$.
(On reporte $a = 8$ et $b = 16$ dans la troisième expression $a + \dfrac{2+b}{2}$ pour vérifier que l'on obtient 17.)

3. (a) Puisque la droite a pour pente $m = -3$, elle a une équation de la forme $y = -3x + b$, b étant son ordonnée à l'origine. Puisque la droite passe au point $(2, 6)$, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite. On reporte $x = 2$ et $y = 6$ dans l'équation pour obtenir $6 = -3(2) + b$, d'où $b = 12$.
L'équation de la droite est donc $y = -3x + 12$ et la droite a donc une ordonnée à l'origine de 12.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine, on pose $y = 0$.
Donc $0 = -3x + 12$, ou $3x = 12$, ou $x = 4$. La droite a donc une abscisse à l'origine de 4.

(b) Puisque la pente a pour pente m, elle a une équation de la forme $y = mx + b$, b étant son ordonnée à l'origine.
Puisque la droite passe au point $(2, 6)$, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite. On reporte $x = 2$ et $y = 6$ dans l'équation pour obtenir $6 = 2m + b$. Donc $b = 6 - 2m$.
La droite a donc pour ordonnée à l'origine $6 - 2m$ et son équation est $y = mx + (6 - 2m)$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine, on pose $x = 0$.
Donc $0 = mx + (6 - 2m)$, ou $mx = 2m - 6$, ou $x = \dfrac{2m-6}{m}$.
Donc, la droite a pour abscisse à l'origine $2 - \dfrac{6}{m}$. (Il faut que $m \neq 0$, autrement la droite serait horizontale et n'aurait aucune abscisse à l'origine.)

(c) D'après la partie (b), la droite a pour abscisse à l'origine $2 - \dfrac{6}{m}$ et pour ordonnée à l'origine $6 - 2m$. (Il faut que $m \neq 0$, autrement la droite serait horizontale et n'aurait aucune abscisse à l'origine.)
Puisque la droite coupe la partie positive de l'axe des abscisses en P, l'abscisse à l'origine $2 - \dfrac{6}{m}$ correspond à l'abscisse de P.
Puisque la droite coupe la partie positive de l'axe des ordonnées en Q, l'ordonnée à l'origine $6 - 2m$ correspond à l'ordonnée de Q. Donc $OP = 2 - \dfrac{6}{m}$ et $OQ = 6 - 2m$.
L'aire du triangle POQ est égale à $\dfrac{1}{2}(OP)(OQ)$, ou $\dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{6}{m}\right)(6 - 2m)$.
Puisque le triangle a une aire de 25, alors $\dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{6}{m}\right)(6 - 2m) = 25$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(2 - \frac{6}{m}\right)(6-2m) &= 25\\ \left(2 - \frac{6}{m}\right)(6-2m) &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2m-6)(6-2m) &= 50m\\ 12m-4m^2-36+12m &= 50m\\ 4m^2+26m+36 &= 0\\ 2m^2+13m+18 &= 0\\ (2m+9)(m+2) &= 0\end{aligned}$$

Donc $m = -\frac{9}{2}$ ou $m = -2$.
Puisque P et Q doivent être situés sur la partie positive des axes, on doit vérifier que $2 - \frac{6}{m} > 0$ et $6 - 2m > 0$.
Lorsque $m = -\frac{9}{2}$, on a $2-\frac{6}{m} = 2+\frac{6}{\frac{9}{2}}$, ce qui est supérieur à 0. On a aussi $6-2m = 6+2(\frac{9}{2})$, ce qui est supérieur à 0.
Lorsque $m = -2$, on a $2-\frac{6}{m} = 2+\frac{6}{2}$, ce qui est supérieur à 0. On a aussi $6-2m = 6+2(2)$, ce qui est supérieur à 0.
Donc, les deux valeurs de m qui répondent aux conditions du problème sont $m = -\frac{9}{2}$ et $m = -2$.

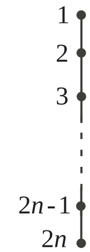
Remarque : Si on élimine la condition que P et Q doivent être situés sur la partie *positive* des axes, il y a deux autres valeurs de m pour lesquelles le triangle POQ admet une aire de 25. Quelles sont-elles ?

4. (a) Soit P le point de rencontre qui minimisera la distance totale que les élèves devront parcourir. Soit A, B, C, D et E les positions initiales de Abe, Bo, Carla, Denise et Ernie.

Si P était situé à l'ouest (à la gauche) de A, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au point A.
De même, si P était situé à l'est (à la droite) de E, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au point E.
Donc, P doit être situé sur la rue est-ouest, entre A et E inclusivement.
Pour minimiser la distance totale parcourue par les élèves, il faut minimiser $AP + BP + CP + DP + EP$.
Or, quelle que soit la position de P, de A à E, on a $AP + EP = 14$, puisque les segments AP et PE forment la rue au complet de A à E.
Donc, il reste à minimiser $BP + CP + DP$.
Si P était situé à l'ouest (à la gauche) de B (toujours sans dépasser A), il faudrait que Bo, Carla et Denise marchent plus loin jusqu'à P que si P était situé au point B.
De même, si P était situé à l'est (à la droite) de D, il faudrait que Bo, Carla et Denise marchent plus loin jusqu'à P que si P était situé au point D.
Donc, P doit être situé sur la rue est-ouest, entre B et D inclusivement.
Or, quelle que soit la position de P, de B à D, on a $BP + DP = 6$.
Il reste donc à minimiser CP, ce qu'on réussit à faire en plaçant P au point C, ce qui donne $CP = 0$.

La distance minimale que les élèves doivent parcourir est donc de 14+6, ou 20. On l'obtient lorsque les élèves se réunissent au point C, soit la position initiale de Carla.

(b) Soit $2n$ le nombre d'élèves (puisque ce nombre est pair).
Soit P le point de rencontre qui minimisera la distance totale que les élèves devront parcourir.
On nomme par un nombre de 1 à $2n$ les élèves et leur carrefour initial, en ordre du nord au sud.



Comme dans la partie (a), si P était situé au nord de l'élève 1, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au carrefour 1.
De même, si P était situé au sud de l'élève $2n$, il faudrait que chaque élève marche plus loin jusqu'à P que si P était situé au carrefour $2n$.
Donc, P doit être situé sur la rue nord-sud à un endroit entre le carrefour 1 et le carrefour $2n$ inclusivement.
Or, quelle que soit la position de P, entre ces deux carrefours, la distance totale parcourue par l'élève 1 et l'élève $2n$ est constante (elle est égale à la distance entre le carrefour 1 et le carrefour $2n$).
Donc pour minimiser la distance parcourue par tous les élèves, il faut minimiser la distance parcourue par les élèves $2, 3, 4, \ldots, (2n-1)$.

De même, on peut conclure que P doit être situé entre l'élève 2 et l'élève $(2n-1)$ inclusivement et que le cas échéant, quelle que soit sa position, la distance totale parcourue par l'élève 2 et l'élève $(2n-1)$ est constante (elle est égale à la distance entre le carrefour 2 et le carrefour $(2n-1)$).
Donc pour minimiser la distance parcourue par tous les élèves, il faut minimiser la distance parcourue par les élèves $3, 4, 5, \ldots, (2n-2)$.

On continue de la même manière, en concluant que P doit être situé entre le carrefour 3 et le carrefour $(2n-2)$ inclusivement, puis entre le carrefour 4 et le carrefour $(2n-3)$ inclusivement, entre le carrefour 5 et le carrefour $(2n-4)$ inclusivement, et ainsi de suite.
Éventuellement, on conclut que le point P doit être situé entre les deux carrefours du milieu, soit entre le carrefour n et le carrefour $(n+1)$ inclusivement. (À noter qu'il y a $(n-1)$ carrefours au nord du carrefour n et $(n-1)$ carrefours au sud du carrefour $(n+1)$).
Quelle que soit la position de P entre les deux carrefours du milieu inclusivement, la distance totale parcourue par l'élève n et l'élève $(n+1)$ est constante (elle est égale à la distance entre le carrefour n et le carrefour $(n+1)$).
Donc, pour minimiser la distance totale que les élèves devront parcourir, il faut que les élèves se rencontrent à n'importe quel endroit entre le carrefour n et le carrefour $(n+1)$ inclusivement.

(c) Puisque les élèves peuvent seulement se déplacer le long des rues, la distance totale qu'ils parcourent est égale à la somme des distances parcourues en direction est-ouest et des distances parcourues en direction nord-sud.
À noter que si un élève doit se déplacer 5 km vers l'est et 4 km vers le nord, il peut emprunter plusieurs parcours pour le faire. Or quel que soit le parcours, la distance totale parcourue sera de 9 km, soit 5 km vers l'est et 4 km vers le nord.
Il faut donc retenir que la distance parcourue en direction est-ouest est indépendante de celle parcourue en direction nord-sud. On peut donc minimiser les distances en direction est-ouest et les distances en direction nord-sud indépendamment les unes des autres. À noter que cela est vrai si les distances sont minimisées dans les deux directions à partir d'un même point, ce qui est le cas.
Cela nous permet de traiter le problème en deux parties.

Dans la partie 1, on déterminera l'endroit (une abscisse) qui minimisera la distance que les élèves doivent parcourir horizontalement.
Dans la partie 2, on déterminera l'endroit (une ordonnée) qui minimisera la distance que les élèves doivent parcourir verticalement.
On combinera ensuite ces résultats pour déterminer l'endroit qui minimisera les deux directions.

Partie 1
Puisqu'on cherche à minimiser la distance totale parcourue horizontalement par les 100 élèves, il suffit de considérer leurs positions de départ est-ouest, c'est-à-dire leurs abscisses.
Les 50 premiers élèves ont pour abscisses respectives $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^{49}, 2^{50}$.
Les élèves numérotés de 51 à 100 ont pour abscisses respectives $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 49, 50$.
Pour déterminer l'endroit qui minimisera la distance parcourue horizontalement, on procède comme dans la partie (b). On place les abscisses en ordre croissant et on détermine les deux abscisses au milieu.
Puisqu'il y a 100 abscisses, on cherche la 50e et la 51e.
Dans la liste $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^{49}, 2^{50}$, il y a 5 nombres inférieurs à 45.
Ces 5 nombres, soit $2, 4, 8, 16$ et 32, de même que les 44 nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 44$ de la deuxième liste, forment les 49 premiers nombres de l'ensemble ordonné.
Le 50e nombre est donc 45 et le 51e nombre est 46.
Ces abscisses minimisent la distance totale parcourue horizontalement par les 100 élèves.

Partie 2
Puisqu'on cherche à minimiser la distance totale parcourue verticalement par les 100 élèves, il suffit de considérer leurs positions de départ nord-sud, c'est-à-dire leurs ordonnées.
Les 50 premiers élèves ont pour ordonnées respectives $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 49, 50$. Les élèves numérotés de 51 à 100 ont pour ordonnées respectives, $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 98, 100$.
Pour déterminer l'endroit qui minimisera la distance parcourue verticalement, on procède comme dans la partie (b)). On place les ordonnées en ordre croissant et on détermine les deux ordonnées au milieu.
Puisqu'il y a 100 ordonnées, on cherche la 50e et la 51e.
Il y a 49 nombres qui sont inférieurs ou égaux à 33 (il y en a 33 dans la première liste et 16 dans la deuxième).
Donc, les 50e et 51e nombres égalent chacun 34 (puisque le nombre 34 parait dans chaque liste).
Puisque les 50e et 51e nombres égalent chacun 34, il n'y a qu'une position verticale qui minimisera la distance totale parcourue par les 100 élèves verticalement.

La distance totale parcourue horizontalement est minimisée lorsque $x = 45$ ou $x = 46$ et la distance totale parcourue verticalement est minimisée lorsque $y = 34$.
Donc, les élèves peuvent se rencontrer aux carrefours $(45, 34)$ ou $(46, 34)$.