Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
*www.cemc.uwaterloo.ca*

# *Concours Fryer 2012*

**le jeudi 12 avril 2012**
**(Amérique du Nord et Amérique du Sud)**

**le vendredi 13 avril 2012**
**(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)**

*Solutions*

1. (a) Puisque $\frac{1008}{5600} = 0{,}18 = \frac{18}{100} = 18\,\%$, le candidat a reçu 18 % de tous les votes.

   (b) *Solution 1*
   Puisque $\frac{3}{5} = 0{,}60 = \frac{60}{100} = 60\,\%$, le candidat B a reçu 60 % de tous les votes.
   Puisque les candidats C et D sont arrivés deuxièmes en obtenant un même nombre de votes, ils ont partagé également les autres votes, soit 40 % de tous les votes, car $100\,\% - 60\,\% = 40\,\%$.
   Donc, le candidat C a reçu la moitié de 40 % des votes, c'est-à-dire 20 % des votes.

   *Solution 2*
   Puisque le candidat B a reçu $\frac{3}{5}$ des votes et que $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, les candidats C et D ont partagé $\frac{2}{5}$ des votes. Or, ceux-ci ont obtenu le même nombre de votes, soit la moitié de $\frac{2}{5}$ des votes, ou $\frac{1}{5}$ des votes. Puisque $\frac{1}{5}$ de 100 % est égal à 20 %, le candidat C a reçu 20 % des votes.

   (c) *Solution 1*
   À 22 h 00, on avait compté 90 % de 6000 votes, c.-à-d. $\frac{90}{100} \times 6000$ votes, ou 5400 votes.
   Le candidat E a reçu 53 % de ces 5400 votes. À 22 h 00, le candidat E avait donc reçu $\frac{53}{100} \times 5400$ votes, ou 2862 votes.
   Puisqu'il n'y avait que deux candidats et que $5400 - 2862 = 2538$, le candidat F a reçu les 2538 votes qui restaient. Puisque $2862 - 2538 = 324$, le candidat E avait reçu 324 votes de plus que le candidat F.

   *Solution 2*
   À 22 h 00, on avait compté 90 % de 6000 votes, c.-à-d. $\frac{90}{100} \times 6000$ votes, ou 5400 votes.
   Le candidat E a reçu 53 % de ces 5400 votes.
   Puisqu'il n'y avait que deux candidats, le candidat F a donc reçu 47 % des votes, puisque $100\,\% - 53\,\% = 47\,\%$.
   Puisque $53\,\% - 47\,\% = 6\,\%$, le candidat E a reçu 6 % des votes de plus que le candidat F.
   Puisqu'on avait compté 5400 votes à 22 h 00 et que 6 % de 5400 est égal à 324, le candidat E avait reçu 324 votes de plus que le candidat F.

   (d) Le candidat H a reçu 40 % des votes et le candidat J a reçu 35 % des votes.
   Puisque $100\,\% - 40\,\% - 35\,\% = 25\,\%$, le seul autre candidat, G, a reçu 25 % des votes.
   Puisque G a reçu 2000 votes et que cela représente 25 % de tous les votes, alors le nombre total des votes est égal à $4 \times 2000$, ou 8000 (puisque $4 \times 25\,\% = 100\,\%$).
   Le candidat H a donc reçu 40 % de 8000 votes, c.-à-d. $\frac{40}{100} \times 8000$ votes, ou 3200 votes.

2. (a) On a $112 = 2 \times 56 = 2 \times 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$.
   Donc, la factorisation première de 112 est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$, ou $2^4 \times 7$.

   (b) Dans la factorisation première d'un carré parfait, chacun des facteurs premiers parait un nombre pair de fois, car on doit pouvoir les répartir également pour créer deux facteurs égaux. (Par exemple, le nombre 22 500, qui est égal à $150^2$, est égal à $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ en factorisation première. Puisque le facteur 2 parait 4 fois, que le facteur 3 parait 2 fois et que le facteur 5 parait 2 fois, on peut répartir les facteurs également dans deux parenthèses et écrire $22\,500 = (2^2 \times 3 \times 5) \times (2^2 \times 3 \times 5)$, ce qui est équivalent à $22\,500 = 150 \times 150$.)

   D'après la partie (a), la factorisation première de 112 est $2^4 \times 7$.
   On cherche la plus petite valeur entière de $u$ pour laquellle $112 \times u$, ou $2^4 \times 7 \times u$, est un carré parfait. Le facteur premier 2 parait un nombre pair de fois (quatre fois) dans la factorisation première de 112, alors que le facteur premier 7 ne parait qu'une fois. Si on essaie de partager également les facteurs premiers de 112 en deux parenthèses, on ne peut obtenir que $112 = (2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 2)$.

On voit qu'il suffit d'ajouter un autre facteur 7 dans la deuxième parenthèse pour que le nombre $2^4 \times 7 \times u$ soit un carré parfait.
Donc, la plus petite valeur possible de $u$ pour laquelle $112 \times u$ est un carré parfait est 7 :

$$112 \times u = [(2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 2)] \times 7 = (2 \times 2 \times 7) \times (2 \times 2 \times 7) = (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7)$$

(c) Puisque $5632 = 512 \times 11$ et que $512 = 2^9$, alors la factorisation première de 5632 est $2^9 \times 11$. Dans la factorisation première d'un carré parfait, chaque facteur premier parait un nombre pair de fois. Or dans la factorisation première de 5632, le facteur 2 parait 9 fois et le facteur 11 parait 1 fois. Si on essaie de partager également les facteurs premiers de 5632 en deux parenthèses, on ne peut obtenir que $5632 = (2^5 \times 11) \times (2^4)$.
Pour obtenir un carré parfait, il suffit d'ajouter un facteur 2 et un facteur 11 dans la deuxième parenthèse. Donc, la plus petite valeur possible de $v$ pour laquelle $5632 \times v$, ou $2^9 \times 11 \times v$, est un carré parfait est $2 \times 11$, ou 22 :

$$5632 \times v = [(2^5 \times 11) \times (2^4)] \times 2 \times 7 = (2^5 \times 11) \times (2^4 \times 2 \times 11) = (2^5 \times 11) \times (2^5 \times 11).$$

(d) Dans la factorisation première d'un cube parfait, le nombre de fois que chaque facteur premier parait doit être un multiple de 3, de manière que les facteurs puissent être répartis également dans trois parenthèses. (Par exemple, le nombre 1728, qui est égal à $12^3$, est égal à $2^6 \times 3^3$ en factorisation première. Puisque le facteur 2 parait 6 fois et que le facteur 3 parait 3 fois, 6 et 3 étant des multiples de 3, on peut les répartir également dans trois parenthèses et écrire $1728 = (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3)$, ce qui est équivaleut à $1728 = 12 \times 12 \times 12$.)
D'après la partie (a), la factorisation première de 112 est $2^4 \times 7$. Or le facteur 2 parait 4 fois et le facteur 7 parait 1 fois. Si on essaie de partager également les facteurs premiers de 112 en trois parenthèses, on ne peut obtenir que $112 = (2^2 \times 7) \times (2) \times (2)$.
Pour obtenir un cube parfait, il suffit donc d'ajouter un facteur 2 et un facteur 7 à chacune des 2^e^ et 3^e^ parenthèses. Donc, la plus petite valeur entière de $w$ pour laquelle $112 \times w$, ou $2^4 \times 7 \times w$, est un cube parfait est $2^2 \times 7^2$, ou 196 :

$$112 \times w = [(2^2 \times 7) \times (2) \times (2)] \times 2^2 \times 7^2 = (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7) \times (2^2 \times 7).$$

3. (a) La première rangée contient les entiers de 1 à 6.
Chacune des rangées suivantes contient les six entiers qui suivent le plus grand entier de la rangée précédente. Donc, le plus grand entier de n'importe quelle rangée est égal à 6 fois le numéro de la rangée.
Ainsi le plus grand entier de la rangée 30 est égal à $6 \times 30$, ou 180.

(b) D'après l'argument utilisé dans la partie (a), le plus grand entier de la rangée 2012 est égal à $6 \times 2012$, ou 12 072.
On trouve les autres entiers de la rangée en comptant à rebours.
Donc, les six entiers de la rangée 2012 sont 12 072, 12 071, 12 070, 12 069, 12 068 et 12 067.
La somme des six entiers de la rangée 2012 est donc égale à :

$$12\,072 + 12\,071 + 12\,070 + 12\,069 + 12\,068 + 12\,067 = 72\,417$$

(c) D'après l'argument utilisé dans la partie (a), le plus grand entier d'une rangée est égal à 6 fois le numéro de la rangée.
Pour déterminer le numéro de la rangée dans laquelle le nombre 5000 parait, on divise d'abord 5000 par 6. Puisque $5000 \div 6 = 833\frac{1}{3}$ et que $6 \times 833 = 4998$, alors le plus grand entier de la rangée 833 est 4998.
Donc, la rangée 834 contient les six entiers suivants, de 4999 à 5004.

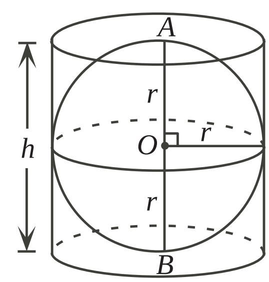
(On peut vérifier que $6 \times 834 = 5004$.)
Donc, le nombre 5000 parait dans la rangée 834.
On sait que dans les rangées paires, les six entiers sont placés en ordre décroissant, de la colonne A jusqu'à la colonne F.
Puisque la rangée 834 est paire, les nombres de la rangée sont, dans l'ordre, 5004, 5003, 5002, 5001, 5000 et 4999, le nombre 5004 étant dans la colonne A.
Donc, le nombre 5000 est dans la rangée 834, colonne E.

(d) Le plus grand entier de la rangée $r$ est égal à $6 \times r$, ou $6r$.
Puisque la rangée comprend six entiers consécutifs, on compte à rebours pour conclure que les cinq autres entiers de la rangée sont $6r - 1$, $6r - 2$, $6r - 3$, $6r - 4$ et $6r - 5$.
La somme des entiers de la rangée $r$ est donc égale à :

$$6r + (6r - 1) + (6r - 2) + (6r - 3) + (6r - 4) + (6r - 5) = 36r - 15$$

On veut que la somme soit supérieure à 10 000. On veut donc que $36r - 15 > 10\,000$, ou $36r > 10\,015$, ou $r > \frac{10\,015}{36}$, ou $r > 278\frac{7}{36}$.
Puisque le numéro $r$ de la rangée est un entier, il faut donc que $r \geq 279$.
Or, on veut aussi que la somme soit inférieure à 20 000.
On veut donc que $36r - 15 < 20\,000$, ou $36r < 20\,015$, ou $r < \frac{20\,015}{36}$, ou $r < 555\frac{35}{36}$.
Puisque le numéro $r$ de la rangée est un entier, il faut donc que $r \leq 555$.
Donc, les rangées dans lesquelles la somme des six nombres est supérieure à 10 000 et inférieure à 20 000 sont les nombres 279, 280, 281, ..., 555.
Le nombre de rangées qui vérifient la condition est égal à $555 - 278$ (ou $555 - 279 + 1$), ou 277.

4. (a) D'après la description, la hauteur du cylindre correspond au diamètre de la sphère, c'est-à-dire à 2 fois son rayon. On a donc $h = 2r$. (On le voit bien dans la figure ci-contre. Le point $A$ est situé sur la sphère, directement au-dessus du centre $O$ de la sphère. De même, le point $B$ est situé directement au-dessous de $O$. Le dessus et le dessous du cylindre touchent la sphère aux points respectifs $A$ et $B$. Le segment $AB$ passe par le centre de la sphère. Il s'agit donc d'un diamètre. Puisque $OA$ est un rayon, il a pour longueur $r$. Donc, le diamètre $AB$ a pour longueur $2r$. Or, le segment $AB$ est perpendiculaire aux deux extrémités du cylindre. Il a donc une longueur de $h$. Donc $h = 2r$. )




(b) *Solution 1*
On considère un cône ayant le même diamètre et la même hauteur que le cylindre. D'après la relation d'Archimède, le volume du cône est un tiers du volume du cylindre et la moitié du volume de la sphère. Son volume est donc égal à la moitié de $288\pi$, ou $144\pi$.
Le volume du cylindre est égal à 3 fois le volume de ce cône. Il est donc égal à $3 \times 144\pi$, ou $432\pi$.

*Solution 2*
Le volume d'une sphère peut être calculé à partir de la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Puisque la sphère a un volume de $288\pi$, on a donc $\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$, ou $4\pi r^3 = 3 \times 288\pi$, d'où $r^3 = \frac{3 \times 288\pi}{4\pi} = 216$.
Or le volume du cylindre est égal à $\pi r^2 h$. D'après la partie (a), $h = 2r$.
Le volume du cylindre est donc égal à $\pi r^2 h$, ou $\pi r^2(2r)$, ou $2\pi r^3$. Puisque $r^3 = 216$, le volume du cylindre est égal à $2\pi(216)$, ou $432\pi$.

(c) L'espace dans lequel Darla peut se déplacer est limité par les points qui sont situés à 1 km du point le plus près sur le cube.
Or, on peut considérer trois sortes de points sur un cube, soit les sommets, les points qui sont sur des arêtes (à l'exception des sommets) et les points sur les six faces du cube (à l'exception des points sur les arêtes).
Pour déterminer le volume de l'espace dans lequel Darla peut se déplacer, on considère trois cas, selon ces trois sortes de points.

*1er cas - Points sur une face du cube (à l'exception de ceux sur les arêtes)*
Si Darla est à un tel point sur une face du cube, elle peut se déplacer jusqu'à 1 km de ce point.
Le point le plus éloigné du cube, à partir de ce point, est un point qui est à 1 km du cube, mesuré perpendiculairement à la face du cube.
Si elle se déplace de cette façon à partir de chaque point sur la même face du cube, elle peut occuper un espace qui a la forme d'un cube ayant une longueur d'arête de 1 km.
Ce cube s'étend à l'extérieur du cube initial.
On peut recommencer pour chacune des 6 faces du cube. Darla peut donc occuper un espace ayant un volume de $6 \times 1 \times 1 \times 1$ km$^3$, ou 6 km$^3$, comme on le voit dans la figure 1.

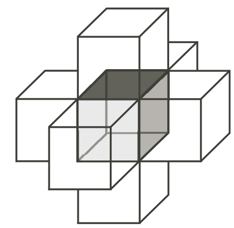


Figure 1

*2e cas - Points sur une arête du cube (à l'exception des sommets)*
On considère le point $A$ situé au milieu d'une arête. Soit $B$ et $C$ les milieux respectifs de deux arêtes, comme dans la figure 2.
Darla peut se déplacer jusqu'aux points $B$ et $C$, puisque $A$ est sur le cube initial et qu'il est à 1 km de chacun de ces points. De plus, Darla peut aussi se déplacer de $A$ jusqu'à n'importe quel point sur l'arc $BC$ de centre $A$. Cet arc est un quart de cercle de centre $A$. Il a un rayon de 1 km et il passe aux points $B$ et $C$ (puisque $\angle BAC = 90°$).
Darla peut répéter ces déplacements à partir de n'importe quel point autre que $A$ sur la même arête. L'espace qu'elle occupe est un quart d'un cylindre ayant un rayon de 1 km et une hauteur de 1 km. Il a donc un volume de $\frac{1}{4}\pi(1)^2(1)$ km$^3$, ou $\frac{1}{4}\pi$ km$^3$ (voir la figure 3).
Or, Darla peut faire de même à partir de n'importe quelle des 12 arêtes du cube initial. Le volume total de l'espace qu'elle peut occuper, dans ce 2e cas, est de $12 \times \frac{1}{4}\pi$ km$^3$, ou $3\pi$ km$^3$. L'espace est indiqué dans la figure 4.

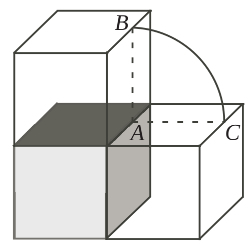


Figure 2

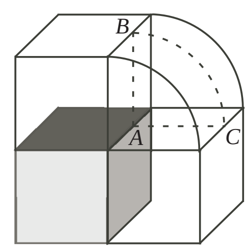


Figure 3

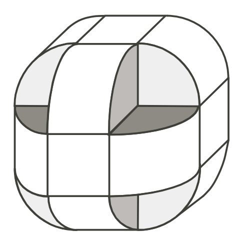


Figure 4

*3e cas - Points qui correspondent aux sommets du cube.*
On considère un sommet $P$ du cube initial.
Soit $Q$, $R$ et $S$ des sommets de trois cubes externes, comme dans la figure 5.
Darla peut se déplacer jusqu'à n'importe quels de ces points, puisqu'ils sont à 1 km de $P$.
D'après le 2e cas, Darla peut aussi se déplacer sur les arcs $QR$, $RS$ et $SQ$. Or, Darla peut aussi se déplacer dans l'espace entre les quarts de disques $PQR$, $PRS$ et $PSQ$, jusqu'à une distance de 1 km du point $P$.
Puisque $\angle SPQ = \angle SPR = \angle QPR = 90°$, cet espace est délimité par une surface qui est un huitième d'une sphère de centre $P$, dont le rayon mesure 1 km (voir la figure 5).
Cet espace a un volume de $\frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi(1)^3$ km$^3$, ou $\frac{1}{6}\pi$ km$^3$.
On peut recommencer à chacun des 8 sommets du cube initial.
Donc, l'espace dans lequel Darla peut se déplacer, dans ce cas, a un volume de $8 \times \frac{1}{6}\pi$ km$^3$, ou $\frac{4}{3}\pi$ km$^3$. L'espace est indiqué dans la figure 6.

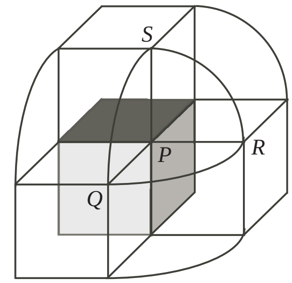


Figure 5

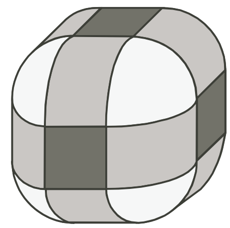


Figure 6

Le volume total de l'espace dans lequel Darla peut se déplacer est égal à la somme des volumes dans les trois cas précédents.
Il est égal à $(6 + 3\pi + \frac{4}{3}\pi)$ km$^3$, ou $(6 + \frac{13\pi}{3})$ km$^3$.