Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2012

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 23 février 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 24 février 2012

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $\frac{60}{8} = 60 \div 8 = 7{,}5$, ce choix de réponse n'est pas un entier.
On remarque les autres choix sont des entiers : $\frac{60}{12} = 5$, $\frac{60}{5} = 12$, $\frac{60}{4} = 15$ ey $\frac{60}{3} = 20$

Réponse : (B)

2. On simplifie le membre de gauche pour obtenir $5 = 6 - x$, d'où $x = 1$.

Réponse : (C)

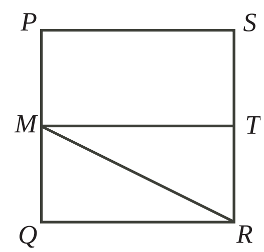
3. Puisque l'angle JFG est plat, alors $\angle HFG = 180° - \angle HFJ$, d'où $\angle HFG = 180° - 110°$, ou $\angle HFG = 70°$.
Puisque le triangle FGH est isocèle et que $HF = HG$, alors $\angle HGF = \angle HFG = 70°$.
Puisque les mesures d'angles du triangle FGH ont une somme de 180°, alors $70°+70°+x° = 180°$, d'où $140 + x = 180$, ou $x = 40$.

Réponse : (E)

4. On simplifie d'abord les parenthèses : $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) = (\frac{4}{3})(\frac{5}{4}) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

Réponse : (A)

5. *Solution 1*
Au point M, on trace un segment MT parallèle à QR jusqu'au point T sur SR. Donc, $MTRQ$ est un rectangle. L'aire du triangle MQR est donc la moitié de celle du rectangle $MTRQ$.
Donc, l'aire du rectangle $MTRQ$ est égale à 2×100, ou 200.
Puisque M est le milieu de PQ et que $PQRS$ est un carré, alors T est le milieu de SR.
Donc, l'aire de $MTRQ$ est la moitié de celle de $PQRS$.
Donc, l'aire du carré $PQRS$ est égale à 2×200, ou 400.



Solution 2
Soit $2x$ la longueur d'un côté du carré $PQRS$.
Puisque M est le milieu de PQ, alors $MQ = \frac{1}{2}(2x)$, ou $MQ = x$.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors le triangle MQR est rectangle en Q.
L'aire du triangle MQR est donc égale à $\frac{1}{2}(MQ)(QR)$, ou $\frac{1}{2}(x)(2x)$, ou x^2.
Puisque le triangle MQR a une aire de 100, alors $x^2 = 100$, d'où $x = 10$, car $x > 0$.
Puisque les côtés du carré $PQRS$ ont une longueur de $2x$ et que $2x = 20$, le carré $PQRS$ a une aire de 20^2, ou 400.

Réponse : (D)

6. Supposons que Jean a mangé x arachides le 4e soir.
Puisque chaque soir il a mangé 6 arachides de plus que le soir précédent, il a mangé $x - 6$ arachides le 3e soir, $x - 12$ arachides le 2e soir (car$(x - 6) - 6 = x - 12$) et $x - 18$ arachides le 1er soir (car $(x - 12) - 6 = x - 18$) .
Puisqu'il a mangé 120 arachides en tout, alors $x + (x - 6) + (x - 12) + (x - 18) = 120$, d'où $4x - 36 = 120$, ou $4x = 156$, ou $x = 39$.
Donc, Jean a mangé 39 arachides le 4e soir.

Réponse : (B)

7. Soit x la longueur de chaque côté des carrés identiques. Donc $PS = QR = x$ et $PQ = SR = 5x$.
Puisque le rectangle $PQRS$ a un périmètre de 48, alors $5x + x + 5x + x = 48$, d'où $12x = 48$, ou $x = 4$.
Donc $PS = QR = 4$ et $PQ = SR = 5 \cdot 4 = 20$.
Le rectangle $PQRS$ a donc une aire de $20 \cdot 4$, ou 80.

Réponse : (C)

8. Puisque $v = 3x$ et $x = 2$, alors $v = 3 \cdot 2$, ou $v = 6$.
Donc : $(2v - 5) - (2x - 5) = (2 \cdot 6 - 5) - (2 \cdot 2 - 5) = 7 - (-1) = 8$

Réponse : (B)

9. Soit s cm la taille initiale de Sylvie.
Puisque Sylvie a gandi de 20 %, sa taille actuelle est de 1,2s cm.
Puisque Sylvie mesure maintenant 180 cm, alors $1{,}2s = 180$, d'où $s = \frac{180}{1{,}2}$, ou $s = 150$.
Donc, Sylvie a grandi de 30 cm (car $180 - 150 = 30$).
Puisque l'augmentation de la taille de Marie est la moitié de celle de Sylvie, alors sa taille a augmenté de $\frac{1}{2} \cdot 30$ cm, ou 15 cm.
Puisque Marie et Sylvie avaient la même taille au départ, soit 150 cm, la taille actuelle de Marie est de 165 cm (car $150 + 15 = 165$).

Réponse : (B)

10. Puisque $(2^a)(2^b) = 64$, alors selon une loi des exposants, on a $2^{a+b} = 64$.
Puisque $64 = 2^6$, alors en comparant à l'équation précédente, on a $a + b = 6$.
Donc, la moyenne de a et de b est égale à $\frac{1}{2}(a + b)$, ou $\frac{1}{2}(6)$, ou 3.

Réponse : (D)

11. Puisque N est divisible par 5 et par 11, il est divisible par 5×11, ou 55, car 5 et 11 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1.
On cherche donc un multiple impair de 55 entre 400 et 600.
Pour le trouver, on peut utiliser un multiple connu de 55 dans cet intervalle, par exemple 550. Il s'agit d'un multiple pair.
On peut ensuite ajouter ou soustraire 55 de ce nombre et obtenir un autre multiple de 55.
Or $550 + 55 = 605$, ce qui donne un multiple impair à l'extérieur de l'intervalle.
On calcule $550 - 55 = 495$ et on obtient un multiple impair dans l'intervalle.
L'énoncé nous dit qu'il n'y a qu'un multiple impair de 55 dans l'intervalle. Donc $N = 495$.
La somme des chiffres de N est égale à $4 + 9 + 5$, ou 18.

Réponse : (E)

12. Puisque les triangles QUR et SUR sont équilatéraux, alors $\angle QUR = \angle SUR = 60°$.
Puisque $QU = PU = TU = SU$ et que $QP = PT = TS$, alors les triangles QUP, PUT et TUS sont isométriques.
Donc $\angle QUP = \angle PUT = \angle TUS$.
Les angles autour du point U forment un angle plein, c'est-à-dire de 360°.
Donc $\angle SUR + \angle QUR + \angle QUP + \angle PUT + \angle TUS = 360°$, d'où $60° + 60° + 3\angle TUS = 360°$, ou $3\angle TUS = 240°$, ou $\angle TUS = 80°$.
Puisque le triangle TUS est isocèle et que $TU = SU$, alors $\angle UST = \angle UTS$.
Puisque les mesures d'angles du triangle TUS ont une somme de 180°, alors
$\angle TUS + \angle UST + \angle UTS = 180°$.
Donc $80° + 2\angle UST = 180°$, d'où $2\angle UST = 100°$, ou $\angle UST = 50°$.

Réponse : (A)

13. La courtepointe est formée de 25 carrés identiques.
On voit que 4 des 25 carrés sont entièrement ombrés, 8 contiennent un triangle ombré qui couvre la moitié du carré et 4 contiennent deux petits triangles qui couvrent chacun un quart d'un carré.
Cela est égal à un nombre équivalent de carrés ombrés, soit $4 + 8 \times \frac{1}{2} + 4 \times 2 \times \frac{1}{4}$, ou 10.
Pour obtenir le pourcentage de la courtepointe qui est ombrée, on a $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\,\%$.
Donc, 40 % de la courtepointe est ombrée.

Réponse : (B)

14. *Solution 1*
Puisque les deux termes ont un facteur commun, on peut écrire $(x-2)((x-4)+(x-6))=0$, d'où $(x-2)(2x-10)=0$.
Donc $x-2=0$ (d'où $x=2$) ou $2x-10=0$ (d'où $x=5$).
Les deux racines de l'équation sont donc 2 et 5. Elles ont un produit de 10.

Solution 2
On développe et on simplifie le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(x-4)(x-2)+(x-2)(x-6) &= 0\\(x^2-6x+8)+(x^2-8x+12) &= 0\\2x^2-14x+20 &= 0\end{aligned}$$

Les racines d'une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) ont un produit égal à $\frac{c}{a}$. Donc, les racines de l'équation $2x^2-14x+20=0$ ont un produit de $\frac{20}{2}$, ou 10.

Réponse : (C)

15. À cause de la façon dont les oranges sont empilées, chaque couche est un rectangle qui contient une orange de moins, dans chaque rangée et dans chaque colonne, que le rectangle de la couche en dessous.
La couche inférieure est un rectangle de 5 sur 7, pour un total de 35 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 4 sur 6, pour un total de 24 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 3 sur 5, pour un total de 15 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 2 sur 4, pour un total de 8 oranges.
La couche suivante est un rectangle de 1 sur 3, pour un total de 3 oranges. Cette couche est la dernière couche, car elle est formée d'une seule rangée d'oranges.
Le nombre total d'oranges dans la pile est égal à $35+24+15+8+3$, ou 85.

Réponse : (D)

16. Puisqu'il y a 30 personnes dans la salle et que 60 % d'entre elles sont des hommes, le nombre d'hommes est égal à $\frac{6}{10}\times 30$, ou 18. Il y a donc 12 femmes dans la salle.
Puisqu'aucun homme n'entre dans la salle ou ne quitte la salle, ces 18 hommes représentent 40 % de toutes les personnes à la fin.
Donc, 9 hommes représentent 20 % de toutes les personnes à la fin. Le nombre total de personnes dans la salle à la fin est donc égal à 5×9, ou 45.
Puisqu'il y avait 30 personnes dans la salle au départ et que seules des femmes sont entrées, alors 15 femmes sont entrées.

Réponse : (E)

17. Puisque $3^{2011}=3^1\cdot 3^{2010}=3\cdot 3^{2010}$ et que $3^{2012}=3^2\cdot 3^{2010}=9\cdot 3^{2010}$, alors :

$$\frac{3^{2011}+3^{2011}}{3^{2010}+3^{2012}}=\frac{3\cdot 3^{2010}+3\cdot 3^{2010}}{3^{2010}+9\cdot 3^{2010}}=\frac{3^{2010}(3+3)}{3^{2010}(1+9)}=\frac{3+3}{1+9}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Réponse : (A)

18. Pour déterminer N, le plus petit entier positif dont les chiffres ont un produit fixe, il faut d'abord déterminer le nombre minimal de chiffres qui pourraient donner ce produit. En effet, moins il y a de chiffres, plus le nombre est petit.
On déterminera ensuite les chiffres qui ont un produit de 1728 et on les placera en ordre croissant pour former les chiffres de N. (Plus le premier chiffre d'un nombre formé de ces chiffres est petit, plus le nombre est petit. Ensuite, plus le deuxième chiffre est petit, plus le nombre est petit et ainsi de suite.)
On remarque que N ne peut avoir un chiffre 0, sinon le produit des chiffres serait égal à 0.
De plus, N ne peut avoir un chiffre 1, sinon on obtiendrait le même produit des chiffres si on enlevait le 1 et on aurait alors un nombre plus petit. Or, N est *le plus petit nombre* dont les chiffres ont un produit de 1728.

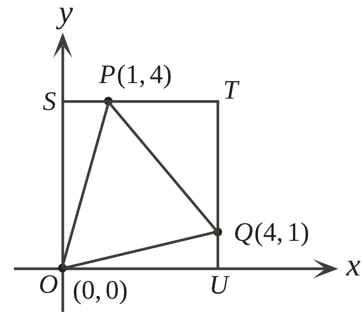
Puisque les chiffres de N ont un produit de 1728, on écrit 1728 en factorisation première pour faciliter la recherche des chiffres de N :

$$1728 = 9 \times 192 = 3^2 \times 3 \times 64 = 3^3 \times 2^6$$

On cherche d'abord le nombre minimal de chiffres qui pourraient donner un produit de 1728.
Il est impossible d'avoir trois chiffres qui ont un produit de 1728, car le plus grand produit possible de trois chiffres est $9 \times 9 \times 9$, ou 729.
Est-il possible d'avoir quatre chiffres qui ont un produit de 1728 ?
Pour que N soit le plus petit possible, il faut que son premier chiffre, le chiffre des milliers, soit aussi petit que possible.
On a vu que ce chiffre ne peut pas être un 1.
Ce chiffre ne peut être un 2, car $1728 \div 2 = 864$, et le produit des trois autres chiffres serait donc égal à 864. Or ce nombre est supérieur à 729, le produit maximal de trois chiffres.
Le chiffre des milliers peut-il être un 3 ? Puisque $1728 \div 3 = 576$, les trois autres chiffres devront avoir un produit de 576.
Si un des chiffres était un 6 (ou moins), alors puisque $576 \div 6 = 96$, les deux autres chiffres auraient un produit de 96 (ou plus), ce qui est impossible.
Donc si on a trois chiffres qui ont un produit de 576, chaque chiffre doit être un 8 ou un 9.
Puisque 576 est pair, il faut qu'au moins des chiffres soit un 8. Puisque $576 \div 8 = 72$, les deux autres chiffres sont 8 et 9.
Donc, il existe trois chiffres qui ont un produit de 576, et il existe quatre chiffres, dont le plus petit est 3, qui ont un produit de 1728.
Les chiffres de N sont donc 3, 8, 8 et 9. On obtient le plus petit nombre que l'on peut former avec ces chiffres en plaçant les chiffres en ordre croissant. Donc $N = 3889$.
Les chiffres de N ont donc une somme de $3 + 8 + 8 + 9$, ou 28.

Réponse : (A)

19. Soit $O(0, 0)$, $P(1, 4)$ et $Q(4, 1)$.
Il y a trois positions possibles pour le quatrième sommet R du parallélogramme. La première est l'image de Q par une réflexion dans l'axe OP, la deuxième est l'image de P par une réflexion dans l'axe OQ et la troisième est l'image de O par une réflexion dans l'axe PQ.
Dans chaque cas, le triangle OPQ forme la moitié du parallélogramme. Donc, l'aire du parallélogramme est le double de l'aire du triangle OPQ.
Il y a plusieurs façons de déterminer l'aire du triangle.



On choisit d'encadrer le triangle dans un carré formé par les deux axes et par les droites d'équations $x = 4$ et $y = 4$ (ce qu'on pourrait appeler « compléter le carré ! »).
Soit les points $S(0, 4)$, $T(4, 4)$ et $U(4, 0)$.
L'aire du triangle OPQ est égale à l'aire du carré $OSTU$ moins l'aire des triangles OSP, PTQ et QUO.
Le carré $OSTU$ a une aire de $4 \cdot 4$, ou 16, puisqu'il a des côtés de longueur 4.

Le triangle OSP est rectangle en S. De plus, $OS = 4$ et $SP = 1$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(OS)(SP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Le triangle PTQ est rectangle en T. De plus, $PT = TQ = 3$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(PT)(TQ)$, ou $\frac{1}{2}(3)(3)$, ou $\frac{9}{2}$.
Le triangle QUO est rectangle en U. De plus, $OU = 4$ et $UQ = 1$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(OU)(UQ)$, ou $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
Donc, l'aire du triangle OPQ est égale à $16 - 2 - \frac{9}{2} - 2$, ou $\frac{15}{2}$.
Donc, l'aire du parallélogramme est égale à $2 \cdot \frac{15}{2}$, ou 15.

Réponse : (A)

20. Dans la première course, Karine a parcouru 100 m pendant que Sarah a couru 95 m.
Le rapport de leurs vitesses est donc de 100 : 95, ou 20 : 19.
Donc pendant que Sarah parcourt 1 m, Karine parcourt $\frac{20}{19}$ m, ou environ 1,053 m.
De l'autre point de vue, pendant que Karine parcourt 1 m, Sarah parcourt $\frac{19}{20}$ m, ou 0,95 m.
Dans la deuxième course, Karine doit parcourir 105 m et Sarah doit parcourir 100 m.
Si Sarah finit première, Karine n'aura pas parcouru 105 m dans le temps que Sarah a mis pour parcourir 100 m.
Or, pendant que Sarah parcourt 1 m, Karine parcourt 1,053 m. Donc pendant que Sarah parcourt 100 m, Karine parcourt 105,3 m. Donc, Karine a terminé avant Sarah.
Pendant que Karine a parcouru 105 m, Sarah a parcouru $105 \times \frac{19}{20}$ m, ou $\frac{1995}{20}$ m, ou $\frac{399}{4}$ m, ou $99\frac{3}{4}$ m.
Puisque $100 - 99\frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, Sarah finit 0,25 m derrière Karine.
Donc, Karine a gagné et lorsqu'elle a traversé la ligne d'arrivée, Sarah était 0,25 m derrière.

Réponse : (B)

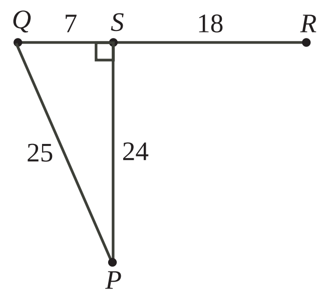
21. Puisque $x^2 = 8x + y$ et $y^2 = x + 8y$, alors $x^2 - y^2 = (8x + y) - (x + 8y) = 7x - 7y$.
On factorise chaque membre pour obtenir $(x + y)(x - y) = 7(x - y)$.
Puisque $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$. On peut donc diviser chaque membre par $x - y$ pour obtenir $x + y = 7$.
Puisque $x^2 = 8x + y$ et $y^2 = x + 8y$, alors

$$x^2 + y^2 = (8x + y) + (x + 8y) = 9x + 9y = 9(x + y) = 9 \cdot 7 = 63$$

Réponse : (C)

22. D'après le tableau, on voit que $QR = 25$, $QS = 7$ et $SR = 18$.
Puisque $QR = QS + SR$ et que QR est la plus grande des trois longueurs, alors S doit être situé sur le segment QR.
On a donc la situation suivante par rapport à ces trois villes :

Il reste à utiliser $PQ = 25$ et $PS = 24$.
On remarque que $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Donc $QS^2 + PS^2 = PQ^2$.
Puisque la relation de Pythagore est satisfaite, les points P, S et Q forment un triangle rectangle en S.
On a donc la situation suivante :



(On aurait pu placer le point P au-dessus du segment QR.)
Puisque $\angle PSQ = 90^\circ$, alors $\angle PSR = 90^\circ$.
Donc $PR^2 = PS^2 + SR^2$, d'où $PR^2 = 24^2 + 18^2$, ou $PR^2 = 576 + 324$, ou $PR^2 = 900$.
Puisque $PR > 0$, alors $PR = \sqrt{900}$, ou $PR = 30$.
Donc, il y a une distance de 30 entre la ville P et la ville R.

Réponse : (A)

23. Au départ, le bol contenait 320 g de sucre blanc et 0 g de cassonade.
Le mélange Y contient $(320 - x)$ g de sucre blanc et x g de cassonade.
Le mélange Z (le mélange final) contient 320 g de sucre mélangé (sucre blanc et cassonade).
Puisque dans le mélange Z le rapport de la masse de sucre blanc à la masse de cassonade est de 49 : 15, alors la masse de sucre blanc dans le mélange Z est égale à $\frac{49}{49+15} \cdot 3204$, ou $\frac{49}{64} \cdot 320$, ou $49 \cdot 5$, ou 245 g et la masse de cassonade dans le mélange Z est égale à $(320 - 245)$ g, ou 75 g.
Pour déterminer la valeur de x (et de là, celles de b et de c), il faut déterminer la masse de chaque sorte de sucre dans le mélange Z en fonction de x.
Or, dans le mélange Y, il y a $(320 - x)$ g de sucre blanc et x g de cassonade et le mélange est uniforme.
Donc, dans chaque gramme du mélange Y, il y a $\dfrac{320 - x}{320}$ g de sucre blanc et $\dfrac{x}{320}$ g de cassonade.
Pour former le mélange Z, on enlève x g de mélange Y.
La quantié de mélange Y qui est enlevée contient $x \cdot \dfrac{x}{320}$ g de cassonade, ou $\dfrac{x^2}{320}$ g de cassonade.
On forme le mélange Z en enlevant x g de mélange Y (qui contient $\dfrac{x^2}{320}$ g de cassonade) et en ajoutant x g de cassonade.
Donc la masse de cassonade, en g, dans le mélange Z est égale à $x - \dfrac{x^2}{320} + x$.
Puisque le mélange Z contient 75 g de cassonade, alors :

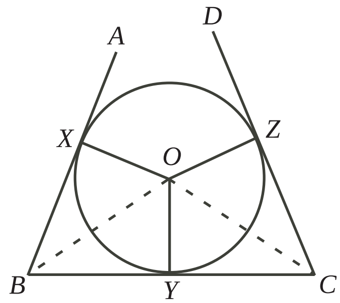
$$\begin{aligned} 2x - \frac{x^2}{320} &= 75 \\ 0 &= x^2 - 2(320)x + 75(320) \\ 0 &= x^2 - 640x + 24000 \\ 0 &= (x - 40)(x - 600) \end{aligned}$$

Donc $x = 40$ ou $x = 600$.
Puisqu'il n'y a jamais plus de 320 g de sucre dans le bol, la deuxième racine est rejetée.

Donc $x = 40$.
Donc, le mélange Y contient 40 g de cassonade et 280 g de sucre blanc (car $320 - 40 = 280$). Le rapport de ces masses est de 280 : 40. Le rapport irréductible est de 7 : 1. Donc $b = 7$ et $c = 1$.
Donc $x + b + c$ est égal à $40 + 7 + 1$, ou 48.

Réponse : (A)

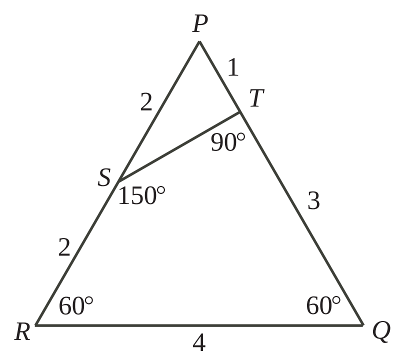
24. On utilise le résultat bien connu que si un cercle de centre O et de rayon r est tangent aux segments AB, BC et CD aux points respectifs X, Y et Z, alors $\angle OBX = \angle OBY = \frac{1}{2}(\angle ABC)$ et $\angle OCY = \angle OCZ = \frac{1}{2}(\angle BCD)$.
Soit $\angle ABC = \theta$ et $\angle BCD = \alpha$.
Puisque OY est perpendiculaire à BC, alors $\tan(\angle OBY) = \dfrac{OY}{BY}$ et $\tan(\angle OCY) = \dfrac{OY}{YC}$.



Donc $BY = \dfrac{OY}{\tan(\angle OBY)} = \dfrac{r}{\tan(\theta/2)}$ et $YC = \dfrac{OY}{\tan(\angle OCY)} = \dfrac{r}{\tan(\alpha/2)}$.
Puisque $BC = BY + YC$, alors :

$$\begin{aligned} BC &= \frac{r}{\tan(\theta/2)} + \frac{r}{\tan(\alpha/2)} \\ BC &= r\left(\frac{1}{\tan(\theta/2)} + \frac{1}{\tan(\alpha/2)}\right) \\ BC &= r\left(\frac{\tan(\theta/2) + \tan(\alpha/2)}{\tan(\theta/2)\tan(\alpha/2)}\right) \\ r &= \frac{BC\tan(\theta/2)\tan(\alpha/2)}{\tan(\theta/2) + \tan(\alpha/2)} \end{aligned}$$

On considère le quadrilatère $QRST$. On sait que $TQ = 3$. Puisque le triangle PQR est équilatéral, alors $QR = PQ$, d'où $QR = PT + TQ$, ou $QR = 4$.
Puisque $PR = QR = 4$ et que S est le milieu de PR, alors $RS = 2$.
Dans le triangle PST, on a $PT = 1$ et $PS = \frac{1}{2}PR$, ou $PS = 2$ et $\angle SPT = 60°$. Il s'agit donc d'un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $ST = \sqrt{3}$, $\angle PTS = 90°$ et $\angle PST = 30°$.
Donc $\angle STQ = 90°$ et $\angle RST = 150°$.
Donc dans le quadrilatère $QRST$, on a $QR = 4$, $RS = 2$, $ST = \sqrt{3}$, $TQ = 3$, $\angle TQR = 60°$, $\angle QRS = 60°$, $\angle RST = 150°$ et $\angle STQ = 90°$.



On détermine d'abord le rayon du cercle qui est tangent à trois côtés consécutifs du quadrilatère, sans prendre en considération l'effet du quatrième côté du quadrilatère sur le rayon. On recommence pour chaque ensemble de trois côtés consécutifs. On traitera de l'effet du quatrième côté sur le cercle à la fin.
On considère un cercle qui est tangent aux segments TQ, QR et RS.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à :

$$\frac{4\tan(60°/2)\tan(60°/2)}{\tan(60°/2) + \tan(60°/2)} = \frac{4\tan(30°)\tan(30°)}{\tan(30°) + \tan(30°)} \approx 1{,}1547$$

On considère un cercle qui est tangent aux segments QR, RS and ST.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{2\tan(60^\circ/2)\tan(150^\circ/2)}{\tan(60^\circ/2)+\tan(150^\circ/2)} = \frac{2\tan(30^\circ)\tan(75^\circ)}{\tan(30^\circ)+\tan(75^\circ)} = 1$$

On considère un cercle qui est tangent aux segments RS, ST and TQ.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{\sqrt{3}\tan(150^\circ/2)\tan(90^\circ/2)}{\tan(150^\circ/2)+\tan(90^\circ/2)} = \frac{\sqrt{3}\tan(75^\circ)\tan(45^\circ)}{\tan(75^\circ)+\tan(45^\circ)} \approx 1{,}3660$$

On considère un cercle qui est tangent aux segments ST, TQ and QR.
D'après la formule ci-haut, , le rayon de ce cercle est égal à

$$\frac{3\tan(90^\circ/2)\tan(60^\circ/2)}{\tan(90^\circ/2)+\tan(60^\circ/2)} = \frac{3\tan(45^\circ)\tan(30^\circ)}{\tan(45^\circ)+\tan(30^\circ)} \approx 1{,}0981$$

Il reste à déterminer le rayon du plus grand cercle qui peut être tracé à l'intérieur du quadrilatère $QRST$.
Le plus grand tel cercle doit toucher à au moins deux côtés consécutifs de $QRST$. En effet, si un cercle ne touchait à aucun côté ou à un seul côté de $QRST$, on pourrait le déplacer jusqu'à ce qu'il touche à deux côtés adjacents (comme dans un coin) et ensuite, on pourrait le faire grossir un peu. Si un cercle touchait à deux côtés opposés de $QRST$, on pourrait le déplacer jusqu'à ce qu'il touche à un côté adjacent à un des deux côtés, possiblement en perdant contact avec un des côtés opposés.
Dans les quatre cas suivants, considèrera un cercle qui touche à deux côtés adjacents du quadrilatère $QRST$. On peut agrandir un tel cercle, tout en le gardant tangent aux deux côtés, jusqu'à ce que le cercle touche à un troisième côté. Une fois que le cercle touche aux trois côtés, on ne peut plus l'agrandir, sinon une partie du cercle sortirait du quadrilatère. Donc, le plus grand cercle doit toucher à trois côtés du quadrilatère $QRST$.

On considère chaque paire de côtés adjacents (il y a quatre telles paires) et on détermine le plus grand cercle que l'on peut tracer à l'intérieur du quadrilatère et qui est tangent aux côtés adjacents.

- On considère un cercle tangent à ST et à TQ. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à ST et à TQ, jusqu'à ce qu'il touche au côté QR ou au côté RS. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à QR a un rayon d'environ 1,0981, tandis que celui qui touche aussi à RS a un rayon d'environ 1,3660. C'est donc le côté QR que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon d'environ 1,0981.
- On considère un cercle tangent à TQ et à QR. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à TQ et à QR, jusqu'à ce qu'il touche au côté ST ou au côté RS. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à ST a un rayon d'environ 1,0981, tandis que celui qui touche aussi à RS a un rayon d'environ 1,1547. C'est donc le côté ST que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon d'environ 1,0981.
- On considère un cercle tangent à QR et à RS. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à QR et à RS, jusqu'à ce qu'il touche au côté ST ou au côté TQ. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à ST a un rayon de 1, tandis que celui

qui touche aussi à TQ a un rayon d'environ 1,1547. C'est donc le côté ST que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon de 1.

- On considère un cercle tangent à RS et à ST. On agrandit le cercle, qui reste toujours tangent à RS et à ST, jusqu'à ce qu'il touche au côté QR ou au côté TQ. Or d'après les calculs précédents, le cercle qui touche aussi à QR a un rayon de 1, tandis que celui qui touche aussi à TQ a un rayon d'environ 1,3660. C'est donc le côté QR que le cercle touchera en premier. Dans ce cas, le plus grand cercle qui est complètement à l'intérieur du quadrilatère a un rayon de 1.

En comparant les quatre cas, on voit que le plus grand cercle que l'on pourrait obtenir a un rayon d'environ 1,0981, ce qui est plus près de 1,10.

Réponse : (B)

25. Soit N un entier strictement positif quelconque qui satisfait aux trois propriétés données.
Soit $S(N)$ la somme des chiffres du nombre N et soit $S(2N)$ la somme des chiffres du nombre $2N$.
Dans le tableau ci-dessous, on indique comment chaque chiffre de N contribue à $S(2N)$. Le contenu du tableau sera justifié à la toute fin.

Chiffre de N	2×Chiffre	Contribution à $S(2N)$
3	6	6
4	8	8
5	10	$1+0=1$
6	12	$1+2=3$

Supposons que N est composé de w fois le chiffre 3, x fois le chiffre 4, y fois le chiffre 5 et z fois le chiffre 6. On sait que $w, x, y, z \geq 1$.

1re étape : Ce que l'on sait de $S(N)$ et de $S(2N)$

Puisque $S(N) = 900$, alors $3w + 4x + 5y + 6z = 900$.
Puisque chaque chiffre 3 de N contribue une valeur de 6 dans $S(2N)$, chaque chiffre 4 de N contribue une valeur de 8 dans $S(2N)$, chaque chiffre 5 de N contribue une valeur de 1 dans $S(2N)$, chaque chiffre 6 de N contribue une valeur de 3 dans $S(2N)$ et puisque $S(2N) = 900$, alors $6w + 8x + y + 3z = 900$.

2e étape : Quelles valeurs de N seront la plus grande possible ou la plus petite possible ?

La plus grande valeur possible de N sera l'entier N^+ qui satisfait aux propriétés données, qui contient le plus grand nombre possible de chiffres (c.-à-d. dont la valeur de $w+x+y+z$ est la plus grande possible), qui est formé des plus grands chiffres possibles, tenant compte de ce nombre fixe de chiffres, et dont les chiffres sont écrits en ordre décroissant de gauche à droite (car les plus grands chiffres correspondront à une plus grande valeur de position).
La plus petite valeur possible de N sera l'entier N^- qui satisfait aux propriétés données, qui contient le plus petit nombre possible de chiffres (c.-à-d. dont la valeur de $w+x+y+z$ est la plus petite possible), qui est formé des plus petits chiffres possibles, tenant compte de ce nombre fixe de chiffres, et dont les chiffres sont écrits en ordre croissant de gauche à droite.
Puisqu'on veut déterminer le nombre de chiffres du produit N^+N^-, on se préoccupera davantage des nombres de chiffres de N^+ et de N^- (c.-à-d. des valeurs maximale et minimale de $w+x+y+z$), de même que des premiers chiffres de chacun.

3^e^ étape : Simplification d'équations

On sait que w, x, y et z sont des entiers strictement positifs qui vérifient les équations $3w + 4x + 5y + 6z = 900$ et $6w + 8x + y + 3z = 900$.
On multiplie chaque membre de la 1^re^ équation par 2 pour obtenir $6w + 8x + 10y + 12z = 1800$.
On soustrait la 2^e^ équation de cette dernière équation, membre par membre, pour obtenir $9y + 9z = 900$, ou $y + z = 100$.
Puisque $y + z = 100$, l'équation $3w + 4x + 5y + 6z = 900$ devient $3w + 4x + 5(y + z) + z = 900$, ou $3w + 4x + 500 + z = 900$, ou $3w + 4x + z = 400$.
Puisque $y + z = 100$, l'expression $w + x + y + z$ devient $w + x + 100$. Donc pour maximiser ou minimiser $w + x + y + z$, il faut maximiser ou minimiser $w + x$.

4^e^ étape : Réflexion sur le but à atteindre

On cherche les valeurs maximale et minimale de l'expression $w + x + y + z$, sachant que w, x, y et z sont des entiers strictement positifs qui vérifient les équations $3w + 4x + 5y + 6z = 900$ et $6w + 8x + y + 3z = 900$.
D'après la 3^e^ étape, ces équations sont vérifiées si et seulement si les équations $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$ le sont (puisqu'on peut procéder à partir d'une paire d'équations pour obtenir l'autre paire).
On cherche les valeurs maximale et minimale de l'expression $w+x+y+z$, sachant que $y+z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$.
Puisque la valeur de l'expression $y+z$ est fixe, on cherche donc les valeurs maximale et minimale de l'expression $w + x$, sachant que $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$.

5^e^ étape : Caractéristiques de N^+

On détermine d'abord la valeur maximale possible de $w + x$.
On récrit l'équation $3w + 4x + z = 400$ sous la forme $3(w + x) = 400 - x - z$.
Pour que $w + x$ prenne une valeur aussi grande que possible, il faut que le membre de droite prenne une valeur aussi grande que possible. Il faut donc que x et z prennent des valeurs aussi petites que possible.
Or $x \geq 1$ et $z \geq 1$. Donc $400 - x - z \leq 398$.
De plus, puisque le membre de gauche de l'équation $3(w + x) = 400 - x - z$ est divisible par 3, le membre de droite doit l'être aussi.
Or, le plus grand multiple de 3 qui est inférieur ou égal à 398 est le nombre 396.
On doit donc avoir $3(w + x) \leq 396$, d'où $w + x \leq 132$.
La valeur maximale possible de $w + x$ est donc 132 et puisque $x + y = 100$, la valeur maximale possible de $w + x + y + z$ est $132 + 100$, ou 232.
Pour atteindre cette valeur maximale, il faut que $400 - x - z = 396$ (c.-à-d. que $x + z = 4$). Les valeurs $w = 129$, $x = 3$, $y = 99$ et $z = 1$ donnent cette valeur maximale (et elles vérifient les équations $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$).
Donc le nombre N^+, qui est la plus grande valeur possible de N, est composé de 232 chiffres (tous des 3, des 4, des 5 ou des 6, mais avec au moins un de chaque sorte) placés en ordre décroissant.
Le nombre N^+ vérifie donc l'inéquation $6 \times 10^{231} < N^+ < 7 \times 10^{231}$.
(Comme on le verra, il ne sera pas nécessaire de déterminer les chiffres de N^+ de façon plus précise.)

6^e étape : Caractéristiques de N^-

On détermine d'abord la valeur minimale possible de $w + x$.
On récrit l'équation $3w + 4x + z = 400$ sous la forme $4(w + x) = 400 + w - z$.
Pour que $w + x$ prenne une valeur aussi petite que possible, il faut que le membre de droite prenne une valeur aussi petite que possible. Il faut donc que w prenne une valeur aussi petite que possible et que z prenne une valeur aussi grande que possible.
Or $w \geq 1$, $y + z = 100$ et $y \geq 1$. Donc $z \leq 99$.
Donc $400 + w - z \geq 302$.
Puisque le membre de gauche de l'équation $4(w+x) = 400+w-z$ est divisible par 4, le membre de droite doit l'être aussi.
Le plus petit multiple de 4 qui est supérieur ou égal à 302 est le nombre 304.
On doit donc avoir $4(w + x) \geq 304$, d'où $w + x \geq 76$.
La valeur minimale possible de $w + x$ est 76 et puisque $y + z = 100$, la valeur minimale possible de $w + x + y + z$ est $76 + 100$, ou 176.
Pour atteindre cette valeur minimale, il faut que $400 + w - z = 304$ (c.-à-d. que $z - w = 96$).
Les valeurs $w = 3$, $x = 73$, $y = 1$ et $z = 99$ donnent cette valeur minimale (et elles vérifient les équations $y + z = 100$ et $3w + 4x + z = 400$).
Donc le nombre N^-, qui est la plus petite valeur possible de N, est composé de 176 chiffres (tous des 3, des 4, des 5 ou des 6, mais avec au moins un de chaque sorte) placés en ordre croissant.
Le nombre N^- vérifie donc l'inéquation $3 \times 10^{175} < N^- < 4 \times 10^{175}$, puisque cette valeur de N commence par un 3 et est composée de 176 chiffres.
(De même, il ne sera pas nécessaire de déterminer les chiffres de N^- de façon plus précise.)

7^e étape : Le nombre de chiffres du nombre $N^- \cdot N^+$

Puisque $6 \times 10^{231} < N^+ < 7 \times 10^{231}$ et $3 \times 10^{175} < N^- < 4 \times 10^{175}$, alors :

$$18 \times 10^{406} = (3 \times 10^{175}) \cdot (6 \times 10^{231}) < N^- \cdot N^+ < (4 \times 10^{175}) \cdot (7 \times 10^{231}) = 28 \times 10^{406}$$

Donc, le nombre $N^- \cdot N^+$ est composé de 408 chiffres.

Justification du contenu du tableau

Supposons que N se termine par les chiffres $abcd$. Donc $N = \cdots dcba$.
On a donc $N = \cdots + 1000d + 100c + 10b + a$.
Donc $2N = \cdots + 1000(2d) + 100(2c) + 10(2b) + (2a)$. Or, les valeurs $2d$, $2c$, $2b$ et $2a$ peuvent être formées d'un ou deux chiffres.
Soit $u(2a)$ le chiffre des unités de $2a$ et soit $g(2a)$ le chiffre des dizaines de $2a$.
On sait que $u(2a)$ peut égaler 0, 2, 4, 6 ou 8, tandis que $g(2a)$ peut égaler 0 ou 1.
On définit $u(2b), g(2b), u(2c), g(2c), u(2d), g(2d)$ de la même façon.
On remarque que $2a = 10 \cdot t(2a) + u(2a)$, $2b = 10 \cdot t(2b) + u(2b)$, $2c = 10 \cdot t(2c) + u(2c)$ et $2d = 10 \cdot t(2d) + u(2d)$.
Donc :

$$\begin{aligned} 2N &= \cdots + 1000(10 \cdot t(2d) + u(2d)) + 100(10 \cdot t(2c) + u(2c)) \\ &\qquad + 10(10 \cdot t(2b) + u(2b)) + (10 \cdot t(2a) + u(2a)) \\ &= \cdots + 1000(u(2d) + t(2c)) + 100(u(2c) + t(2b)) + 10(u(2b) + t(2a)) + u(2a) \end{aligned}$$

Puisque $u(2a), u(2b), u(2c), u(2d) \leq 8$ et $t(2a), t(2b), t(2c), t(2d) \leq 1$, alors chacune des expressions $u(2d)+t(2c)$, $u(2c)+t(2b)$, $u(2b)+t(2a)$ et $u(2a)$ représente un seul chiffre. Elles représentent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités de $2N$.

La somme des chiffres de $2N$ est donc égale à :

$$u(2a) + (u(2b) + t(2a)) + (u(2c) + t(2b)) + (u(2d) + t(2c)) + \cdots \quad = \\ (t(2a) + u(2a)) + (t(2b) + u(2b)) + (t(2c) + u(2c)) + \cdots$$

Cet argument peut aussi être utilisé pour les autres chiffres de N.
Donc si m est un chiffre de N, alors la somme des chiffres des unités et des dizaines de $2m$ contribue à la somme des chiffres de $2N$.
Donc, les chiffres de N contribuent à la somme des chiffres de $2N$ comme dans le tableau ci-haut.

Réponse : (A)