Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2012

le mercredi 11 avril 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Jean achète 10 sacs contenant chacun 20 pommes, pour un total de 10×20 pommes, ou 200 pommes. Il mange 8 pommes par jour. Puisque $200 \div 8 = 25$, Jean met 25 jours pour manger les 10 sacs de pommes.

   (b) On a :

$$\begin{aligned} & \sin(0^\circ) + \sin(60^\circ) + \sin(120^\circ) + \sin(180^\circ) + \sin(240^\circ) + \sin(300^\circ) + \sin(360^\circ) \\ &= 0 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + 0 + (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On peut aussi remarquer que $\sin(60^\circ) = -\sin(300^\circ)$, $\sin(120^\circ) = -\sin(240^\circ)$ et $\sin(0^\circ) = \sin(180^\circ) = \sin(360^\circ) = 0$, ce qui donne une somme de 0.

   (c) Les entiers ont une somme de 420 et une moyenne de 60. Puisque $420 \div 60 = 7$, l'ensemble contient 7 entiers. Or, un des nombres est 120. Les 6 autres entiers ont donc une somme de $420 - 120$, ou 300. Ces 6 nombres ont une moyenne de $300 \div 6$, ou 50.

2. (a) On a $ax + ay = 4$, ou $a(x + y) = 4$.
   Puisque $x + y = 12$, la dernière équation devient $12a = 4$, d'où $a = \frac{4}{12}$, ou $a = \frac{1}{3}$.

   (b) Puisque les droites sont parallèles, elles ont la même pente.
   On récrit les équations sous la forme $y = mx + b$.
   L'équation $4x + 6y = 5$ devient $6y = -4x + 5$, ou $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$.
   L'équation $6x + ky = 3$ devient $ky = -6x + 3$, ou $y = -\frac{6}{k}x + \frac{3}{k}$ si $k \neq 0$. Or, puisque la première droite n'est pas verticale, la seconde ne l'est pas et on a donc $k \neq 0$.
   Donc $-\frac{2}{3} = -\frac{6}{k}$, d'où $\frac{k}{6} = \frac{3}{2}$, ou $k = 6 \times \frac{3}{2}$, ou $k = 9$.

   (c) On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $x + x^2 = 2$, ou $x^2 + x - 2 = 0$. On factorise pour obtenir $(x + 2)(x - 1) = 0$, d'où $x = -2$ ou $x = 1$.
   Or, on peut écrire la première équation sous forme $y = -x$. Donc si $x = -2$, on a $y = 2$ et si $x = 1$, on a $y = -1$.
   Les solutions sont $(-2, 2)$ et $(1, -1)$.
   (On peut vérifier que ces couples satisfont aux deux équations.)

3. (a) Puisque le sel compte pour 25 % de la masse de la solution et que la solution a une masse de 200 g, alors le sel compte pour $\frac{1}{4}$ de la masse, soit 50 g. L'eau compte pour le reste de la solution, soit 150 g.
   Lorsqu'on ajoute de l'eau, la masse du sel ne change pas. On veut donc que les 50 g de sel comptent pour 10 % (ou $\frac{1}{10}$) de la masse de la solution finale.
   La solution finale aura donc une masse de 10×50 g, ou 500 g.
   L'eau qu'il faut ajouter a donc une masse de $(500 - 200)$ g, ou 300 g.

   (b) La formule correcte est $F = \frac{9}{5}C + 32$.
   D'après les renseignements donnés, Gaby utilise la formule $f = 2C + 30$.
   On détermine une formule pour l'erreur en fonction de C en déterminant d'abord les cas où $f < F$. Cette inégalité est équivalente à $2C + 30 < \frac{9}{5}C + 32$, qui est équivalente à $\frac{1}{5}C < 2$, qui est équivalente à $C < 10$. On a donc $f < F$ lorsque $C < 10$.
   Donc lorsque $-20 \leq C < 10$, l'erreur est égale à : $F - f = (\frac{9}{5}C + 32) - (2C + 30) = 2 - \frac{1}{5}C$
   Lorsque $10 \leq C \leq 35$, l'erreur est égale à : $f - F = (2C + 30) - (\frac{9}{5}C + 32) = \frac{1}{5}C - 2$

   Dans le premier intervalle, $-20 \leq C < 10$, l'erreur r est égale à $2 - \frac{1}{5}C$. Or, l'équation $r = 2 - \frac{1}{5}C$ représente une droite de pente négative. L'erreur r augmente donc lorsque C

diminue. Dans cet intervalle, la valeur maximale de r est donc atteinte lorsque la valeur de C est la plus petite, soit lorsque $C = -20$. Dans ce cas, l'erreur maximale est égale à $r = 2 - \frac{1}{5}(-20)$, ou $2 + 4$, ou 6.

Dans le deuxième intervalle, $10 \le C \le 35$, l'erreur est égale à $\frac{1}{5}C - 2$. Or, l'équation $r = \frac{1}{5}C - 2$ représente une droite de pente positive. L'erreur r augmente donc lorsque C augmente. Dans cet intervalle, la valeur maximale de r est donc atteinte lorsque la valeur de C est la plus grande, soit lorsque $C = 35$. Dans ce cas, l'erreur maximale est égale à $\frac{1}{5}(35) - 2$, ou $7 - 2$, ou 5.

Dans l'intervalle complet, $-20 \le C \le 35$, la plus grande erreur que Gaby peut obtenir est une erreur de 6.

4. (a) *Solution 1*

La parabole d'équation $y = 2(x-3)(x-5)$ a pour abscisses à l'origine 3 et 5. Par symétrie, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = 4$.

Une droite horizontale qui coupe la parabole le fait à des points équidistants de l'axe de symétrie. Puisque la droite d'équation $y = k$ coupe la parabole aux points A et B et que $AB = 6$, alors A et B doivent tous deux être situés à 3 unités de l'axe de symétrie.

Donc, les abscisses de A et de B doivent être $4 - 3$ et $4 + 3$, c'est-à-dire 1 et 7.

Donc, A et B ont pour coordonnées $(1, k)$ et $(7, k)$.

Puisque ces points sont sur la parabole, leurs coordonnées vérifient l'équation de la parabole. Avec le point $(1, k)$, on a donc $k = 2(1 - 3)(1 - 5)$, d'où $k = 16$.

(On aurait obtenu la même valeur de k en utilisant le point $(7, k)$.)

Solution 2

Soit x_A et x_B les abscisses respectives de A et de B. On peut supposer que A est situé à la gauche de B, c'est-à-dire que $x_A < x_B$. Puisque le segment AB est horizontal et que $AB = 6$, alors $x_B - x_A = 6$.

Puisque A et B sont sur la droite d'équation $y = k$, leurs coordonnées respectives sont (x_A, k) et (x_B, k). Puisque ces points sont sur la parabole d'équation $y = 2(x - 3)(x - 5)$, on peut déterminer x_A et x_B en posant $y = k$ dans cette équation. L'équation devient alors $k = 2(x - 3)(x - 5)$, ou $k = 2(x^2 - 8x + 15)$, ou $2x^2 - 16x + (30 - k) = 0$.

On utilise la formule pour résoudre l'équation du second degré :

$$x_A, x_B = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)}$$

Donc $x_A = \dfrac{16 - \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)}$ et $x_B = \dfrac{16 + \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)}$.

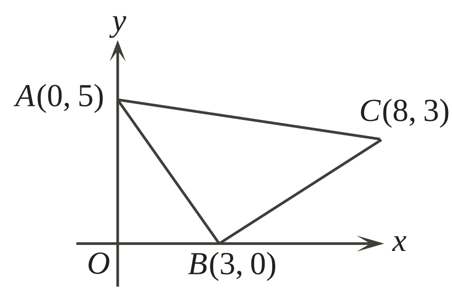
Puisque $x_B - x_A = 6$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{16 + \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)} - \frac{16 - \sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)} &= 6 \\
\frac{2\sqrt{16^2 - 4(2)(30 - k)}}{2(2)} &= 6 \\
\sqrt{256 - (240 - 8k)} &= 12 \\
\sqrt{16 + 8k} &= 12 \\
16 + 8k &= 144 \\
8k &= 128 \\
k &= 16
\end{aligned}$$

Donc $k = 16$.
On peut vérifier que la droite d'équation $y = 16$ coupe la parabole d'équation $y = 2(x-3)(x-5)$ aux points $(1, 16)$ et $(7, 16)$ qui sont distants l'un de l'autre de 6 unités.

(b) Soit $n = (3a + 6a + 9a + 12a + 15a) + (6b + 12b + 18b + 24b + 30b)$.
On simplifie l'expression pour obtenir $n = 45a + 90b$.
On factorise le membre de droite pour obtenir $n = 45(a + 2b)$, ou $n = 3^2 5^1 (a + 2b)$.
Si $a + 2b = 5$, on obtient alors $n = 3^2 5^2$, ou $n = (3 \times 5)^2$, ce qui est un carré parfait.
On trouve par tâtonnements deux couples (a, b) d'entiers strictement positifs qui vérifient $a + 2b = 5$, par exemple $(a, b) = (3, 1)$ et $(a, b) = (1, 2)$.
Une autre valeur de $a + 2b$ pour laquelle n est un carré parfait est $a + 2b = 20$, puisqu'on a alors : $n = 3^2 5^1 20 = 3^2 5^1 2^2 5^1 = 3^2 2^2 5^2 = (3 \times 2 \times 5)^2$
On trouve par tâtonnements un couple (a, b) qui vérifie $a + 2b = 20$, par exemple $(18, 1)$.
Donc, les couples $(3, 1)$, $(1 ,2)$ et $(18, 1)$ vérifient la condition du problème.
(Il y a un nombre infini d'autres tels couples.)

5. (a) *Solution 1*
On calcule d'abord la longueur des côtés du triangle ABC :



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(0-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34} \\ BC &= \sqrt{(3-8)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{34} \\ AC &= \sqrt{(0-8)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{68} \end{aligned}$$

Puisque $AB = BC$ et $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}BC$, le triangle ABC est un triangle isocèle rectangle en B.
(Il est semblable au triangle remarquable 1-1-$\sqrt{2}$.)
Donc $\angle ACB = 45°$.

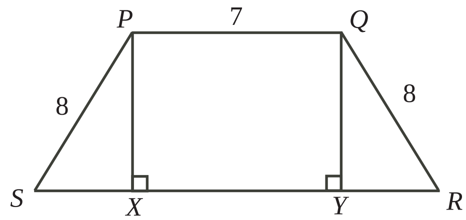
Solution 2
Comme dans la solution 1, on a $AB = BC = \sqrt{34}$.
Le segment AB a pour pente $\frac{5-0}{0-3}$, ou $-\frac{5}{3}$. Le segment BC a pour pente $\frac{0-3}{3-8}$, ou $\frac{3}{5}$.
Puisque ces pentes ont un produit de -1, alors AB et BC sont perpendiculaires.
Le triangle ABC est donc rectangle en B.
Puisque $AB = BC$, ABC est un triangle rectangle isocèle. Donc $\angle ACB = 45°$.

Solution 3
Comme dans la solution 1, on a $AB = BC = \sqrt{34}$ et $AC = \sqrt{68}$.
On utilise la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos(\angle ACB) \\ 34 &= 68 + 34 - 2(\sqrt{68})(\sqrt{34})\cos(\angle ACB) \\ 0 &= 68 - 2(\sqrt{2}\sqrt{34})(\sqrt{34})\cos(\angle ACB) \\ 0 &= 68 - 68\sqrt{2}\cos(\angle ACB) \\ 68\sqrt{2}\cos(\angle ACB) &= 68 \\ \cos(\angle ACB) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Puisque $\cos(\angle ACB) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $0° < \angle ACB < 180°$, alors $\angle ACB = 45°$.

(b) Aux points P et Q, on abaisse des perpendiculaires PX et QY au côté SR.



Puisque PQ est parallèle à SR ($PQRS$ étant un trapèze) et que PX et QY sont perpendiculaires à SR, alors $PQYX$ est un rectangle.
Donc $XY = PQ = 7$ et $PX = QY$.
Puisque les triangles PXS et QYR sont rectangles et que $PS = QR$ et $PX = QY$, ces triangles sont isométriques et on a donc $SX = YR$.
Puisque $XY = 7$ et $SR = 15$, alors $SX + 7 + YR = 15$, d'où $2 \times SX = 8$, ou $SX = 4$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PXS, on a :

$$PX^2 = PS^2 - SX^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

Or, PR est l'hypoténuse du triangle rectangle PXR.
Puisque $PR > 0$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PR = \sqrt{PX^2 + XR^2} = \sqrt{48 + (7+4)^2} = \sqrt{48 + 11^2} = \sqrt{48 + 121} = \sqrt{169} = 13$$

Donc $PR = 13$.

6. (a) *Solution 1*

Il y a deux possibilités : ou bien chaque joueur gagne 3 parties, ou bien un joueur gagne plus de parties que l'autre.
Or, la probabilité pour que chacun gagne 3 des 6 parties est de $\frac{5}{16}$. Donc, la probabilité pour qu'un joueur gagne plus de parties que l'autre est de $1 - \frac{5}{16}$, ou $\frac{11}{16}$.
Puisque Blaise et Pierre sont de force égale et que chacun peut aussi bien gagner une partie que l'autre, chacun peut aussi bien gagner plus de parties que l'autre.
Donc, la probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre est de $\frac{1}{2} \times \frac{11}{16}$, ou $\frac{11}{32}$.

Solution 2

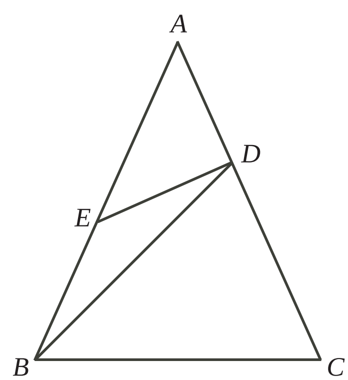
On considère le résultat de 6 parties comme une suite de 6 lettres, tous des B ou des P, chaque B représentant une victoire de Blaise et chaque P représentant une victoire de Pierre. Il y a 2^6 telles suites, c'est-à-dire 64 suites possibles. Puisque Blaise et Pierre sont de force égale, les 64 suites sont équiprobables.
Puisque les garçons jouent 6 parties, Blaise gagne plus de parties que Pierre s'il gagne 4, 5 ou 6 parties.
Il y a exactement 1 des 64 résultats qui représente 6 victoires pour Blaise, soit la suite BBBBBB.
Il y a 6 résultats qui représentent 5 victoires de Blaise (et une victoire de Pierre). Ce sont les suites PBBBBB, BPBBBB, BBPBBB, BBBPBB, BBBBPB, BBBBBP.
Le nombre de résultats qui représentent 4 victoires de Blaise (et deux victoires de Pierre) est égal au nombre de façons de placer 4 B et 2 P en ligne, soit $\binom{6}{2}$, ou 15.
En tout, il y a $(1+6+15)$, ou 22 résultats favorables pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre. La probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre est donc de $\frac{22}{64}$, ou $\frac{11}{32}$.

(b) On manipule l'équation en utilisant les règles d'algèbre et des exposants :

$$\begin{aligned} 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x &= 2^{x+5} + 3^x \\ 3^x 3^2 + 2^x 2^2 + 2^x &= 2^x 2^5 + 3^x \\ 9(3^x) + 4(2^x) + 2^x &= 32(2^x) + 3^x \\ 8(3^x) &= 27(2^x) \\ \frac{3^x}{2^x} &= \frac{27}{8} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

Puisque les bases sont égales et que les deux membres de l'équation sont égaux, il faut que les exposants soient égaux. Donc $x = 3$.

7. (a) Puisque $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle et on a donc $\angle ABC = \angle ACB$.
Soit $\angle BAC = \theta$.



Les mesures des angles du triangle ABC ont une somme de 180°.
Donc $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$.

Puisque le triangle est isocèle, $2\angle ACB + \theta = 180^\circ$.
Donc $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta)$, ou $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$.

Or, le triangle BCD aussi est isocèle, avec $BC = BD$. Donc $\angle CDB = \angle DCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$.

Puisque les mesures des angles du triangle BCD ont une somme de 180°, alors :

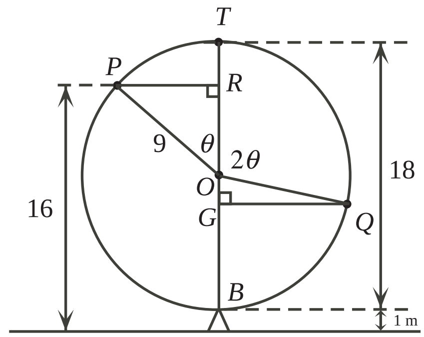
$$\angle CBD = 180^\circ - \angle DCB - \angle CDB = 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) = \theta$$

Or $\angle EBD = \angle ABC - \angle DBC$. Donc $\angle EBD = (90^\circ - \frac{1}{2}\theta) - \theta$, ou $\angle EBD = 90^\circ - \frac{3}{2}\theta$.

Puisque $BE = ED$, alors $\angle EDB = \angle EBD = 90^\circ - \frac{3}{2}\theta$.

Puisque $\angle BED = 180^\circ - \angle EBD - \angle EDB$, alors $\angle BED = 180^\circ - (90^\circ - \frac{3}{2}\theta) - (90^\circ - \frac{3}{2}\theta)$, ou $\angle BED = 3\theta$.

(b) Soit O le centre de la grande roue et B le point le plus bas sur la roue.
Puisque la roue a un rayon de 9 m (la moitié du diamètre de 18 m) et que B est situé à 1 m au-dessus du sol, O est à 10 m au-dessus du sol.
Soit $\angle TOP = \theta$.

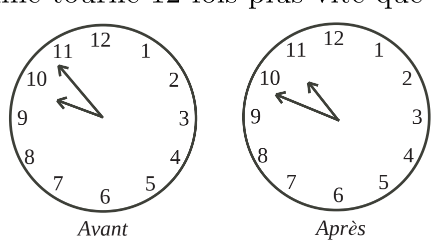


Puisque la grande roue tourne à une vitesse constante, l'angle de rotation effectué en 8 secondes est 2 fois l'angle de rotation effectué en 4 secondes. Donc $\angle TOQ = 2\theta$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PR à TB et au point Q, on abaisse une perpendiculaire QG à TB.
Puisque P est à 16 m au-dessus du sol et que O est à 10 m au-dessus du sol, alors $OR = 6$ m.
Puisque OP est un rayon du cercle, alors $OP = 9$ m.
Dans le triangle rectangle ORP, on a : $\cos\theta = \dfrac{OR}{OP} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
Puisque $\cos\theta = \frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(45^\circ)$, alors $\theta > 45^\circ$.
Donc $2\theta > 90^\circ$, ce qui indique que le point Q est plus bas que O.
Puisque $\angle TOQ = 2\theta$, alors $\angle QOG = 180^\circ - 2\theta$.
La hauteur de Karl au-dessus du sol, au point Q, est de 1 m plus la longueur de BG.
Or $BG = OB - OG$ et $OB = 9$ m.
Dans le triangle rectangle QOG, on a :

$$OG = OQ\cos(\angle QOG) = 9\cos(180^\circ - 2\theta) = -9\cos(2\theta) = -9(2\cos^2\theta - 1)$$

Puisque $\cos\theta = \frac{2}{3}$, alors $OG = -9(2(\frac{2}{3})^2 - 1)$ m, ou $OG = -9(\frac{8}{9} - 1)$ m, ou $OG = 1$ m.
Donc $BG = (9-1)$ m, ou $BG = 8$ m. Donc, Q est situé à $(1+8)$ m, ou 9 m au-dessus du sol.

8. (a) *Solution 1*
Chacune des deux aiguilles tourne à une vitesse constante. Puisque la petite aiguille accomplit $\frac{1}{12}$ d'une rotation en 1 heure et que la grande aiguille accomplit 1 rotation en 1 heure, alors la grande aiguille tourne 12 fois plus vite que la petite aiguille.



On suppose que la petite aiguille balaie un angle de x° entre les situations *Avant* et *Après*.
Pendant ce temps, la grande aiguille balaie un angle de $(360-x)^\circ$, puisque ces deux angles ont une somme de 360°.
Puisque la grande aiguille tourne 12 fois plus vite que la petite aiguille, alors $360 - x = 12x$.

Donc $13x = 360$, d'où $x = \frac{360}{13}$.
Dans une heure, la petite aiguille balaie un angle de $\frac{1}{12}$ de 360°, ou 30°.
Puisque la petite aiguille a bougé pendant t heure, alors $30t = \frac{360}{13}$. Donc $t = \frac{360}{30(13)}$, ou $t = \frac{12}{13}$.

Solution 2
On suppose que Noémie commence à peindre x heure après 9 h 00 ($0 < x < 1$) et qu'elle cesse de peindre y heure après 10 h 00 ($0 < y < 1$).
Puisqu'elle peint pendant t heure, alors $t = (1 - x) + y$, car elle peint pendant $(1 - x)$ heure jusqu'à 10 h 00, puis pendant y heure jusqu'à ce qu'elle cesse.
Chacune des deux aiguilles tourne à une vitesse constante.
La grande aiguille balaie un angle de 360° en une heure, tandis que la petite aiguille balaie un angle de $\frac{1}{12}$ de 360°, ou 30° en une heure.
Donc, en x heure ($0 < x < 1$), la grande aiguille balaie un angle de $(360x)^\circ$ et la petite aiguille balaie un angle de $(30x)^\circ$.
Dans la figure *Avant*, la grande aiguille est à $(360x)^\circ$ après la position 12 h 00.
Dans la figure *Après*, la petite aiguille est à $(360y)^\circ$ avant la position 12 h 00.
La position 9 h 00 est à $9 \times 30^\circ$, ou 270° après la position 12 h 00 et la position 10 h 00 est à $10 \times 30^\circ$, ou 300° après la position 12 h 00.
Donc dans la figure *Avant*, la petite aiguille est à $270^\circ + (30x)^\circ$ après la position 12 h 00 et dans la figure *Après*, la petite aiguille est à $300^\circ + (30y)^\circ$ après la position 12 h 00.
Puisque les aiguilles ont changé de position l'une pour l'autre, entre la figure *Avant* et la figure *Après*, il y a égalité entre les positions correspondantes. Donc $(360x)^\circ = 300^\circ + (30y)^\circ$ (ou $360x = 300 + 30y$) et $(360y)^\circ = 270^\circ + (30x)^\circ$ (ou $360y = 270 + 30x$).
On divise chaque membre des deux équations par 30 pour obtenir $12x = 10 + y$ et $12y = 9 + x$.
On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir $12x - 12y = 10 + y - 9 - x$, ou $-1 = 13y - 13x$.
Donc $y - x = -\frac{1}{13}$ et on a donc $t = (1-x)+y$, ou $t = 1+y-x$, d'où $t = 1 - \frac{1}{13}$, ou $t = \frac{12}{13}$.

(b) On manipule l'équation donnée, tout en obtenant une suite d'équations équivalentes :

$$\begin{aligned}
\log_{5x+9}(x^2+6x+9) + \log_{x+3}(5x^2+24x+27) &= 4 \\
\frac{\log(x^2+6x+9)}{\log(5x+9)} + \frac{\log(5x^2+24x+27)}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(formule pour le changement de base)} \\
\frac{\log((x+3)^2)}{\log(5x+9)} + \frac{\log((5x+9)(x+3))}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(on a factorisé)} \\
\frac{2\log(x+3)}{\log(5x+9)} + \frac{\log(5x+9)+\log(x+3)}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(lois des logarithmes)} \\
2\left(\frac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}\right) + \frac{\log(5x+9)}{\log(x+3)} + \frac{\log(x+3)}{\log(x+3)} &= 4 \qquad \text{(addition de fractions à rebours)}
\end{aligned}$$

On reporte $t = \dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)}$ dans cette équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
2t + \frac{1}{t} + 1 &= 4 \\
2t^2 + 1 + t &= 4t \\
2t^2 - 3t + 1 &= 0 \\
(2t-1)(t-1) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $t = 1$ ou $t = \frac{1}{2}$.
Si $\dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)} = 1$, alors $\log(x+3) = \log(5x+9)$. Donc $x+3 = 5x+9$, d'où $4x = -6$, ou $x = -\frac{3}{2}$.
Si $\dfrac{\log(x+3)}{\log(5x+9)} = \dfrac{1}{2}$, alors $2\log(x+3) = \log(5x+9)$. Donc $\log((x+3)^2) = \log(5x+9)$, ou $(x+3)^2 = 5x+9$, ou $x^2+6x+9 = 5x+9$, ou $x^2+x = 0$, ou $x(x+1) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = -1$.
Il y a donc trois valeurs possibles de x, soit 0, -1 et $-\frac{3}{2}$.
On vérifie chacune de ces valeurs dans l'équation donnée :
Si $x = 0$, le membre de gauche de l'équation est égal à $\log_9 9 + \log_3 27$, ou $1+3$, ou 4.
Si $x = -1$, le membre de gauche de l'équation est égal à $\log_4 4 + \log_2 8$, ou $1+3$, ou 4.
Si $x = -\frac{3}{2}$, le membre de gauche de l'équation est égal à $\log_{3/2}(9/4) + \log_{3/2}(9/4)$, ou $2+2$, ou 4.
Les racines de l'équation donnée sont donc 0, -1 et $-\frac{3}{2}$.

9. (a) On suppose qu'il y a r rangées et c colonnes de chaises dans l'auditorium.
Il y a donc rc chaises en tout.
Chaque chaise est soit vide, soit occupée par un garçon, soit occupée par une fille.
Puisqu'il y a 14 garçons assis dans chaque rangée, il y a $14r$ chaises occupées par des garçons.
Puisqu'il y a 10 filles assises dans chaque colonne, il y a $10c$ chaises occupées par des filles.
Puisqu'il y a 3 chaises vides, on peut dire que le nombre de chaises est égal à $14r+10c+3$.
Donc $rc = 14r + 10c + 3$.
On cherche les entiers strictement positifs r et c qui vérifient cette équation. Or, puisqu'il y a 14 garçons dans chaque rangée, il doit y avoir au moins 14 colonnes (d'où $c \geq 14$) et puisqu'il y a 10 filles dans chaque colonne, il doit y avoir au moins 10 rangées (d'où $r \geq 10$).
L'équation devient :

$$\begin{aligned} rc &= 14r + 10c + 3 \\ rc - 14r &= 10c + 3 \\ r(c-14) &= 10c + 3 \\ r &= \frac{10c+3}{c-14} \\ r &= \frac{10c - 140 + 143}{c-14} \\ r &= \frac{10c-140}{c-14} + \frac{143}{c-14} \\ r &= 10 + \frac{143}{c-14} \end{aligned}$$

Puisque r est un entier, alors $10 + \dfrac{143}{c-14}$ est un entier. Donc, $\dfrac{143}{c-14}$ doit être un entier.
Donc, $c - 14$ est un diviseur de 143. Puisque $c \geq 14$, alors $c - 14 \geq 0$. Donc, $c - 14$ est un diviseur positif de 143.
En factorisation première, $143 = 11 \times 13$. Les diviseurs positifs de 143 sont donc 1, 11, 13, 143.

On remplit un tableau avec les valeurs possibles de $c - 14$, de même que les valeurs correspondantes de c, de r (que l'on obtient à l'aide de l'équation $r = 10 + \frac{143}{c-14}$) et de rc :

$c - 14$	c	r	rc
1	15	153	2295
11	25	23	575
13	27	21	567
143	157	11	1727

Donc, les valeurs possibles de rc sont 567, 575, 1727 et 2295. Donc, la plus petite valeur possible pour le nombre de chaises est 567.
(Défi : Créer un arrangement rectangulaire de 27 colonnes et 21 rangées qui répond aux données du problème.)

(b) *Solution 1*
Soit $|PMQN|$ l'aire du quadrilatère $PMQN$, $|\triangle APD|$ l'aire du triangle APD, et ainsi de suite.
On veut démontrer que $|PMQN| = |\triangle APD| + |\triangle BQC|$.
Cela est équivalent à démontrer que

$$|PMQN| + |\triangle DPN| + |\triangle CQN| = |\triangle APD| + |\triangle DPN| + |\triangle BQC| + |\triangle CQN|,$$

ce qui est équivalent à démontrer que

$$|\triangle DMC| = |\triangle DAN| + |\triangle CBN|,$$

car le quadrilatère $PMQN$, le triangle DPN et le triangle CQN forment ensemble le triangle DMC, les triangles APD et DPN forment le triangle DAN et que les triangles BQC et CQN forment le triangle CBN.
Soit x la longueur de DC et tx la longueur de DN, t étant un nombre quelconque tel que $0 < t < 1$.
Or $NC = DC - DN$. Donc $NC = x - tx$, ou $NC = (1 - t)x$.
Soit a la hauteur de A par rapport à DC, b la hauteur de B par rapport à DC et m la hauteur de M par rapport à DC. On a donc la situation suivante :

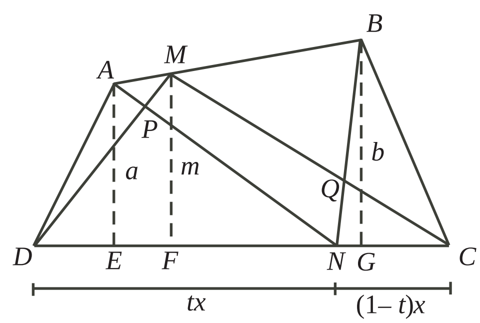


Figure 1

Donc $|\triangle DAN| = \frac{1}{2}(tx)(a)$ et $|\triangle CBN| = \frac{1}{2}((1 - t)x)b$, d'où :

$$|\triangle DAN| + |\triangle CBN| = \tfrac{1}{2}(txa + (1 - t)xb) = \tfrac{1}{2}x(ta + (1 - t)b)$$

De plus, $|\triangle DMC| = \frac{1}{2}xm$.
Pour démontrer que $|\triangle DMC| = |\triangle DAN| + |\triangle CBN|$, il faut démontrer que $\frac{1}{2}xm$ est égal à $\frac{1}{2}x(ta + (1 - t)b)$, ce qui est équivalent à démontrer que $m = ta + (1 - t)b$.

Dans la figure 2, on a tracé un segment horizontal du point A au segment BG. Il coupe MF en R et BG en S.
Puisque MF et BG sont verticaux et que AS est horizontal, AS est perpendiculaire aux deux autres segments.
Puisque $AE = a$, $MF = m$ et $BG = b$, alors $MR = m - a$ et $BS = b - a$.

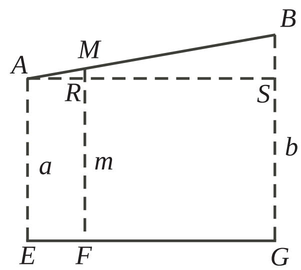
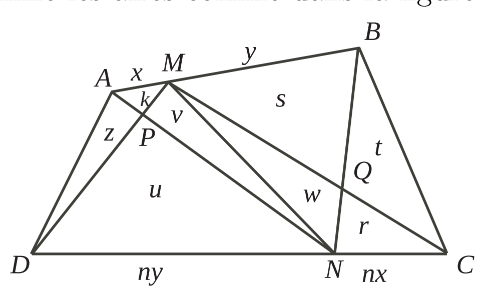


Figure 2

Or, les triangles ARM et ASB sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent l'angle A.
Donc $\dfrac{MR}{BS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{NC}{DC}$.
Puisque $MR = m - a$ et $BS = b - a$, alors $\dfrac{MR}{BS} = \dfrac{m-a}{b-a}$.
Puisque $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{NC}{DC}$, alors $\dfrac{MR}{BS} = \dfrac{(1-t)x}{x} = 1 - t$.
On compare les deux expressions pour $\dfrac{MR}{BS}$ et on obtient $\dfrac{m-a}{b-a} = (1-t)$, ou $m - a = (b-a)(1-t)$, ou $m = a + b(1-t) + (t-1)a$, ou $m = ta + (1-t)b$, ce qu'il fallait démontrer.

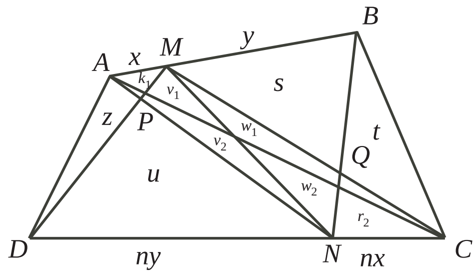
On a donc démontré que $|PMQN| = |\triangle APD| + |\triangle BQC|$.

Solution 2
Soit $AM = x$ et $MB = y$. Donc $AB = x + y$, d'où $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{x+y}$.
Soit $NC = nx$, n étant un nombre réel quelconque.
Puisque $\dfrac{NC}{DC} = \dfrac{AM}{AB}$, alors $\dfrac{nx}{DC} = \dfrac{x}{x+y}$, d'où $DC = n(x+y)$.
Puisque $DN = DC - NC$, alors $DN = n(x+y) - nx$, ou $DN = ny$.
On joint M et N et on nomme les aires comme dans la figure suivante :



On utilise à plusieurs reprises le fait que si deux triangles ont la même hauteur, le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base.
Par exemple, les triangles MDN et MNC ont la même hauteur par rapport au segment DC et au sommet commun M. Donc, le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base. C'est-à-dire que $\dfrac{w+r}{u+v} = \dfrac{nx}{ny} = \dfrac{x}{y}$. Donc $w + r = \dfrac{x}{y}(u+v)$.

De plus, le rapport de l'aire du triangle NAM à l'aire du triangle NMB est égal au rapport de AM à MB.
On a donc $\dfrac{k+v}{s+w} = \dfrac{x}{y}$, ou $k+v = \dfrac{x}{y}(s+w)$.
On joint ensuite A et C et on renomme les aires des régions divisées par ce segment comme dans la figure suivante :



(Le petit triangle entre les triangles d'aires k_1 et z a pour aire k_2 et le petit triangle entre les triangles d'aires r_2 et t a pour aire r_1.)
On considère les triangles ANC et ADN.
Le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base.
Donc $\dfrac{k_2+v_2+w_2+r_2}{z+u} = \dfrac{nx}{ny} = \dfrac{x}{y}$, d'où $k_2+v_2+w_2+r_2 = \dfrac{x}{y}(z+u)$.
On considère les triangles CAM et CMB.
Le rapport de leur aire est égal au rapport de leur base.
Donc $\dfrac{k_1+v_1+w_1+r_1}{s+t} = \dfrac{x}{y}$, d'où $k_1+v_1+w_1+r_1 = \dfrac{x}{y}(s+t)$.
On additionne les équations $k_2+v_2+w_2+r_2 = \dfrac{x}{y}(z+u)$ et $k_1+v_1+w_1+r_1 = \dfrac{x}{y}(s+t)$, membre par membre, pour obtenir :

$$(k_1+k_2)+(v_1+v_2)+(w_1+w_2)+(r_1+r_2) = \frac{x}{y}(s+t+z+u)$$

ou

$$k+v+w+r = \frac{x}{y}(s+t+z+u)$$

Puisque $k+v = \dfrac{x}{y}(s+w)$ et $w+r = \dfrac{x}{y}(u+v)$, alors

$$\frac{x}{y}(s+w) + \frac{x}{y}(u+v) = \frac{x}{y}(s+t+z+u)$$

ou

$$s+w+u+v = s+t+z+u$$

ou

$$w+v = t+z$$

Or, $w+v$ est l'aire du quadrilatère $PMQN$, z est l'aire du triangle APD et t est l'aire du triangle BQC. Donc, l'aire du quadrilatère $PMQN$ est égale à l'aire du triangle APD plus celle du triangle PQC, ce qu'il fallait démontrer.

10. (a) Les suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont :

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 1,2 \quad 1,4 \quad 3,4 \quad 1,2,3 \quad 1,2,5 \quad 1,4,5 \quad 3,4,5 \quad 1,2,3,4 \quad 1,2,3,4,5$$

Il y en a 12.

Voici pourquoi ce sont les seules suites Eden sur l'ensemble donné.

i. Une suite Eden de longueur 1 est formée d'un seul entier impair. Les choix possibles sont 1, 3 et 5.

ii. Une suite Eden de longueur 2 est formée d'un entier impair suivi d'un entier pair plus grand. Puisque 2 et 4 sont les seuls entiers pairs, les seules suites possibles sont 1, 2 et 1, 4 et 3, 4.

iii. Une suite Eden de longueur 3 est formée d'une suite Eden de longueur 2 à laquelle on ajoute un entier impair plus grand. À partir de la suite 1, 2, on peut former 1, 2, 3 et 1, 2, 5. À partir de la suite 1, 4, on peut former 1, 4, 5. À partir de la suite 3, 4, on peut former 3, 4, 5.

iv. Une suite Eden de longueur 4 est formée d'une suite Eden de longueur 3 à laquelle on ajoute un entier pair plus grand. Puisque 2 et 4 sont les seuls entiers pairs, la seule suite possible est 1, 2, 3, 4.

v. Une suite Eden de longueur 5 sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ doit être formée des cinq éléments. Il s'agit donc de la suite 1, 2, 3, 4, 5.

(b) On démontrera que pour tout entier n ($n \geq 3$), on a $e(n) = e(n-1) + e(n-2) + 1$.
Ainsi en posant $e(18) = m$, on a $e(19) = e(18) + e(17) + 1$, ou $e(19) = m + 4181$ et :

$$e(20) = e(19) + e(18) + 1 = (m + 4181) + m + 1$$

Puisque $e(20) = 17\,710$, alors $17\,710 = 2m + 4182$, ou $2m = 13\,528$, ou $m = 6764$.
Donc $e(18) = 6764$ et $e(19) = 6764 + 4181$, ou $e(19) = 10\,945$.

Il reste à démontrer que pour tout entier n ($n \geq 3$), on a $e(n) = e(n-1) + e(n-2) + 1$.

Pour simplifier la lecture, on utilise les abbréviations suivantes :

i. SE signifie "suite Eden"

ii. SE(m) signifie "suite Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$

iii. SEP et SEI signifient respectivement "suite Eden de longueur paire" et "suite Eden de longueur impaire"

iv. SEP(m) et SEI(m) signifient respectivement "suite Eden de longueur paire sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$" et "suite Eden de longueur impaire sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$"

<u>1re méthode</u>

Étant donné un entier strictement positif n, soit $A(n)$ le nombre de SEP(n) et $B(n)$ le nombre de SEI(n).
Donc pour chaque entier strictement positif n, on a $e(n) = A(n) + B(n)$.
On remarque aussi que pout tout entier positif n ($n \geq 2$), on a $e(n) \geq e(n-1)$, $A(n) \geq A(n-1)$ et $B(n) \geq B(n-1)$. En effet, chaque SE($n-1$) est aussi une SE(n), car elle vérifie les trois conditions. Il y a donc au moins autant de SE(n) que de SE($n-1$). (On peut utiliser le même argument pour démontrer qu'il y a au moins autant de SEP(n) que de SEP($n-1$) et au moins autant de SEI(n) que de SEI($n-1$).)

On sait que pour tout entier positif k, $2k + 1$ est un entier impair et $2k$ est un entier pair.
Pour tout entier strictement positif k, on a :

(i) $A(2k+1) = A(2k)$

(ii) $B(2k) = B(2k-1)$

(iii) $A(2k) = A(2k-1) + B(2k-1)$

(iv) $B(2k+1) = A(2k) + B(2k) + 1$

Voici pourquoi :

(i) Une SEP doit avoir un nombre pair comme dernier élément. Donc, une SEP$(2k+1)$ ne peut contenir le nombre $2k+1$ sans contenir un nombre pair plus grand, ce qu'elle ne peut faire, étant limitée par le nombre $2k+1$.
Donc, le plus grand terme d'une SEP$(2k+1)$ ne peut dépasser $2k$, ce qui fait qu'elle est aussi une ES$(2k)$.
Donc $A(2k+1) \leq A(2k)$.
Or on sait déjà que $A(2k+1) \geq A(2k)$. Donc $A(2k+1) = A(2k)$.

(ii) Une SEI doit avoir un nombre impair comme dernier élément. Donc, une SEI$(2k)$ ne peut contenir le nombre $2k$ sans contenir un nombre impair plus grand, ce qu'elle ne peut faire, étant limitée par le nombre $2k$.
Donc, le plus grand terme d'une SEI$(2k)$ ne peut dépasser $2k-1$, ce qui fait qu'elle est aussi une SEI$(2k-1)$.
Donc $B(2k) \leq B(2k-1)$.
Or on sait déjà que $B(2k) \geq B(2k-1)$. Donc $B(2k) = B(2k-1)$.

(iii) Une SEP$(2k)$ peut comprendre le nombre $2k$ ou pas.
Si elle comprend $2k$, alors en enlevant le nombre $2k$, on obtient une SEI$(2k-1)$. De plus, chaque SEI$(2k-1)$ peut être obtenue de cette façon.
Dans ce cas, le nombre de suites est donc égal à $B(2k-1)$.
Si une telle suite ne comprend pas $2k$, on peut alors la considérer comme une SEP$(2k-1)$. On sait que toute SEP$(2k-1)$ est une SEP$(2k)$.
Dans ce cas, le nombre de suites est donc égal à $A(2k-1)$.
Donc $A(2k) = A(2k-1) + B(2k-1)$.

(iv) Ou bien SEI$(2k+1)$ est une suite d'un seul terme, soit $2k+1$, ou bien elle comprend le nombre $2k+1$ et d'autres termes, ou bien elle ne comprend pas le nombre $2k+1$.
Il y a 1 suite dans ce premier cas.
Comme dans (iii), il y a $A(2k)$ suites dans le deuxième cas et $B(2k)$ suites dans le troisième cas.
Donc $B(2k+1) = 1 + A(2k) + B(2k)$.

On utilise ces propriétés comme suit. Pour tout entier strictement positif k, on a :

$$\begin{aligned}
e(2k+1) &= A(2k+1) + B(2k+1) \\
&= A(2k) + (A(2k) + B(2k) + 1) \\
&= (A(2k) + B(2k)) + A(2k) + 1 \\
&= e(2k) + (A(2k-1) + B(2k-1)) + 1 \\
&= e(2k) + e(2k-1) + 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e(2k) &= A(2k) + B(2k) \\
&= (A(2k-1) + B(2k-1)) + B(2k-1) \\
&= e(2k-1) + (A(2k-2) + B(2k-2) + 1) \\
&= e(2k-1) + e(2k-2) + 1
\end{aligned}$$

Donc pour tout entier n ($n \geq 3$), on a $e(n) = e(n-1)+e(n-2)+1$, ce qu'il fallait démontrer.

2^e méthode
Soit n un entier, $n \geq 3$. On considère les SE(n).
On peut placer une telle suite dans une des catégories suivantes :

(i) La suite composée du terme 1 (il y a 1 telle suite)

(ii) Les suites qui commencent par le nombre 1 et qui ont plus de 1 terme

(iii) Les suites qui ne commencent pas par le nombre 1

On démontrera que dans la catégorie (ii), il y a $e(n-1)$ suites et que dans la catégorie (iii), il y a $e(n-2)$ suites. On aura ainsi démontré que $e(n) = 1 + e(n-1) + e(n-2)$.

(ii) On considère l'ensemble P des SE(n) qui commencent par 1.
On enlève le terme 1 de chacune de ces suites et on considère l'ensemble Q de suites qui en résultent. On remarque que les ensembles P et Q ont le même nombre de suites. Chaque suite dans Q est formée de nombres de l'ensemble $\{2, 3, \ldots, n\}$, elle est croissante, ses termes en positions impaires sont pairs et ses termes en positions paires sont impairs (puisque chaque terme de la suite correspondante dans P a été poussé d'une position vers la gauche).
Il y a une correspondance biunivoque entre les suites de Q et les SE($n-1$) (l'ensemble des SE($n-1$) sera appelé R) et il y a donc $e(n-1)$ suites dans Q (et donc $e(n-1)$ suites dans P).
On peut démontrer la correspondance biunivoque en soustrayant 1 de chaque terme de chaque suite dans Q, de manière à former un nouvel ensemble S de suites. Chaque suite dans S est distincte, elle est formée de nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, elle est croissante, ses termes en positions paires sont pairs et ses termes en positions impaires sont impairs (puisque chaque terme d'une suite de Q a été diminué de 1). De plus, on peut obtenir chaque suite de R de cette façon (puisque en ajoutant 1 à chaque terme d'une telle SE, on obtient une suite distincte de Q).
Donc, le nombre de suites dans cette catégorie est égal à $e(n-1)$.

(iii) Soit T l'ensemble des SE(n) qui ne commencent pas par 1.
Puisque chacune des suites dans T ne commence pas par 1, chaque nombre de ces suites est supérieur ou égal à 3. Donc, chaque suite dans T est formée de nombres de l'ensemble $\{3, 4, \ldots, n\}$, elle est croissante, ses termes en positions paires sont pairs et ses termes en positions impaires sont impairs.
Il y a une correspondance biunivoque entre les suites de T et les SE($n-2$) (l'ensemble des SE($n-2$) sera appelé U) et il y a donc $e(n-2)$ suites dans U et dans T.
On peut démontrer la correspondance biunivoque en soustrayant 2 de chaque terme de chaque suite dans T, de manière à former un nouvel ensemble V de suites. Chaque suite dans V est distincte, elle est formée de nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n-2\}$, elle est croissante, ses termes en positions paires sont pairs et ses termes en positions impaires sont impairs (puisque chaque terme d'une suite de T a été réduit de 2). De plus, on peut obtenir chaque suite de U de cette façon (puisque en ajoutant 2 à chaque terme d'une telle SE, on obtient une suite distincte de U).
Donc, le nombre de suites dans cette catégorie est égal à $e(n-2)$.

On a donc démontré que $e(n) = 1 + e(n-1) + e(n-2)$.