



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

[www.cemc.uwaterloo.ca](http://www.cemc.uwaterloo.ca)

# Concours Euclide

le mercredi 11 avril 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2012

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

**WATERLOO**  
MATHEMATICS

Great-West  
COMMERCIAL & ASSURANCE VIE



Canada-Vie

LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE<sup>MC</sup>

Canadian  
Institute of  
Actuaries



Institut  
canadien  
des actuaires

**Deloitte.**

©2012 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

**Durée :** 2 heures de demie

**L'utilisation d'une calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.**

**Nombre de questions :** 10

**Chaque question vaut 10 points.**

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme  $\pi + 1$  et  $\sqrt{2}$ , et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à l'adresse <http://www.cemc.uwaterloo.ca>.*

## REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.

### Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1.  (a) Jean achète 10 sacs contenant chacun 20 pommes. S'il mange 8 pommes par jour, combien de jours mettra-t-il pour manger les 10 sacs de pommes ?



- (b) Déterminer la valeur de l'expression suivante :

$$\sin(0^\circ) + \sin(60^\circ) + \sin(120^\circ) + \sin(180^\circ) + \sin(240^\circ) + \sin(300^\circ) + \sin(360^\circ)$$



- (c) Un ensemble d'entiers a une somme de 420 et une moyenne de 60. Sachant que le nombre 120 fait partie de l'ensemble, quelle est la moyenne des autres nombres de l'ensemble ?

2.  (a) Si  $ax + ay = 4$  et  $x + y = 12$ , quelle est la valeur de  $a$  ?



- (b) Sachant que les droites d'équations  $4x + 6y = 5$  et  $6x + ky = 3$  sont parallèles, quelle est la valeur de  $k$  ?



- (c) Déterminer tous les couples  $(x, y)$  qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned}x + y &= 0 \\x^2 - y &= 2\end{aligned}$$

3.  (a) Une solution, composée d'eau et de sel, a une masse de 200 g. Le sel compte pour 25 % de la masse de la solution. Combien de grammes d'eau faut-il ajouter à la solution pour que le sel ne compte que pour 10 % de la masse de la solution ?



- (b) La formule  $F = \frac{9}{5}C + 32$  est utilisée pour convertir correctement une température de  $C$  degrés Celsius à  $F$  degrés Fahrenheit.

Pour obtenir une approximation de  $C$  degrés Celsius en degrés Fahrenheit, Gaby double la valeur de  $C$  et ajoute 30, ce qui donne  $f$ .

Si  $f < F$ , l'erreur de l'approximation est égale à  $F - f$  ; autrement elle est égale à  $f - F$ . (P. ex., si  $F = 68$  et  $f = 70$ , l'erreur de l'approximation est égale à  $f - F = 2$ .)

Déterminer la plus grande erreur possible que Gaby peut obtenir en convertissant en degrés Fahrenheit des températures de  $C$  degrés Celsius dans l'intervalle  $-20 \leq C \leq 35$ .

4.  (a) La droite horizontale définie par  $y = k$  coupe la parabole définie par  $y = 2(x - 3)(x - 5)$  aux points  $A$  et  $B$ . Sachant que le segment  $AB$  a une longueur de 6, quelle est la valeur de  $k$ ?



- (b) Déterminer trois couples  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs pour lesquels

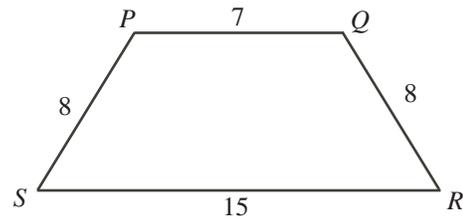
$$(3a + 6a + 9a + 12a + 15a) + (6b + 12b + 18b + 24b + 30b)$$

est un carré parfait.

5.  (a) Le triangle  $ABC$  a pour sommets  $A(0, 5)$ ,  $B(3, 0)$  et  $C(8, 3)$ . Déterminer la mesure de l'angle  $ACB$ .



- (b) Dans la figure ci-contre, le trapèze  $PQRS$  est isocèle,  $PQ = 7$ ,  $PS = QR = 8$  et  $SR = 15$ . Déterminer la longueur de la diagonale  $PR$ .



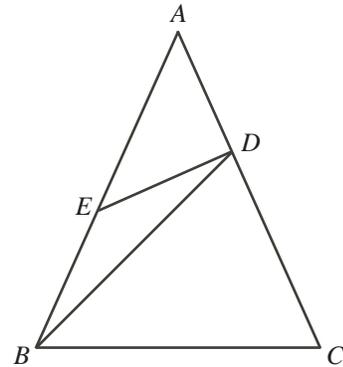
6.  (a) Blaise et Pierre s'apprêtent à jouer 6 parties de squash. Puisqu'ils sont de force égale, chacun peut aussi bien gagner une partie que l'autre. (Au squash, il n'y a pas de partie nulle.) La probabilité pour que chacun gagne 3 des 6 parties est de  $\frac{5}{16}$ . Quelle est la probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre?



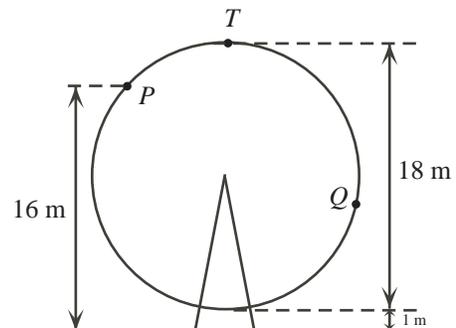
- (b) Déterminer toutes les valeurs réelles de  $x$  pour lesquelles :

$$3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x = 2^{x+5} + 3^x$$

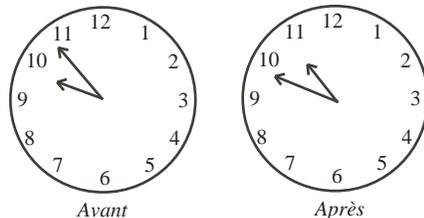
7.  (a) Dans la figure ci-contre, le triangle  $ABC$  est tel que  $AB = AC$  et  $\angle BAC < 60^\circ$ . Le point  $D$  est situé sur  $AC$  de manière que  $BC = BD$ . Le point  $E$  est situé sur  $AB$  de manière que  $BE = ED$ . Si  $\angle BAC = \theta$ , déterminer  $\angle BED$  en fonction de  $\theta$ .



- (b) La figure représente une grande roue, d'un diamètre de 18 m, qui tourne à une vitesse constante. Quand Karl fait un tour de grande roue et qu'il est au point le plus bas, il est à 1 m au-dessus de la terre. Quand Karl est au point  $P$ , situé à une hauteur de 16 m, et qu'il monte, il met 4 secondes pour atteindre le point  $T$  le plus élevé. Il met 8 autres secondes pour atteindre le point  $Q$ . Déterminer la hauteur au-dessus de la terre à laquelle Karl est situé lorsqu'il atteint le point  $Q$ .



8.  (a) Samedi matin, Noémie a commencé à peindre son modèle d'hélicoptère entre 9 h 00 et 10 h 00. Lorsqu'elle a terminé un peu plus tard, entre 10 h 00 et 11 h 00, elle constate que la petite aiguille de l'horloge est placée au même endroit où était la grande aiguille au départ et que la grande aiguille est placée au même endroit où était la petite aiguille au départ. Noémie a peint pendant  $t$  heure. Déterminer la valeur de  $t$ .

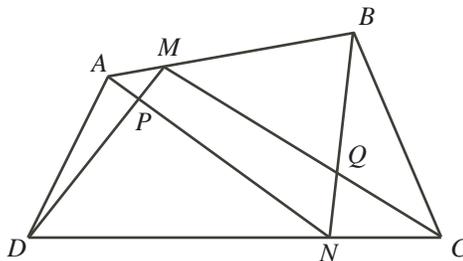


-  (b) Déterminer toutes les valeurs réelles de  $x$  pour lesquelles :

$$\log_{5x+9}(x^2 + 6x + 9) + \log_{x+3}(5x^2 + 24x + 27) = 4$$

9.  (a) Les chaises dans un auditorium sont disposées de façon rectangulaire. Il y a exactement 14 garçons assis dans chaque rangée et exactement 10 filles assises dans chaque colonne. Sachant qu'il y a exactement 3 chaises vides, démontrer qu'il y a au moins 567 chaises dans l'auditorium.

-  (b) Dans la figure ci-contre, le point  $M$  est situé sur le côté  $AB$  du quadrilatère  $ABCD$  et le point  $N$  est situé sur le côté  $DC$  de manière que  $\frac{AM}{AB} = \frac{NC}{DC}$ . Les segments  $AN$  et  $DM$  se coupent en  $P$ , tandis que les segments  $BN$  et  $CM$  se coupent en  $Q$ . Démontrer que l'aire du quadrilatère  $PMQN$  est égale à l'aire du triangle  $APD$  plus celle du triangle  $BQC$ .



10.  Étant donné un entier strictement positif  $N$ , une *suite Eden* sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  des entiers consécutifs de 1 à  $N$  est une suite qui satisfait aux conditions suivantes :

- (i) chacun de ses termes est un élément de l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ ,
- (ii) la suite est croissante et
- (iii) les termes dans les positions impaires sont impairs et les termes dans les positions paires sont pairs.

Par exemple, les quatre suites Eden sur l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  sont :

1            3            1, 2            1, 2, 3

- (a) Déterminer le nombre de suites Eden sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- (b) Étant donné un entier strictement positif  $N$ , soit  $e(N)$  le nombre de suites Eden sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Sachant que  $e(17) = 4180$  et  $e(20) = 17710$ , déterminer  $e(18)$  et  $e(19)$ .





## Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

### *Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2012!

En 2011, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2012.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

### *Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2012/2013
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école
- vous inscrire au Problème de la semaine
- obtenir des renseignements au sujet de notre programme de Master of Mathematics for Teachers (maîtrise en mathématiques pour enseignants)

**[www.cemc.uwaterloo.ca](http://www.cemc.uwaterloo.ca)**