Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2012

(10^{e} année – Secondaire IV)

le jeudi 23 février 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 24 février 2012

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On simplifie : $\dfrac{5-2}{2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$

RÉPONSE : (B)

2. Puisque la moyenne des trois nombres est égale à 3, leur somme est égale à 3×3, ou 9. Donc $1 + 3 + x = 9$, d'où $x = 9 - 4$, ou $x = 5$.

RÉPONSE : (B)

3. Lorsqu'on fait subir à la figure donnée une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, le côté supérieur de la figure se retrouve sur le côté droit de l'image. Donc, les deux coins ombrés se retrouvent du côté droit de de l'image.
De même, le petit triangle ombré à l'intérieur de la figure se retrouve en haut à gauche dans l'image.
Donc, la figure du choix (A) est la bonne.

RÉPONSE : (A)

4. Si l'exposant de -1 est pair, la puissance est égale à 1 et si l'exposant de -1 est impair, la puissance est égale à -1. Donc $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = -1 + 1 - 1 = -1$.
On peut aussi procéder comme suit en faisant une multiplication à la fois :

$$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = (-1)(-1)(-1) + (-1)(-1) + (-1) = 1(-1) + 1 - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$$

RÉPONSE : (D)

5. Puisque $\sqrt{100 - x} = 9$, alors $100 - x = 9^2$, ou $100 - x = 81$. Donc $x = 19$.

RÉPONSE : (E)

6. Lorsqu'on a ajouté 3 bananes au panier, il y a 12 pommes et 18 bananes dans le panier. Donc, la fraction des fruits du panier formée par les bananes est égale à $\frac{18}{12+18}$, ou $\frac{18}{30}$, ou $\frac{3}{5}$.

RÉPONSE : (C)

7. Puisque 20 % des élèves ont choisi la pizza et que 38 % des élèves ont choisi un mets thaïlandais, le pourcentage des élèves qui ont choisi un mets grec est égal à $100\,\% - 20\,\% - 38\,\%$, ou 42 %. Puisque 150 élèves ont été questionnés, le nombre d'élèves qui ont choisi un mets grec est égal à $42\,\% \times 150$, ou $\frac{42}{100} \times 150$, ou 63.

RÉPONSE : (E)

8. On a $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
On peut simplifier davantage en annulant les numérateurs et dénominateurs égaux, ce qui donne une réponse de $\dfrac{2}{5}$.

RÉPONSE : (A)

9. Puisque 20 élèves ont patiné et que 5 élèves ont patiné et skié, alors le nombre d'élèves qui ont patiné seulement est égal à $20 - 5$, ou 15.
Puisque 9 élèves ont skié et que 5 élèves ont patiné et skié, alors le nombre d'élèves qui ont skié seulement est égal à $9 - 5$, ou 4.
Le nombre d'élèves qui ont patiné ou skié ou les deux est égal au nombre d'élèves qui ont patiné seulement plus le nombre d'élèves qui ont skié seulement plus le nombre d'élèves qui ont patiné et skié. Ce nombre est égal à $15 + 4 + 5$, ou 24.
Donc, le nombre d'élèves qui n'ont ni patiné, ni skié, est égal à $30 - 24$, ou 6.

RÉPONSE : (B)

10. Le prisme initial avait quatre faces rectangulaires mesurant 4 sur 2 et deux faces carrées mesurant 2 sur 2. L'aire totale de ce prisme est donc égale à $4(4 \cdot 2) + 2(2 \cdot 2)$, ou $32 + 8$, ou 40.
Lorsqu'on enlève un petit cube mesurant 1 sur 1 sur 1 d'un coin du prisme, on enlève une surface carrée mesurant 1 sur 1 de trois des faces du prisme, mais trois faces carrées mesurant 1 sur 1 sont ajoutées à la surface. En d'autres mots, l'aire totale ne change pas.
Le nouveau solide a donc une aire totale de 40.

Réponse : (C)

11. Si Mathilde livre les journaux pendant 3 heures, elle livre 3×30 journaux, ou 90 journaux.
Elle gagne donc $3 \times 6{,}00\,\$ + 90 \times 0{,}25\,\$$ ou $18{,}00\,\$ + 22{,}50\,\$$, ou $40{,}50\,\$$.

Réponse : (A)

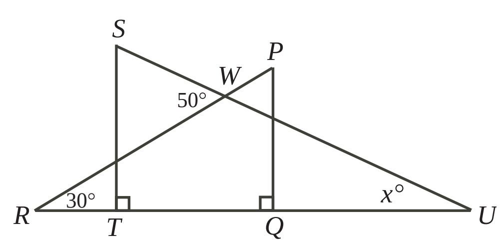
12. Puisque le point (p, q) est situé sur la droite d'équation $y = \frac{2}{5}x$, alors $q = \frac{2}{5}p$.
Deux côtés du rectangle sont situés sur les axes. Le rectangle a donc une base égale à p et une hauteur égale à q.
Son aire est donc égale à pq, ou $p \cdot \frac{2}{5}p$, ou $\frac{2}{5}p^2$.
Puisque le rectangle a une aire de 90, alors $\frac{2}{5}p^2 = 90$, d'où $p^2 = \frac{5}{2}(90)$, ou $p^2 = 225$.
Puisque $p > 0$, alors $p = \sqrt{225}$, ou $p = 15$.

Réponse : (D)

13. Puisque N est divisible par 5 et par 11, il est divisible par 5×11, ou 55, car 5 et 11 n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1.
On cherche donc un multiple impair de 55 entre 400 et 600.
Pour le trouver, on peut utiliser un multiple connu de 55 dans cet intervalle, par exemple 550. Il s'agit d'un multiple pair.
On peut ensuite ajouter ou soustraire 55 de ce nombre et obtenir un autre multiple de 55.
Or $550 + 55 = 605$, ce qui donne un multiple impair à l'extérieur de l'intervalle.
On calcule $550 - 55 = 495$ et on obtient un multiple impair dans l'intervalle.
L'énoncé nous dit qu'il n'y a qu'un multiple impair de 55 dans l'intervalle. Donc $N = 495$.
La somme des chiffres de N est égale à $4 + 9 + 5$, ou 18.

Réponse : (E)

14. Soit W le point d'intersection de RP et de SU.



L'angle SWR est extérieur au triangle RWU.
Donc $\angle SWR = \angle WRU + \angle WUR$, d'où $50^\circ = 30^\circ + x^\circ$, ou $x = 50 - 30$, ou $x = 20$.
(On aurait pu dire que $\angle RWU = 180^\circ - \angle SWR$, d'où $\angle RWU = 180^\circ - 50^\circ$, ou $\angle RWU = 130^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle RWU ont une somme de 180°, alors
$30^\circ + 130^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 180 - 130 - 30$, ou $x = 20$.)

Réponse : (B)

15. Puisque le grand cercle a un rayon de 9, alors $OQ = 9$ et le grand cercle a donc une aire de $\pi 9^2$, ou 81π.
Puisque $OP : PQ = 1 : 2$ et que $OQ = 9$, alors $OP = \frac{1}{3}OQ$, ou $OP = 3$.
Le petit cercle a un rayon de 3. Il a donc une aire de $\pi 3^2$, ou 9π.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du grand cercle moins celle du petit cercle. Elle est donc égale à $81\pi - 9\pi$, ou 72π.

Réponse : (D)

16. D'après la table de valeurs lorsque $x = 0$ et $y = 8$, on a $8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, d'où $c = 8$.
D'après la table de valeurs lorsque $x = 1$ et $y = 9$, on a $9 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, d'où $a + b + c = 9$.
Puisque $a + b + c = 9$ et que $c = 8$, alors $a + b + 8 = 9$, d'où $a + b = 1$.

Réponse : (B)

17. Soit L la longueur de la ficelle et x la longueur du morceau le plus court.
Puisque chaque longueur est 2 fois celle du morceau précédent, les longueurs des autres morceaux sont $2x$, $4x$ et $8x$.
Puisque les longueurs des quatre petits morceaux donnent la longueur de la ficelle, alors $x + 2x + 4x + 8x = L$, ou $15x = L$, d'où $x = \frac{1}{15}L$.
La longueur du plus grand morceau est donc égale à $8x$, ou $\frac{8}{15}L$, c'est-à-dire à $\frac{8}{15}$ de la longueur de la ficelle initiale.

Réponse : (A)

18. *Solution 1*
Puisqu'il s'agit de six entiers consécutifs, on peut dire qu'ils sont à peu près égaux. Lorsqu'on efface un des entiers, les cinq autres entiers, qui sont à peu près égaux, ont une somme de 2012. Chacun est à peu près égal à $\frac{2012}{5}$, soit environ 400.
On procède par essais systématiques.
Supposons que les six entiers consécutifs sont 400, 401, 402, 403, 404 et 405.
Ils ont une somme de 2415. Si on efface un des nombres pour que les quatre autres aient une somme de 2012, il faut effacer $2415 - 2012$, ou 403.
Y a-t-il une autre réponse possible ?
Si on choisit six entiers consécutifs un peu plus grands, comme 401, 402, 403, 404, 405 et 406, la somme des cinq plus petits entiers est égale à $401 + 402 + 403 + 404 + 405$, ou 2015, ce qui dépasse la somme donnée, qui est de 2012. Ainsi avec six entiers consécutifs plus grands que 400, 401, 402, 403, 404 et 405, il est impossible que cinq de ces entiers aient une somme de 2012.
Si on choisit six entiers consécutifs un peu plus petits, comme 399, 400, 401, 402, 403 et 404, la somme des cinq plus grands entiers est égale à $400 + 401 + 402 + 403 + 404$, ou 2010, ce qui est inférieur à la somme donnée, qui est de 2012. Ainsi avec six entiers consécutifs plus petits que 400, 401, 402, 403, 404 et 405, il est impossible que cinq de ces entiers aient une somme de 2012.
Les six entiers consécutifs sont donc 400, 401, 402, 403, 404 et 405 et on a effacé le nombre 403.
La somme de ses chiffres est égale à $4 + 0 + 3$, ou 7.
(Il est à remarquer que puisqu'il s'agit d'une réponse à choix multiple, on pouvait s'arrêter dès qu'on avait trouvé une réponse appropriée.)

Solution 2
Soit x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ et $x + 5$ les six entiers consécutifs et soit $x + a$ l'entier qui est effacé, a étant égal à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
La some des cinq entiers qui restent est donc égale à

$$(x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5)) - (x + a)$$

Donc :

$$\begin{aligned}(x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5))-(x+a) &= 2012\\ (6x+15)-(x+a) &= 2012\\ 5x+15 &= 2012+a\\ 5(x+3) &= 2012+a\end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche est un entier qui est divisible par 5, le membre de droite doit l'être aussi. Puisque a peut prendre une valeur de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 et que $2012+a$ doit être divisible par 5, alors a doit être égal à 3.
Donc $5(x+3)=2015$, d'où $x+3=403$, ou $x=400$.
On a effacé l'entier $x+3$, c'est-à-dire 403. La somme de ses chiffres est égale à $4+0+3$, ou 7.

Réponse : (C)

19. Soit S la somme des quatre entiers sur n'importe quel segment.
On a donc $S=9+p+q+7=3+p+u+15=3+q+r+11=9+u+s+11=15+s+r+7$.
Donc :

$$\begin{aligned}5S &= (9+p+q+7)+(3+p+u+15)+(3+q+r+11)+(9+u+s+11)+(15+s+r+7)\\ &= 2p+2q+2r+2s+2u+90\\ &= 2(p+q+r+s+u)+90\end{aligned}$$

Puisque p, q, r, s et u sont les nombres 19, 21, 23, 25 et 27 dans un ordre quelconque, alors :

$$p+q+r+s+u=19+21+23+25+27=115$$

Donc $5S=2(115)+90$, ou $5S=320$, d'où $S=64$.
Puisque $S=64$, alors $3+p+u+15=64$, d'où $p+u=46$.
Puisque $S=64$, alors $15+s+r+7=64$, d'où $s+r=42$.
Puisque $q=(p+q+r+s+u)-(p+u)-(s+r)$, alors $q=115-46-42$, ou $q=27$.

Réponse : (D)

20. Pour déterminer N, le plus petit entier positif dont les chiffres ont un produit de 2700, il faut d'abord déterminer le nombre minimal de chiffres qui pourraient donner ce produit. En effet, moins il y a de chiffres, plus le nombre est petit.
On déterminera ensuite les chiffres qui ont un produit de 2700 et on les placera en ordre croissant pour former les chiffres de N. (Plus le premier chiffre d'un nombre formé de ces chiffres est petit, plus le nombre est petit. Ensuite, plus le deuxième chiffre est petit, plus le nombre est petit et ainsi de suite.)
On remarque que N ne peut avoir un chiffre 0, sinon le produit des chiffres serait égal à 0.
De plus, N ne peut avoir un chiffre 1, sinon on obtiendrait le même produit des chiffres si on enlevait le 1 et on aurait alors un nombre plus petit. Or, N est *le plus petit* nombre dont les chiffres ont un produit de 2700.

Puisque les chiffres de N ont un produit de 2700, on écrit 2700 en factorisation première pour faciliter la recherche des chiffres de N :

$$2700=27\times 100=3^3\times 10^2=3^3\times 2^2\times 5^2$$

Le seul chiffre non nul qui est divisible par 5 est 5.
Puisque 2700 admet deux diviseurs 5, le nombre N doit donc comporter deux chiffres 5.

Les autres chiffres ont un produit de $3^3 \times 2^2$, ou 108.
On cherche donc un nombre minimal de chiffres qui ont un produit de 108.
Il est impossible d'avoir deux chiffres qui ont un produit de 108, car le plus grand produit possibles de deux chiffres est égal à 9×9, ou 81.
Il est possible de trouver trois chiffres qui ont un produit de 108 (p. ex., $2 \times 6 \times 9$ ou $3 \times 6 \times 6$).
Donc, le nombre N a 5 chiffres, soit deux fois le chiffre 5 et trois autres chiffres qui ont un produit de 108.
Pour que N soit aussi petit que possible, il faut que son 1er chiffre, le chiffre des dix-mille, soit aussi petit que possible. Or, on sait que N ne peut pas avoir un chiffre 1.
Le plus petit chiffre suivant est 2. Ce 2 doit donc être un des trois chiffres qui ont un produit de 108. Les deux autres de ces trois chiffres doivent donc avoir un produit égal à $108 \div 2$, ou 54. Il s'agit donc d'un 6 et d'un 9.
Les chiffres de N sont donc 2, 6, 9, 5 et 5. Ces chiffres forment un plus petit nombre possible lorsqu'on les place en ordre croissant. Donc $N = 25\,569$.
Les chiffres de N ont donc une somme de $2 + 5 + 5 + 6 + 9$, ou 27.

Réponse : (E)

21. On factorise le membre de gauche de l'équation $x + xy = 391$ pour obtenir $x(1 + y) = 391$.
Or $391 = 17 \cdot 23$.
Puisque 17 et 23 sont tous deux premiers, alors il n'y a que deux façons d'exprimer 391 comme produit de deux entiers, soit 1×391 et 17×23.
Puisque x et $y + 1$ sont des entiers strictement positifs, les possibilités pour $x(1 + y) = 391$ sont $x = 1$ et $1 + y = 391$, ou $x = 391$ et $y + 1 = 1$, ou $x = 17$ et $y + 1 = 23$, ou $x = 23$ et $y + 1 = 17$.
Donc (x, y) est égal à $(1, 390)$ ou $(391, 0)$ ou $(17, 22)$ ou $(23, 16)$.
Puisque y est strictement positif, le deuxième couple est rejeté.
Puisque $x > y$, le premier et le troisième couple sont rejetés.
Donc $(x, y) = (23, 16)$, d'où $x + y = 39$.

Réponse : (B)

22. Puisque les cinq singes sont numérotés au hasard, alors la probabilité pour qu'un singe en particulier soit nommé Singe 1 est égale à $\frac{1}{5}$. On considère cinq cas.

<u>1er cas</u> : Si le singe qui était en position P est nommé Singe 1, alors il reste à sa place et le singe qui était en position R ne peut pas se retrouver en position P à la fin.

<u>2e cas</u> : Si le singe qui était en position Q est nommé Singe 1, alors à la fin, Singe 2 est en position R, Singe 3 est en position S, Singe 4 est en position T et Singe 5 est en position P. Donc si Singe 1 était en position Q, c'est Singe 5 qui bouge de la position R à la position P.

<u>3e cas</u> : Si le singe qui était en position R est nommé Singe 1, alors il reste à sa place et ne peut se rendre à la position P.

<u>4e cas</u> : Si le singe qui était en position S est nommé Singe 1, alors à la fin, Singe 2 est en position T, Singe 3 est en position P, Singe 4 est en position Q et Singe 5 est en position R. Donc si Singe 1 était en position S, c'est Singe 3 qui bouge de la position R à la position P.

<u>5e cas</u> : Si le singe qui était en position T est nommé Singe 1, alors à la fin, Singe 2 est en position P, Singe 3 est en position Q, Singe 4 est en position R et Singe 5 est en position S. Donc si Singe 1 était en position T, c'est Singe 2 qui bouge de la position R à la position P.

Il faut donc considérer davantage les 2e, 4e et 5e cas.

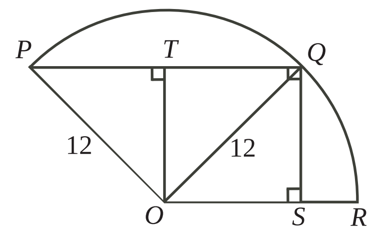
- En se référant au 2e cas, quelle est la probabilité pour qu'au départ, la position Q soit occupée par Singe 1 et que la position R soit occupée par Singe 5 ? On sait que la probabilité pour la position Q soit occupée par Singe 1 est de $\frac{1}{5}$. Dans ce cas, puisque les singes sont numérotés au hasard, la probabilité pour que la position R soit occupée par Singe 5 est de $\frac{1}{4}$. Donc, la probabilité pour qu'au départ, la position Q soit occupée par Singe 1 et que la position R soit occupée par Singe 5 est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{20}$.

- De même, en se référant au 4e cas, la probabilité pour que Singe 1 occupe la position S et que Singe 3 occupe la position R est de $\frac{1}{20}$.
- En se référant au 5e cas, la probabilité pour que Singe 1 occupe la position T et que Singe 2 occupe la position R est de $\frac{1}{20}$.

Donc, la probabilité pour que le singe qui était en position R se retrouve maintenant en position P est de $3 \cdot \frac{1}{20}$, ou $\frac{3}{20}$.

Réponse : (C)

23. On trace le segment OQ et au point O, on abaisse une perpendiculaire OT à PQ.



Puisque le cercle a un rayon de 12, alors $OP = OQ = 12$.
On considère les triangles OTP et OTQ. Chacun est rectangle, ils partagent le côté OT, et les hypoténuses (OP et OQ) sont isométriques. Donc, ces triangles sont isométriques.
On considère le quadrilatère $TQSO$. Puisque trois de ses angles sont droits, le quatrième doit l'être aussi. Donc $\angle TOS = 90°$.
Donc $\angle TOP = 135° - 90°$, ou $\angle TOP = 45°$.
Puisque les mesures des angles du triangle OTP ont une somme de 180°, alors $\angle OPT = 180° - 90° - 45°$, d'où $\angle OPT = 45°$.
Le triangle OTP est isocèle et rectangle. Il a une hypoténuse de 12.
Puisque les triangles OTQ et OTP sont isométriques, le premier aussi est isocèle et rectangle et il a une hypoténuse de 12.
Puisque $\angle TOP = \angle TOQ = 45°$, alors $\angle QOS = 135° - 45° - 45°$, ou $\angle QOS = 45°$. Or, le triangle OQS est rectangle et il a un angle de 45°. Son troisième angle doit donc mesurer 45°. Donc, le triangle OQS aussi est isocèle et rectangle et il a une hypoténuse de 12.
Les triangles OQS et OTQ sont donc isométriques.
L'aire du trapèze $OPQS$ est donc égale à 3 fois l'aire d'un triangle rectangle isocèle ayant une hypoténuse de 12.
On considère un de ces triangles, OTP. Soit $OT = TP = a$.
Puisque le triangle OTP est un triangle remarquable $45° - 45° - 90°$, alors $OP = \sqrt{2}a$.
(On peut le voir en utilisant le théorème de Pythagore :

$$OP = \sqrt{OT^2 + TP^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

puisque $a > 0$.)
Puisque $OP = 12$, alors $\sqrt{2}a = 12$, ou $a = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$.
L'aire du triangle OTP est égale à $\dfrac{1}{2}(OT)(TP)$. Elle est donc égale à $\dfrac{1}{2}a^2$, ou $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{12}{\sqrt{2}}\right)^2$, ou $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{144}{2}\right)$, ou 36.
Donc, l'aire du trapèze $OPQS$ est égale à 3×36, ou 108.

Réponse : (C)

24. On détermine d'abord le nombre de structures possibles dans les échanges de livres. On déterminera ensuite le nombre de façons d'attribuer les amis à ces structures.
On suppose que les six amis échangent des livres selon les critères de l'énoncé.
On considère une personne quelconque que l'on nomme A.
A doit donner un livre à une autre personne que l'on nomme B (on écrit $A \to B$).
B ne peut donner un livre à A. Donc, B doit donner un livre à une troisième personne que l'on nomme C (on a maintenant $A \to B \to C$).
C ne peut donner un livre à B, puisqu'il reçoit un livre de B et qu'en plus, B a déjà reçu un livre de A. Donc, C a deux choix : il peut donner un livre à A ($A \to B \to C \to A$) ou à une quatrième personne que l'on nomme D ($A \to B \to C \to D$).

<u>1er choix</u> : $A \to B \to C \to A$
Dans ce cas, les trois personnes, A, B et C, ont chacune donné un livre et reçu un livre. Donc la quatrième personne, que l'on nomme D, doit donner un livre à une cinquième personne que l'on nomme E (on a $A \to B \to C \to A$; $D \to E$).
E ne peut donner un livre à D, ni à A, à B ou à C, qui en ont déjà reçu un. Il doit donc donner un livre à une sixième personne que l'on nomme F (on a $A \to B \to C \to A$; $D \to E \to F$).
F peut seulement donner un livre à D, puisque les autres personnes ont déjà reçu un livre. Ceci complète le premier choix de C (on écrit $A \to B \to C \to A$; $D \to E \to F \to D$).

<u>2e choix</u> : $A \to B \to C \to D$
Dans ce cas, D ne peut donner un livre à B ou à C qui ont déjà reçu un livre. Donc, D a deux choix : il peut donner un livre à A ou à une des deux personnes qui restent.
Si D donne un livre à A, alors chacune des quatre personnes, A, B, C et D, a donné un livre et a reçu un livre. Les deux personnes qui restent doivent alors échanger leur livre l'une avec l'autre, ce qui est interdit.
Donc, D doit donner un livre à une des deux personnes qui restent, que l'on nomme E (on a $A \to B \to C \to D \to E$).
À ce point-ci, seules deux personnes n'ont pas encore reçu un livre, soit A et la sixième personne que l'on nomme F. E doit donner un livre à F, autrement F n'aura reçu aucun livre. F doit donc donner un livre à A.
On a la structure $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$.

Donc, il n'y a que deux structures possibles pour l'échange, soit :
1) $A \to B \to C \to A$ et $D \to E \to F \to D$
2) $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$.
(On peut dire que la première structure est formée de deux cycles de 3 personnes et que la deuxième est formée d'un cycle de six personnes.)

On suppose que les six amis se nomment P, Q, R, S, T et U. (On pourrait dire Paul, Quang, Renée, Safa, Théo et Ursule, mais on épargnera de l'espace en utilisant les lettres seulement.) On doit compter le nombre de façons qu'il y a d'attribuer les positions de A à F aux six amis dans chacune des structures précédentes. Il faudra faire attention, car l'attribution

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & A \\ P & & Q & & R & & P \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} D & \to & E & \to & F & \to & D \\ S & & T & & U & & S \end{array}$$

dans la première structure est la même que l'attribution

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & A \\ U & & S & & T & & U \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} D & \to & E & \to & F & \to & D \\ Q & & P & & R & & Q \end{array}$$

mais elle est différente de l'attribution :

A	$\rightarrow$	B	$\rightarrow$	C	$\rightarrow$	A		D	$\rightarrow$	E	$\rightarrow$	F	$\rightarrow$	D
P		R		Q		P		S		T		U		S

- 1re structure : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ et $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$
  Puisqu'il s'agit de deux cycles, la position d'une personne dans un cycle n'importe pas. On peut donc attribuer la position A à P.
  Il y a 5 personnes (tous sauf P) à qui on peut attribuer la position B.
  Pour chacun de ces 5 choix, il y a 4 personnes (tous sauf P et la personne dans la position B) à qui on peut attribuer la position C. Ceci complète le premier cycle.
  Les trois dernières personnes doivent former le deuxième cycle.
  On peut supposer que les trois dernières personnes sont S, T et U.
  On peut attribuer la position D à S.
  Il y a 2 personnes (T ou U) à qui on peut attribuer la position E.
  Dans chaque cas, il y a 1 personne à qui on peut attribuer la position F.
  Le nombre de façons d'attribuer les positions de cette structure est donc égal à $5 \times 4 \times 2 \times 1$, ou 40.
- 2e structure : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$
  Puisqu'il s'agit d'un cycle, la position d'une personne dans le cycle n'importe pas. On peut donc attribuer la position A à P.
  Il y a 5 personnes (tous sauf P) à qui on peut attribuer la position B.
  Pour chacun de ces 5 choix, il y a 4 personnes (tous sauf P et la personne dans la position B) à qui on peut attribuer la position C.
  De même, il y a 3 choix pour la position D, 2 choix pour la position E et 1 choix pour la position F.
  Le nombre de façons d'attribuer les positions de cette structure est donc égal à $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 120.

Le nombre total de façons d'échanger les livres est donc égal à $40 + 120$, ou 160.

Réponse : (E)

25. Soit $S(n)$ la somme des chiffres du nombre n et soit $S(2n)$ la somme des chiffres du nombre $2n$. Dans le tableau ci-dessous, on indique comment chaque chiffre de n contribue à $S(2n)$. Le contenu du tableau sera justifié à la toute fin.

Chiffre de n	2×Chiffre	Contribution à $S(2n)$
0	0	0
1	2	2
2	4	4
3	6	6
4	8	8
5	10	$1 + 0 = 1$
6	12	$1 + 2 = 3$
7	14	$1 + 4 = 5$
8	16	$1 + 6 = 7$

On utilise les données du tableau pour répondre à la question. On sait que les chiffres de n ne comprennent aucun 9, mais qu'ils comprennent exactement quatre 8, trois 7 et deux 6 (et d'autres chiffres). Ces trois chiffres contribuent $4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6$, ou 65, à $S(n)$. Les autres chiffres de n doivent donc contribuer $104 - 65$, ou 39, à cette somme.

Supposons que les chiffres de n comprennent m fois le chiffre 5. Cela contribue $5m$ à $S(n)$, et les autres chiffres de n, qui peuvent comprendre les chiffres de 0 à 4, contribuent $39 - 5m$ à la somme.
On considère maintenant les chiffres de $2n$.
D'après le tableau, les chiffres 8, 7 et 6 de n contribuent respectivement 7, 5 et 3 à $S(2n)$. Donc, les quatre 8, les trois 7 et les deux 6 de n contribuent $4 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3$, ou 49 à $S(2n)$.
Chaque chiffre 5 de n contribue 1 à $S(2n)$. Donc, les m chiffres 5 de n contribuent $m \cdot 1$, ou m à $S(2n)$.
Les chiffres de 0 à 4 de n contribuent deux fois plus à $S(2n)$ que ce qu'ils contribuent à $S(n)$. La somme de leurs contributions à $S(2n)$ est donc le double de la somme de leurs contributions à $S(n)$.
Puisqu'ils contribuent une somme de $39 - 5m$ à $S(n)$, alors ils contribuent une somme de $2(39 - 5m)$ à $S(2n)$.
Puisque $S(2n) = 100$, alors $49 + m + 2(39 - 5m) = 100$.
Donc $127 - 9m = 100$, d'où $9m = 27$, ou $m = 3$.
Donc, le chiffre 5 paraît trois fois dans n.

On doit maintenant justifier le contenu du tableau.
Supposons que n se termine par les chiffres $dcba$. Donc $n = \cdots dcba$.
On a donc $n = \cdots + 1000d + 100c + 10b + a$.
Donc $2n = \cdots + 1000(2d) + 100(2c) + 10(2b) + (2a)$. Or, les valeurs $2d$, $2c$, $2b$ et $2a$ peuvent être formées d'un ou deux chiffres.
Soit $u(2a)$ le chiffre des unités de $2a$ et soit $t(2a)$ le chiffre des dizaines de $2a$.
On sait que $u(2a)$ peut égaler 0, 2, 4, 6 ou 8, tandis que $t(2a)$ peut égaler 0 ou 1.
On définit $u(2b), t(2b), u(2c), t(2c), u(2d), t(2d)$ de la même façon.
On remarque que $2a = 10 \cdot t(2a) + u(2a)$, $2b = 10 \cdot t(2b) + u(2b)$, $2c = 10 \cdot t(2c) + u(2c)$ et $2d = 10 \cdot t(2d) + u(2d)$.
Donc :

$$\begin{aligned} 2n &= \cdots + 1000(10 \cdot t(2d) + u(2d)) + 100(10 \cdot t(2c) + u(2c)) \\ &\qquad +10(10 \cdot t(2b) + u(2b)) + (10 \cdot t(2a) + u(2a)) \\ &= \cdots + 1000(u(2d) + t(2c)) + 100(u(2c) + t(2b)) + 10(u(2b) + t(2a)) + u(2a) \end{aligned}$$

Puisque $u(2a), u(2b), u(2c), u(2d) \leq 8$ et $t(2a), t(2b), t(2c), t(2d) \leq 1$, alors chacune des expressions $u(2d)+t(2c)$, $u(2c)+t(2b)$, $u(2b)+t(2a)$ et $u(2a)$ représente un seul chiffre. Elles représentent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités de $2n$.
La somme des chiffres de $2n$ est donc égale à :

$$\begin{aligned} u(2a) + (u(2b) + t(2a)) + (u(2c) + t(2b)) + (u(2d) + t(2c)) + \cdots &= \\ (t(2a) + u(2a)) + (t(2b) + u(2b)) + (t(2c) + u(2c)) + \cdots & \end{aligned}$$

Cet argument peut aussi être utilisé pour les autres chiffres de n.
Donc si r est un chiffre de n, alors la somme des chiffres des unités et des dizaines de $2r$ contribue à la somme des chiffres de $2n$.
Donc, les chiffres de n contribuent à la somme des chiffres de $2n$ comme dans le tableau ci-haut.

Réponse : (D)