Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2012

le mardi 20 novembre 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 21 novembre 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Le périmètre de la figure $ABCDEF$ est égal à $AB + BC + CD + DE + EF + FA$.
   Puisque tous les angles sont droits, AB et EF sont parallèles à CD.
   De plus, la longueur de AB plus celle de EF est égale à celle de CD.
   De même, AF et ED sont parallèles à BC et $AF + ED = BC$.
   Donc, le périmètre est égal à :

$$\begin{aligned}
AB + BC + CD + DE + EF + FA &= (AB + EF + CD) + (BC + ED + AF) \\
&= (AB + EF + (AB + EF)) + (BC + BC) \\
&= 2(AB + EF) + 2(BC) \\
&= 2(8 + 5) + 2(15) \\
&= 26 + 30 \\
&= 56
\end{aligned}$$

Réponse : 56

2. *Solution 1*
   On peut récrire l'équation $x^3 - 4x = 0$ sous la forme $x(x^2 - 4) = 0$, ou $x(x + 2)(x - 2) = 0$.
   Les racines de l'équation sont donc $0, -2$ et 2.
   Ces racines sont donc les valeurs de a, b et c dans un ordre quelconque.
   Donc $abc = 0(-2)(2)$, d'où $abc = 0$.
   (On remarque qu'il suffit de déterminer qu'une des racines est égale à 0 pour conclure que le produit des racines est égal à 0.)

   Solution 2
   Étant donné une équation polynôme du troisième degré de la forme $x^3 - Sx^2 + Tx - P = 0$, le produit des racines est égal à P.
   L'équation donnée est de la forme $x^3 - 0x^2 + (-4)x - 0 = 0$.
   Puisque les racines sont a, b et c, alors $P = abc$ et puisque $P = 0$, alors $abc = 0$.

Réponse : 0

3. *Solution 1*
   On fait appel à une loi des exposants qui correspond au comptage des facteurs :

$$\begin{aligned}
3^x &= 3^{20} \cdot 3^{20} \cdot 3^{18} + 3^{19} \cdot 3^{20} \cdot 3^{19} + 3^{18} \cdot 3^{21} \cdot 3^{19} \\
&= 3^{20+20+18} + 3^{19+20+19} + 3^{18+21+19} \\
&= 3^{58} + 3^{58} + 3^{58} \\
&= 3(3^{58}) \\
&= 3^{1+58} \\
&= 3^{59}
\end{aligned}$$

   Puisque $3^x = 3^{59}$, alors $x = 59$.

Solution 2

On simplifie le membre de droite par la mise en évidence d'un facteur commun que l'on obtient en prenant la plus petite des puissances parmi les premiers facteurs des trois termes, la plus petite des puissances parmi les deuxièmes facteurs des trois termes et la plus petite des puissances parmi les troisièmes facteurs des trois termes :

$$\begin{aligned}
3^x &= 3^{20}\cdot 3^{20}\cdot 3^{18} + 3^{19}\cdot 3^{20}\cdot 3^{19} + 3^{18}\cdot 3^{21}\cdot 3^{19} \\
&= 3^{18}\cdot 3^{20}\cdot 3^{18}(3^2\cdot 3^0\cdot 3^0 + 3^1\cdot 3^0\cdot 3^1 + 3^0\cdot 3^1\cdot 3^1) \\
&= 3^{18+20+18}(9\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 3) \\
&= 3^{56}(9+9+9) \\
&= 3^{56}(27) \\
&= 3^{56}3^3 \\
&= 3^{59}
\end{aligned}$$

Puisque $3^x = 3^{59}$, alors $x = 59$.

Réponse : $x = 59$

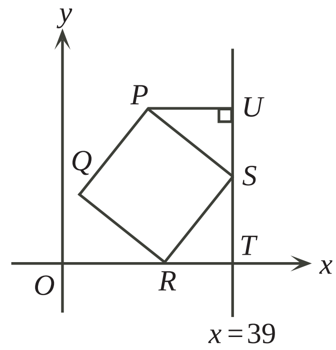
4. Soit d le nombre de rondelles dorées. On sait qu'une des boites contient toutes les 40 rondelles noires et exactement $\frac{1}{7}$ des rondelles dorées. Elle contient donc $40 + \frac{1}{7}d$ rondelles.
Les deux autres boites contiennent donc les $\frac{6}{7}d$ autres rondelles dorées et aucune rondelle noire.
On sait que les trois boites contiennent chacune un nombre égal de rondelles.
Puisque les deuxième et troisième boites contiennent un nombre égal de rondelles, chacune contient $\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}d$ rondelles dorées, c'est-à-dire $\frac{3}{7}d$ rondelles dorées.
Puisque les première et deuxième boites contiennent un nombre égal de rondelles, alors $40 + \frac{1}{7}d = \frac{3}{7}d$, ou $\frac{2}{7}d = 40$, d'où $d = \frac{7}{2}(40)$, ou $d = 140$.
Il y a donc 140 rondelles dorées en tout.
(On peut vérifier que puisqu'il y a 140 rondelles dorées, alors la première boite contient 40 rondelles noires et 20 rondelles dorées pour un total de 60 rondelles et que les deux autres boites contiennent chacune la moitié des 120 rondelles dorées restantes, soit 60 rondelles dorées chacune.)

Réponse : 140

5. Puisque les côtés du carré ont une longueur de 25, alors $QR = RS = SP = PQ = 25$.
Puisque Q a pour coordonnées $(0, 7)$, alors $QO = 7$.
Le triangle QOR est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, puisque $OR > 0$, on a :

$$OR = \sqrt{QR^2 - OQ^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$$

(On peut aussi reconnaître le triangle rectangle 7-24-25.)
Soit T le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite d'équation $x = 39$. T a pour coordonnées $(39, 0)$.
Puisque $OR = 24$, alors $RT = OT - OR$, d'où $RT = 39 - 24$, ou $RT = 15$.
On fait subir au carré une rotation de centre R jusqu'à ce que le point S soit situé sur la droite d'équation $x = 39$.
Soit U le point sur la droite d'équation $x = 39$ pour lequel PU est perpendiculaire à UT. On remarque que U est au-dessus de S, sur cette droite, puisque P est plus haut que S.



Le triangle RTS est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore, puisque $ST > 0$, on a :

$$ST = \sqrt{RS^2 - RT^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$$

(On peut aussi reconnaître le triangle rectangle 15-20-25.)
Puisque ST est vertical, alors S a pour coordonnées $(39, 20)$.
Or, les triangles SUP et RTS sont isométriques, puisqu'ils sont rectangles, qu'ils ont une hypoténuse de même longueur et que :

$$\angle SPU = 90^\circ - \angle PSU = 90^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \angle RST) = \angle RST$$

Donc $PU = ST = 20$ et $SU = RT = 15$.
Puisque S a pour coordonnées $(39, 20)$, alors U a pour coordonnées $(39, 20 + 15)$, ou $(39, 35)$.
Donc P a pour coordonnées $(39 - 20, 35)$, ou $(19, 35)$.

Réponse : $(19, 35)$

6. On considère que le parquet du hall d'entrée est formé de 2 rangées et 13 colonnes.
On résout le problème en déterminant le nombre de façons qu'il existe de placer les 11 carreaux noirs (les autres carreaux étant ainsi blancs). Puisqu'il ne peut pas y avoir deux carreaux noirs adjacents, il ne peut pas y avoir deux carreaux noirs dans une même colonne.
Donc, chaque colonne a 0 carreau noir ou 1 carreau noir.
Puisqu'il y a 11 carreaux noirs en tout, il doit y avoir 11 colonnes qui contiennent un carreau noir et 2 colonnes qui ne contiennent aucun carreau noir.
On dénote par un V chaque colonne qui ne contient aucun carreau noir.
Une colonne qui contient un carreau noir est notée H s'il s'agit du carreau du haut ou B s'il s'agit du carreau du bas.
Puisqu'il ne peut pas y avoir deux carreaux noirs adjacents, il ne peut pas y avoir de colonnes adjacentes qui contiennent chacune un carreau noir en haut ou chacune un carreau noir en bas.
Le problème est donc équivalent à celui de déterminer le nombre possible de suites de 13 lettres, soit une lettre par colonne et chaque lettre étant un V, un H ou un B, de manière qu'il y ait exactement deux V (pour les deux colonnes sans carreau noir) et qu'il n'y ait pas deux H consécutifs ou deux B consécutifs.

On considère plusieurs cas possibles selon la position des lettres V. On note cependant que si l'on a un bloc de lettres formé des lettres H et B seulement, alors il n'y a que deux possibilités. Ou bien le bloc commence par un H, ou bien il commence par un B. Ensuite, les lettres doivent alterner pour éviter deux lettres identiques consécutives.

<u>1[er] cas : Deux V consécutifs placés au début ou à la fin</u>
On a donc VV au début ou VV à la fin.
Dans chacun de ces deux cas, il y a un bloc formé des lettres H et B seulement. Ce bloc suit VV ou précède VV.
Ou bien ce bloc commence par un H (HBHB$\cdots$) ou bien il commence par un B (BHBH$\cdots$).
Dans ce cas, le nombre possible de suites de lettres est égal à 2×2, ou 4.

<u>2[e] cas : Deux V consécutifs qui ne sont pas placés au début ou à la fin</u>
Il y a 10 positions possibles pour VV, commençant dans la colonne 2 jusqu'à la colonne 11.
Il y a alors 2 blocs formés par les lettres H et B seulement, soit un devant VV et un après.
Chacun de ces blocs peut commencer par un H ou par un B.
Dans ce cas, le nombre possible de suites de lettres est égal à $10 \times 2 \times 2$, ou 40.

<u>3[e] cas : Un V au début et un V à la fin</u>
Il y a un seul bloc formé par les lettres H et B seulement. Il est placé entre les deux V.
Ce bloc peut commencer par un H ou par un B.
Dans ce cas, le nombre possible de suites de lettres est égal à 2.

<u>4[e] cas : Un V placé à une extrémité et un V placé à l'intérieur</u>
Il y a deux choix pour le V placé à une extrémité.
Il y a 10 places possibles pour le V placé à l'intérieur : il ne peut pas être placé à l'autre extrémité, ni à côté de l'autre V.
Il y a alors 2 blocs formés par les lettres H et B seulement.
Chaque bloc peut commencer par un H ou par un B.
Dans ce cas, le nombre possible de suites de lettres est égal à $2 \times 10 \times 2 \times 2$, ou 80.

<u>5[e] cas : Les deux V ne sont pas adjacents et aucun des V n'est placé à une extrémité</u>
Si le premier V est placé dans la position 2, il y a 9 positions possibles pour le deuxième V, soit les positions 4 à 12.
Si le premier V est placé dans la position 3, il y a 8 positions possibles pour le deuxième V, soit les positions 5 à 12.
On continue de cette manière jusqu'à la dernière position possible du premier V, soit la position 10. Il y a alors 1 position possible pour le deuxième V, soit la position 12.
Le nombre de positions possibles pour les deux V est donc égal à $9 + 8 + 7 + \cdots + 1$, ou 45.
Dans chacun de ces cas, il y a 3 blocs formés par les lettres H et B seulement, soit à la gauche du premier V, entre les deux V et à la droite du deuxième V.
Chaque bloc peut commencer par un H ou par un B.
Dans ce cas, le nombre possible de suites de lettres est égal à $45 \times 2 \times 2 \times 2$, ou 360.

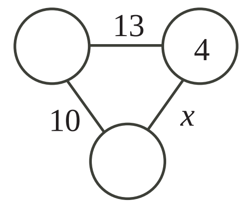
Tenant compte des cinq cas possibles, le nombre possible de suites de lettres est égal à $4 + 40 + 2 + 80 + 360$, ou 486. Il y a donc 486 façons distinctes de carreler le hall d'entrée.

RÉPONSE : 486

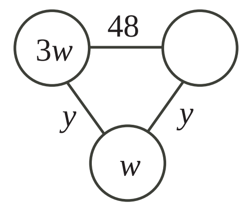
Partie B

1. Partout dans cette solution, le nombre dans le cercle en haut à gauche est appelé le *nombre à gauche*, le nombre dans le cercle en haut à droite est appelé le *nombre à droite* et le nombre dans le cercle du bas est appelé le *nombre du bas*.
   De même, le segment qui relie le nombre à gauche et le nombre à droite est appelé le *segment du haut*, le segment qui relie le nombre à gauche et le nombre du bas est appelé le *segment à gauche* et le segment qui relie le nombre à droite et le nombre du bas est appelé le *segment à droite*.

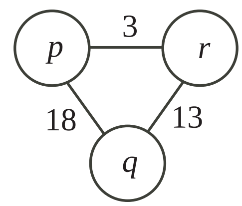
   (a) Puisque les nombres sur le segment du haut ont une somme de 13, alors le nombre à gauche est égal à $13 - 4$, ou 9.
   Puisque les nombres sur le segment à gauche ont une somme de 10, alors le nombre du bas est égal à $10 - 9$, ou 1.
   Puisque les nombres sur le segment à droite ont une somme de x, alors $x = 1 + 4$, ou $x = 5$.



   (b) D'après le segment à gauche, on a $3w + w = y$, ou $y = 4w$.
   Puisque les nombres sur le segment à droite ont aussi une somme de y, le nombre à droite est égal à $y - w$, ou $4w - w$, ou $3w$.
   D'après le segment du haut, on a $3w + 3w = 48$, ou $6w = 48$, d'où $w = 8$.
   Donc $y = 4w = 32$.



   (c) D'après le segment du haut, on a $p + r = 3$.
   D'après le segment à gauche, on a $p + q = 18$.
   D'après le segment à droite, on a $q + r = 13$.
   Il existe plusieurs façons de résoudre ce système de trois équations à trois inconnues. En voici deux.



   <u>1re façon</u>
   On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir
   $(p + r) + (p + q) + (q + r) = 3 + 18 + 13$, ou $2p + 2q + 2r = 34$.
   On divise chaque membre par 2 pour obtenir $p + q + r = 17$.
   Or, $p = (p + q + r) - (q + r)$, d'où $p = 17 - 13$, ou $p = 4$; $q = (p + q + r) - (p + r)$, d'où $q = 17 - 3$, ou $q = 14$; $r = (p + q + r) - (p + q)$, d'où $r = 17 - 18$, ou $r = -1$.
   (On peut vérifier ces résultats dans la figure initiale.)

   <u>2e façon</u>
   D'après la première équation, on a $r = 3 - p$.
   On reporte $r = 3 - p$ dans la troisième équation pour obtenir $q + (3 - p) = 13$, ou $q - p = 10$.
   On a donc $p + q = 18$ et $q - p = 10$.
   On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $2q = 28$, ou $q = 14$. Donc $p = 4$, d'où $r = -1$.

   Il existe d'autres façons de s'y prendre.
   On a donc $p = 4$, $q = 14$ et $r = -1$.

2. (a) En procédant par tâtonnements, on obtient le couple $(x, y) = (3, 2)$ qui vérifie l'équation, car $3^2 - 2(2^2) = 1$.
Si on voulait justifier qu'il s'agit de la seule solution ou si on avait voulu procéder par essais systématiques, on aurait pu laisser x prendre les valeurs de 1 à 5 et déterminer la valeur qui donne à y une valeur entière strictement positive.
Si $x = 1$, alors $1 - 2y^2 = 1$, ou $2y^2 = 0$. Aucune racine entière strictement positive.
Si $x = 2$, alors $4 - 2y^2 = 1$, ou $2y^2 = 3$. Aucune racine entière strictement positive.
Si $x = 3$, alors $9 - 2y^2 = 1$, ou $2y^2 = 8$. Une racine entière strictement positive, soit $y = 2$.
Si $x = 4$, alors $16 - 2y^2 = 1$, or $2y^2 = 15$. Aucune racine entière strictement positive.
Si $x = 5$, alors $25 - 2y^2 = 1$, ou $2y^2 = 24$. Aucune racine entière strictement positive.
Donc, le seul couple (x, y) d'entiers strictement positifs, tel que $x \leq 5$, qui vérifie l'équation ① est $(3, 2)$.

(b) On développe $(3 + 2\sqrt{2})^2$ pour obtenir :

$$u + v\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 9 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}$$

Donc, le couple $(u, v) = (17, 12)$ vérifie l'équation $(3 + 2\sqrt{2})^2 = u + v\sqrt{2}$.
De plus, $u^2 - 2v^2 = 17^2 - 2(12^2) = 289 - 2(144) = 1$. Donc, le couple $(u, v) = (17, 12)$ vérifie l'équation ①, ce qu'il fallait démontrer.

(c) Puisque le couple (a, b) vérifie l'équation ①, alors $a^2 - 2b^2 = 1$.
Puisque $(a + b\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = c + d\sqrt{2}$, alors :

$$c + d\sqrt{2} = 3a + 2a\sqrt{2} + 3b\sqrt{2} + 2b(2) = (3a + 4b) + (2a + 3b)\sqrt{2}$$

On a donc $(c, d) = (3a + 4b, 2a + 3b)$.

(On peut voir assez facilement que *si* $(c, d) = (3a + 4b, 2a + 3b)$, *alors*

$$c + d\sqrt{2} = (3a + 4b) + (2a + 3b)\sqrt{2}$$

Pour justifier que si $c + d\sqrt{2} = (3a + 4b) + (2a + 3b)\sqrt{2}$, alors $(c, d) = (3a + 4b, 2a + 3b)$, on récrit l'équation sous la forme :

$$c - 3a - 4b = (2a + 3b - d)\sqrt{2}$$

Le membre de gauche de cette équation est un entier. Si $2a + 3b - d \neq 0$, le membre de droite de l'équation est un nombre irrationnel (car $\sqrt{2}$ est irrationnel), ce qui n'est pas un entier. On doit donc avoir $2a + 3b - d = 0$, ou $d = 2a + 3b$. On a donc $c - 3a - 4b = 0$, ou $c = 3a + 4b$.)

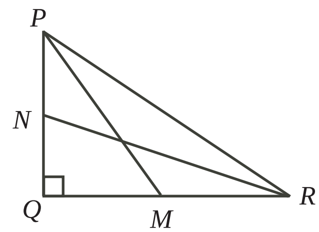
Pour montrer que le couple (c, d) vérifie l'équation ①, il faut démontrer que $c^2 - 2d^2 = 1$:

$$\begin{aligned} c^2 - 2d^2 &= (3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 \\ &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= 9a^2 + 24ab + 16b^2 - 8a^2 - 24ab - 18b^2 \\ &= a^2 - 2b^2 \\ &= 1 \qquad \text{(puisque } a^2 - 2b^2 = 1) \end{aligned}$$

Donc, le couple (c, d) vérifie l'équation ①, ce qu'il fallait démontrer.

(d) D'après la partie (c), on sait que si le couple (a, b) vérifie l'équation ①, alors le couple $(c, d) = (3a + 4b, 2a + 3b)$ vérifie aussi l'équation ①.
D'après la partie (b), on sait que le couple $(17, 12)$ vérifie l'équation ①.
D'après ces deux résultats, puisque le couple $(17, 12)$ vérifie l'équation, alors le couple $(3(17) + 4(12), 2(17) + 3(12))$, ou $(99, 70)$, vérifie aussi l'équation.
Puisque le couple $(99, 70)$ vérifie l'équation, alors le couple $(3(99) + 4(70), 2(99) + 3(70))$, ou $(577, 408)$, vérifie l'équation et la condition $y > 100$.
On peut vérifier que $577^2 - 2(408^2) = 1$.

3. (a) Puisque $PQ = 6$ et que N est le milieu de PQ, alors $PN = NQ = 3$.
Puisque $QR = 8$ et que M est le milieu de QR, alors $QM = MR = 4$.



Puisque le triangle PQM est rectangle en Q et que $PM > 0$, on obtient, par le théorème de Pythagore :

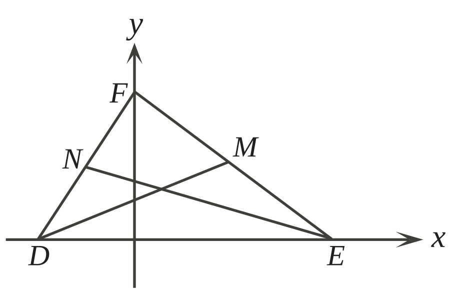
$$PM = \sqrt{PQ^2 + QM^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

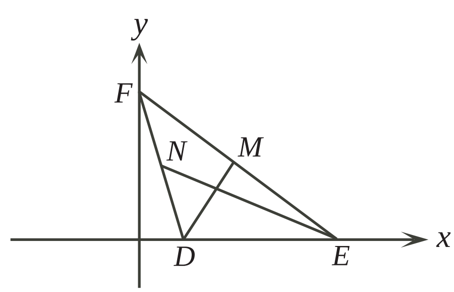
Puisque le triangle NQR est rectangle en Q et que $RN > 0$, on obtient, par le théorème de Pythagore :

$$RN = \sqrt{NQ^2 + QR^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$$

Donc, les médianes PM et RN ont pour longueur respective $2\sqrt{13}$ et $\sqrt{73}$.

(b) *Solution 1*
Soit DM et EN les deux médianes de même longueur du triangle DEF.
On place un plan cartésien sur la figure de manière que l'axe des abscisses soit situé sur le segment DE et que la partie positive de l'axe des ordonnées passe par le sommet F.
On peut supposer que l'un des sommets D et E est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses en faisant subir au triangle une réflexion horizontale au besoin. On peut aussi supposer que c'est le sommet E qui est à la droite du sommet D en renommant ces points au besoin.
Soit $(0, 2c)$ les coordonnées de F, $(2b, 0)$ les coordonnées de E et $(2a,0)$ les coordonnées de D, a, b et c étant des nombres réels tels que $b > a$, $b > 0$ et $c > 0$. Le nombre a peut être positif, négatif ou nul. (Les figures suivantes illustrent les cas $a < 0$ et $a > 0$.)





Puisque DM et EN sont des médianes, alors M est le milieu de EF et N est le milieu de DF.
Puisque E a pour coordonnées $(2b, 0)$ et que F a pour coordonnées $(0, 2c)$, alors M a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(2b+0), \frac{1}{2}(0+2c))$, ou (b, c).
Puisque D a pour coordonnées $(2a, 0)$ et que F a pour coordonnées $(0, 2c)$, alors N a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(2a+0), \frac{1}{2}(0+2c))$, ou (a, c).
Puisque D a pour coordonnées $(2a, 0)$ et que M a pour coordonnées (b, c), alors :

$$DM = \sqrt{(2a-b)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{(2a-b)^2 + c^2}$$

Puisque E a pour coordonnées $(2b{,}0)$ et que N a pour coordonnées (a, c), alors :

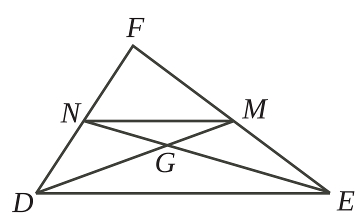
$$EN = \sqrt{(2b-a)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{(2b-a)^2 + c^2}$$

Puisque DM et EN ont la même longueur, alors :

$$\begin{aligned}
DM^2 &= EN^2 \\
(2a-b)^2 + c^2 &= (2b-a)^2 + c^2 \\
(2a-b)^2 &= (2b-a)^2 \\
4a^2 - 4ab + b^2 &= 4b^2 - 4ab + a^2 \\
3a^2 &= 3b^2 \\
a^2 &= b^2
\end{aligned}$$

Donc $a = \pm b$.
Puisque D et E sont des points distincts, alors $a \neq b$.
Donc $a = -b$.
Les sommets du triangle DEF sont donc $D(-2b, 0)$, $E(2b, 0)$ et $F(0, 2c)$.
Les côtés DF et EF ont la même longueur, soit $\sqrt{4b^2 + 4c^2}$. Le triangle DEF est donc isocèle.

Solution 2
Soit DM et EN les deux médianes de même longueur du triangle DEF et soit G leur point d'intersection.
On trace le segment MN.

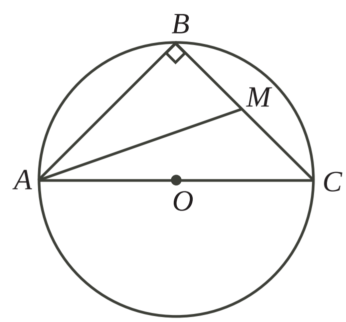


Puisque DM et EN sont des médianes, alors M est le milieu de FE (d'où $FM = ME$) et N est le milieu de FD (d'où $FN = ND$).
Puisque $\dfrac{FD}{FN} = \dfrac{FE}{FM} = 2$ et que les triangles partagent le même sommet F, le triangle FDE est l'image du triangle FNM par une homothétie de centre F et de rapport 2. On a donc $\angle FDE = \angle FNM$, $DE = 2NM$ et NM est parallèle à DE.
On considère les triangles GNM et GED.
Puisque NM est parallèle à DE, alors $\angle GNM = \angle GED$ et $\angle GMN = \angle GDE$.

Les triangles GNM et GED sont donc semblables. Puisque $NM = \frac{1}{2}DE$, le rapport de similitude est de 1 : 2.
Donc $GE = 2GN$ et $GD = 2GM$.
Puisque $DM = EN$, alors $GD + GM = GE + GN$, ou $2GM + GM = 2GN + GN$. Donc $3GM = 3GN$, ou $GM = GN$.
Le triangle GNM est donc isocèle et $\angle GNM = \angle GMN$.
On considère les triangles MNE et NMD.
Puisque les triangles partagent un côté NM, que $\angle MNE = \angle NMD$ et que $EN = DM$, les triangles sont isométriques (CAC).
Donc $ME = ND$.
Puisque $ME = \frac{1}{2}FE$ et $ND = \frac{1}{2}FD$, alors $FE = FD$. Le triangle DEF est donc isocèle.

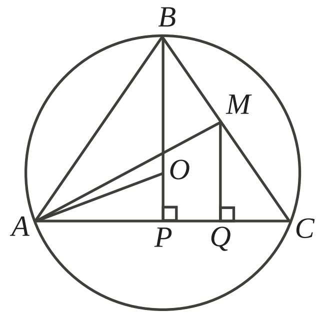
(c) Soit AM et CN les deux médianes de même longueur du triangle ABC, M étant le milieu de BC et N, le milieu de AB. On a donc $AM = CN = r$. Soit O le centre du cercle.
D'après la partie (b), le triangle ABC est isocèle et $AC = BC$.
On considère trois cas, soit $\angle ABC = 90°$, $\angle ABC < 90°$ et $\angle ABC > 90°$.

<u>1er cas : $\angle ABC = 90°$</u>
Puisque $\angle ABC = 90°$, alors AC est un diamètre du cercle de centre O et de rayon r.
Donc $AC = 2r$.
Puisque le triangle ABC est rectangle et isocèle, alors $AB = BC = \frac{1}{\sqrt{2}}AC = \sqrt{2}r$.
On trace la médiane AM de longueur r, selon l'énoncé.



Puisque le triangle MBA est rectangle en B, AM est son hypoténuse, le côté le plus long du triangle.
Donc $AM > AB = \sqrt{2}r$.
Or $AM = r$, d'où $r > \sqrt{2}r$, ou $1 > \sqrt{2}$. On a donc une contradiction.
On peut conclure que $\angle ABC \neq 90°$.

<u>2e cas : $\angle ABC < 90°$</u>
L'angle ABC est aigu et $AB = BC$.
Puisque l'angle ABC est aigu, alors B et O sont situés du même côté de AC.
Soit P le milieu de AC. On trace la médiane BP.
Puisque le triangle ABC est isocèle, BP est perpendiculaire au côté AC au point P.
Puisque O est le centre du cercle et que AC est une corde ayant pour milieu P, alors OP est perpendiculaire au côté AC au point P.
Puisque BP et OP sont tous deux perpendiculaires au côté AC au point P, alors BP passe au point O.
Au point M, on abaisse une perpendiculaire MQ à AC.

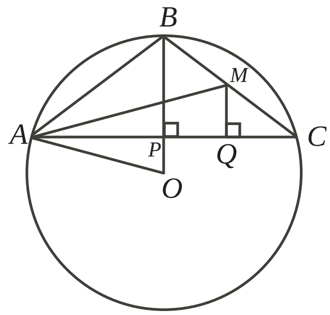


Soit $OP = x$.
Puisque OA est un rayon, d'où $OA = r$, et que $OP = x$, alors $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2}$, ou $AP = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Puisque les triangles MQC et BPC sont rectangles et qu'ils partagent l'angle C, ils sont semblables.
Puisque $BC = 2MC$, alors $PC = 2QC$ et $BP = 2MQ$.
Puisque $QC = \frac{1}{2}PC$, alors $PQ = PC - QC$, d'où $PQ = \frac{1}{2}PC$, ou $PQ = \frac{1}{2}AP$, ou $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$.
Puisque $BO = r$ et $OP = x$, alors $MQ = \frac{1}{2}BP$, d'où $MQ = \frac{1}{2}(r + x)$.
Le triangle AMQ est rectangle en Q. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
AQ^2 + MQ^2 &= AM^2 \\
(AP + PQ)^2 + MQ^2 &= AM^2 \\
\left(\sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(r + x)\right)^2 &= r^2 \\
\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(r + x)\right)^2 &= r^2 \\
\tfrac{9}{4}(r^2 - x^2) + \tfrac{1}{4}(r^2 + 2rx + x^2) &= r^2 \\
9(r^2 - x^2) + (r^2 + 2rx + x^2) &= 4r^2 \\
6r^2 + 2rx - 8x^2 &= 0 \\
3r^2 + rx - 4x^2 &= 0 \\
(3r + 4x)(r - x) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $3r = -4x$ (ce qui est impossible, puisque r et x sont strictement positifs) ou $r = x$ (ce qui impossible, car on aurait alors $AP = PC = \sqrt{r^2 - r^2} = 0$).
On peut donc conclure qu'il est impossible que $\angle ABC < 90°$.

<u>3e cas : $\angle ABC > 90°$</u>
L'angle ABC est donc obtus et $AB = BC$.
Puisque l'angle ABC est obtus, le point O est de l'autre côté de AC par rapport au point B.
Soit P le milieu de AC.
On trace les segments BP et OP.
Puisque le triangle ABC est isocèle, BP est perpendiculaire à AC.
Puisque P est le milieu de AC, OP est perpendiculaire à AC.
Donc, BPO est un segment de droite.
Au point M, on abaisse une perpendiculaire MQ à AC.



Soit $OP = x$.
Puisque $OA = r$ (il s'agit d'un rayon) et que $OP = x$, alors $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2}$, ou $AP = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Les triangles MQC et BPC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en C.
Puisque $BC = 2MC$, alors $PC = 2QC$ et $BP = 2MQ$.
Puisque $QC = \frac{1}{2}PC$, alors $PQ = PC - QC$, d'où $PQ = \frac{1}{2}PC$, ou $PQ = \frac{1}{2}AP$, ou $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$.
Puisque $BO = r$ et $OP = x$, alors $MQ = \frac{1}{2}BP$, ou $MQ = \frac{1}{2}(r - x)$.
Le triangle AMQ est rectangle en Q. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
AQ^2 + MQ^2 &= AM^2 \\
(AP + PQ)^2 + MQ^2 &= AM^2 \\
\left(\sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(r - x)\right)^2 &= r^2 \\
\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(r - x)\right)^2 &= r^2 \\
\tfrac{9}{4}(r^2 - x^2) + \tfrac{1}{4}(r^2 - 2rx + x^2) &= r^2 \\
9(r^2 - x^2) + (r^2 - 2rx + x^2) &= 4r^2 \\
6r^2 - 2rx - 8x^2 &= 0 \\
3r^2 - rx - 4x^2 &= 0 \\
(3r - 4x)(r + x) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $r = -x$ (ce qui est impossible, puisque r et x sont tous deux positifs) ou $3r = 4x$.
Dans ce dernier cas, on a donc $x = \frac{3}{4}r$.
Donc $AC = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, d'où $AC = 2\sqrt{r^2 - \frac{9}{16}r^2}$, ou $AC = 2\sqrt{\frac{7}{16}r^2}$, ou $AC = \frac{2\sqrt{7}}{4}r$, ou $AC = \frac{\sqrt{7}}{2}r$.
De plus, $AB = BC = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{16}r^2}\right)^2 + \left(r - \frac{3}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{16}r^2 + \frac{1}{16}r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$.

Après avoir tenu compte de tous les cas possibles, on peut conclure que les côtés du triangle ABC ont pour longueurs $AC = \frac{\sqrt{7}}{2}r$ et $AB = BC = \frac{\sqrt{2}}{2}r$.