Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mardi 20 novembre 2012
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 21 novembre 2012
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO   WATERLOO MATHEMATICS

Durée : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarques :

Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

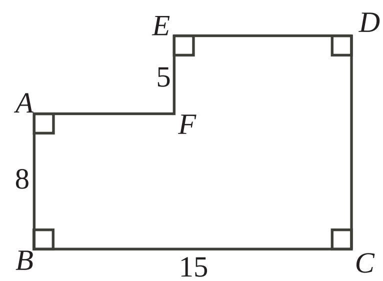
Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 . . . ou 4,646 . . .
	4.	**L'utilisation de la calculatrice est permise**, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
	5.	Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Dans la figure ci-contre, on a $AB = 8$, $BC = 15$ et $EF = 5$. Quel est le périmètre de $ABCDEF$?

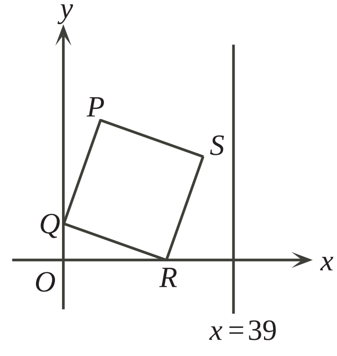


2. Il existe trois nombres réels distincts, a, b et c, qui sont des racines de l'équation $x^3 - 4x = 0$. Quelle est la valeur du produit abc ?

3. Sachant que $3^x = 3^{20} \cdot 3^{20} \cdot 3^{18} + 3^{19} \cdot 3^{20} \cdot 3^{19} + 3^{18} \cdot 3^{21} \cdot 3^{19}$, quelle est la valeur de x ?

4. Trois boites contiennent chacune un nombre égal de rondelles de hockey. Chaque rondelle est soit noire, soit dorée. Une des boites contient toutes les 40 rondelles noires et exactement $\frac{1}{7}$ des rondelles dorées. Déterminer le nombre total de rondelles dorées.

5. Dans la figure ci-contre, le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 25, le point Q a pour coordonnées $(0, 7)$ et le point R est situé sur l'axe des abscisses. On fait subir au carré une rotation de centre R, dans le sens des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que le point S soit situé sur la droite d'équation $x = 39$, au-dessus de l'axe des abscisses. Quelles sont les nouvelles coordonnées du point P à la fin de cette rotation ?

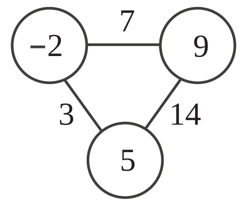


6. Lyne veut carreler son hall d'entrée qui est long et étroit. Le hall mesure 2 carreaux de large et 13 carreaux de long. Elle utilisera exactement 11 carreaux noirs et 15 carreaux blancs. Déterminer le nombre de façons distinctes de carreler le hall d'entrée de manière qu'il n'y ait pas de carreaux noirs qui soient adjacents (c.-à-d. qui partagent un même côté).

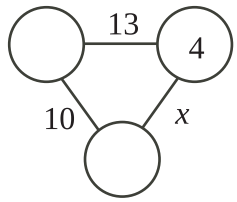
PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

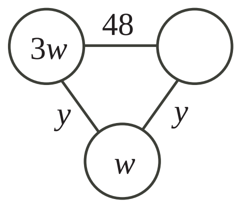
1. Dans chacune des figures de ce problème, le nombre sur un segment de droite qui relie deux cercles est égal à la somme des deux nombres dans ces deux cercles. Dans la figure ci-contre, on a une situation complète avec trois nombres et trois sommes.



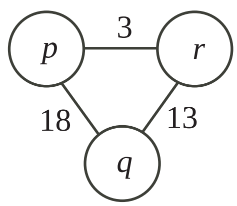
   (a) Quelle est la valeur de x ?



   (b) Déterminer la valeur de y, tout en justifiant son travail.



   (c) Déterminer les valeurs de p, q et r, tout en justifiant son travail.



2. On considère l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$, que l'on nomme ①. Il existe un bon nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation ①.

   (a) Déterminer un couple (x, y) d'entiers strictement positifs qui vérifie l'équation ① et tel que $x \leq 5$.

   (b) Déterminer un couple (u, v) d'entiers strictement positifs tel que

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = u + v\sqrt{2}$$

   et démontrer que le couple (u, v) vérifie l'équation ①.

   (c) Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs qui vérifie l'équation ①.
   Soit (c, d) un couple d'entiers strictement positifs tel que :

$$(a + b\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = c + d\sqrt{2}$$

   Démontrer que le couple (c, d) vérifie l'équation ①.

   (d) Déterminer un couple (x, y) d'entiers strictement positifs qui vérifie l'équation ① et tel que $y > 100$.

3. (a) Dans un triangle rectangle PQR, on a $\angle PQR = 90^\circ$, $PQ = 6$ et $QR = 8$. Sachant que M est le milieu de QR et que N est le milieu de PQ, déterminer la longueur de chacune des médianes PM et RN.

   (b) Le triangle DEF a deux médianes de même longueur. Démontrer que le triangle DEF est isocèle.

   (c) Les sommets du triangle ABC sont situés sur un cercle de rayon r. Sachant que le triangle ABC a deux médianes de longueur r, déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.