Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiare

le mardi 20 novembre 2012

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 21 novembre 2012

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO   WATERLOO MATHEMATICS

Durée : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarques :

Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiare

Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 ... ou 4,646 ...
	4.	**L'utilisation de la calculatrice est permise**, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
	5.	Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

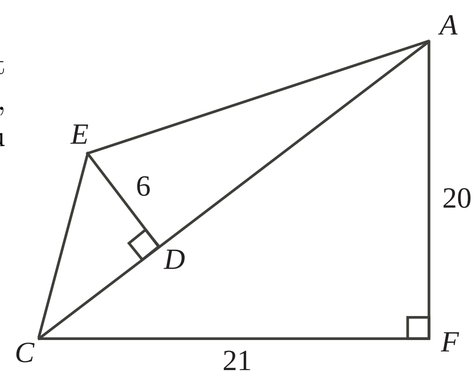
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Jeanne est dans une file d'attente avec d'autres personnes. Il y a quatre personnes devant elle et sept personnes derrière elle. Combien y a-t-il de personnes dans la file ?

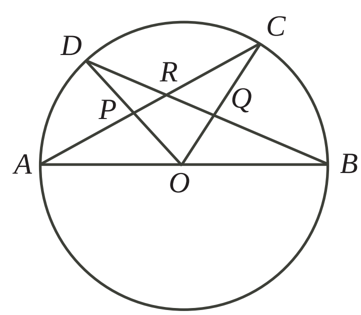
2. Lequel des nombres suivants est le plus grand : 1^{20}, 2^{14}, 4^8, 8^5 ou 16^3 ?

3. La longueur d'un rectangle est trois fois sa largeur. Si la longueur est diminuée de 5 et la largeur est augmentée de 5, le rectangle devient un carré. Déterminer la longueur du rectangle initial.

4. Dans la figure ci-contre, $\angle AFC = 90°$, le point D est situé sur AC, $\angle EDC = 90°$, $CF = 21$, $AF = 20$ et $ED = 6$. Déterminer l'aire totale du quadrilatère $AFCE$.



5. Dans la figure ci-contre, AB est un diamètre du cercle de centre O. C et D sont des points sur le cercle. OD coupe AC en P, OC coupe BD en Q et AC coupe BD en R. Sachant que $\angle BOQ = 60°$ et que $\angle APO = 100°$, calculer la mesure de l'angle BQO.



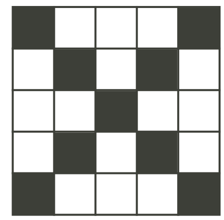
6. On peut écrire des entiers en utilisant des bases autres que la base 10 usuelle. Par exemple, la notation $(235)_7$ représente en base 7 l'entier $2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$ (ce qui est égal à 124 en base 10). De façon générale, si x, y et z sont des entiers de 0 à $b-1$, alors $(xyz)_b = xb^2 + yb + z$.

   Trouver tous les triplets (x, y, z) pour lesquels $(xyz)_{10} = 2(xyz)_7$, les valeurs des variables x, y et z provenant de la liste 1, 2, 3, 4, 5, 6.

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Colin reçoit un quadrillage carré dont les dimensions sont un entier impair. Le carré est divisé en petits carreaux 1 sur 1. Colin noircit les petits carreaux situés sur les diagonales. Il ne noircit aucun autre carreau. Par exemple, voici un quadrillage 5 sur 5 dont Colin a noirci les carreaux sur les diagonales.



   (a) Colin reçoit un quadrillage carré 7 sur 7. Combien de carreaux 1 sur 1 noircit-il ?

   (b) Colin reçoit un quadrillage carré 101 sur 101. Expliquer pourquoi il noircit 201 petits carreaux 1 sur 1.

   (c) Colin reçoit un autre quadrillage carré dont les dimensions sont un entier impair. Il noircit 41 carreaux 1 sur 1. Combien y a-t-il de carreaux 1 sur 1 *non noircis* dans le quadrillage ?

   (d) Colin reçoit un autre quadrillage carré dont les dimensions sont un entier impair. Lorsqu'il a fini de noircir les carreaux, il reste 196 carreaux 1 sur 1 *non noircis* dans le quadrillage. Combien de carreaux 1 sur 1 y a-t-il en tout dans ce quadrillage ?

2. La droite D_1 a pour équation $y = -\frac{4}{3}x$ et elle passe à l'origine O. La droite D_2 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 5$ et elle coupe l'axe des abscisses au point P. Les droites D_1 et D_2 se coupent au point Q.

   (a) Quelles sont les coordonnées des points P et Q ? (Il n'est pas nécessaire de justifier sa réponse.)

   (b) Déterminer l'aire du triangle OPQ.

   (c) Le point R est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses de manière que l'aire du triangle OQR soit trois fois l'aire du triangle OPQ. Déterminer les coordonnées du point R.

   (d) Le point S a pour coordonnées $(18, t)$, $t > 0$. Sachant que l'aire du triangle OQS est trois fois l'aire du triangle OPQ, déterminer la valeur de t.

3. Pour commencer, Valérie utilise un nombre n tel que $0 < n < 1$. Valérie entre ce nombre dans une machine qui produit alors un deuxième nombre. Elle entre ce deuxième nombre dans la machine qui produit alors un troisième nombre. Valérie continue à remettre chaque nouveau nombre dans la machine, ce qui lui donne une série de nombres.

   Lorsque Valérie entre le nombre x dans la machine,

   – si $x \leq \frac{1}{2}$, la machine produit le nombre $2x$ et

   – si $x > \frac{1}{2}$, la machine produit le nombre $2(1 - x)$.

   Si jamais la machine produit le nombre 1, Valérie cesse tout.

   (a) Lorsque Valérie entre le premier nombre $\frac{3}{11}$, elle obtient la série $\frac{3}{11} \to \frac{6}{11} \to \frac{10}{11} \to \frac{2}{11} \to \cdots$ Quels sont les quatre nombres suivants de cette série ?

   (b) Valérie entre un nombre x $(0 < x < 1)$ dans la machine et la machine produit le nombre x. Déterminer la valeur de x.

   (c) Le quatrième nombre d'une série est 1. Déterminer toutes les valeurs possibles du premier nombre de la série.

   (d) Il existe des entiers positifs m $(m > 3)$ pour lesquels si le premier nombre d'une série est égal à $\dfrac{2}{m}$, alors le huitième nombre de la série est aussi égal à $\dfrac{2}{m}$. Déterminer trois entiers strictement positifs m pour lesquels cela est vrai.