Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Pascal 2011

(9^{e} année – Secondaire III)

le jeudi 24 février 2011

Solutions

1. On a $6 \times (5-2)+4 = 6 \times 3 + 4 = 18 + 4 = 22$.

Réponse : (B)

2. L'expression est équivalente à $943 - 87$, qui est égale à 856.

Réponse : (E)

3. Puisque $2011^2 = 4\,044\,121$ et que $\sqrt{2011} \approx 44{,}8$, alors les nombres, en ordre croissant, sont $\sqrt{2011}, 2011$ et 2011^2.
(Si n est un entier supérieur à 1, alors $n^2 > n$ et $\sqrt{n} < n$. Les nombres $\sqrt{n}, n$ et n^2 sont alors toujours en ordre croissant.)

Réponse : (C)

4. D'après le diagramme, il y a 32 g de matières grasses et 48 g de glucides.
Le rapport de la masse de matière grasse à la masse des glucides est donc de 32 : 48.
Puisque 32 et 48 sont tous deux divisibles par 16, on peut réduire le rapport en divisant chaque membre par 16, ce qui donne un rapport irréductible de 2 : 3.

Réponse : (B)

5. Lorsque $x = -2$, l'expression $(x+1)^3$ est égale à $(-2+1)^3$, ou $(-1)^3$, ou -1.

Réponse : (A)

6. Il y avait déjà 30 L d'huile dans le récipient. Après l'ajout de 15 L d'huile, le récipient contient 45 L d'huile et 15 L de vinaigre, soit 60 L de liquide en tout.
Puisque $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\,\%$, alors $75\,\%$ du nouveau mélange est constitué d'huile.

Réponse : (A)

7. Lorsque les trois cubes mesurant 1 sur 1 sur 1 sont joints comme dans la figure, le prisme qui en résulte a deux faces carrées mesurant 1 sur 1, aux extrémités, et quatre faces rectangulaires mesurant 3 sur 1. Les faces carrées ont donc chacune une aire de 1 et les quatre faces rectangulaires ont chacune une aire de 3.
L'aire totale du prisme est donc égale à $2 \times 1 + 4 \times 3$, ou 14.

Réponse : (B)

8. Puisque le 17$^{\text{e}}$ jour du mois est un samedi et qu'il y a 7 jours dans une semaine, alors le 10$^{\text{e}}$ jour du mois est aussi un samedi, car $17 - 7 = 10$. De même, le 3$^{\text{e}}$ jour du mois est aussi un samedi, car $10 - 7 = 3$.
Puisque le 3$^{\text{e}}$ jour est un samedi, le 2$^{\text{e}}$ jour est un vendredi et le 1$^{\text{er}}$ jour du mois est un jeudi.

Réponse : (D)

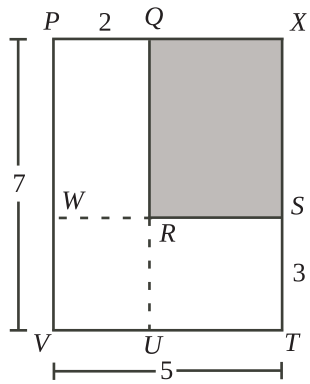
9. *Solution 1*
Puisque $PQUV$ et $WSTV$ sont des rectangles qui partagent un angle droit en V, alors PQ, WS et VT sont parallèles, comme le sont PV, QU et ST. On en conclut que tous les angles de la figure sont droits.
Puisque $PQUV$ est un rectangle, alors $VU = PQ = 2$.
Puisque $VT = 5$ et $VU = 2$, alors $UT = 3$.
On remarque que $RSTU$ est un rectangle, puisque ses angles sont tous droits.
L'aire de la figure $PQRSTV$ est égale à la somme de l'aire des rectangles $PQUV$ et $RSTU$, soit $2 \times 7 + 3 \times 3$, ou 23.

(On peut aussi considérer que l'aire de $PQRSTV$ est égale à la somme de l'aire des rectangles $PQRW$ et $WSTV$.)

Solution 2

Puisque $PQUV$ et $WSTV$ sont des rectangles qui partagent un angle droit en V, alors PQ, WS et VT sont parallèles, comme le sont PV, QU et ST. On en conclut que tous les angles de la figure sont droits.

On considère que la figure $PQRSTV$ est un grand rectangle $PXTV$ dont on a retranché le rectangle $QXSR$.



L'aire du rectangle $PXTV$ est égale à 7×5, ou 35.
Puisque $PQUV$ est un rectangle, alors $QU = PV = 7$.
Puisque PV est parallèle à QU et à ST, alors $RU = ST = 3$.
On a donc $QR = QU - RU$, d'où $QR = 7 - 3$, ou $QR = 4$.
Puisque $WSTV$ est un rectangle, alors $WS = VT = 5$.
Puisque VT est parallèle à WS et à PQ, alors $WR = PQ = 2$.
Donc $RS = WS - WR$, d'où $RS = 5 - 2$, ou $RS = 3$.
Le rectangle $QXSR$ mesure 4 sur 3. Il a donc une aire de 12.
La figure $PQRSTV$ a donc une aire de $35 - 12$, ou 23.

Solution 3

Puisque $PQUV$ et $WSTV$ sont des rectangles qui partagent un angle droit en V, alors PQ, WS et VT sont parallèles, comme le sont PV, QU et ST. On en conclut que tous les angles de la figure sont droits.

Si on additionne l'aire des rectangles $PQUV$ et $WSTV$, on semble obtenir l'aire de la figure $PQRSTV$, mais l'aire du rectangle $WRUV$ a été additionnée deux fois. Donc, l'aire de la figure $PQRSTV$ est égale à l'aire du rectangle $PQUV$ plus l'aire du rectangle $WSTV$ moins l'aire du rectangle $WRUV$.

Or, le rectangle $PQUV$ mesure 2 sur 7, le rectangle $WSTV$ mesure 3 sur 5 et le rectangle $WRUV$ mesure 2 sur 3 (puisque $WR = PQ = 2$ et $RU = ST = 3$).

Donc, l'aire de la figure $PQRSTV$ est égale à $2 \times 7 + 3 \times 5 - 2 \times 3$, ou $14 + 15 - 6$, ou 23.

Réponse : (E)

10. Jean écrit les entiers de 1 à 20 en ordre croissant.
Lorsqu'il efface la première moitié des entiers de la liste, il efface les nombres de 1 à 10 et les récrit en ordre à la fin de la liste initiale.
Donc, il y a 10 entiers à la gauche du nombre 1 (soit $11, 12, \ldots, 20$).
Il y a donc 11 entiers à la gauche du nombre 2 et 12 entiers à la gauche du nombre 3.
(On pourrait écrire la nouvelle liste au complet pour le vérifier.)

Réponse : (C)

11. On écrit les choix de réponse sous forme décimale pour obtenir 1,1, 1,11, 1,101, 1,111 et 1,011. Le dernier nombre est le seul qui soit supérieur à 1 et inférieur à 1,1. Il est donc le plus près du nombre 1.

Réponse : (E)

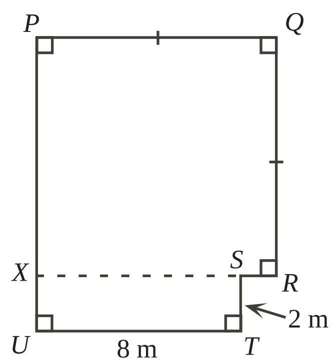
12. On sait que $\frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ et que $\frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$.
Les entiers entre ces deux nombres sont donc les entiers de 5 à 17.
Les entiers impairs entre ces deux nombres sont $5, 7, 9, 11, 13, 15$ et 17. Il y en a 7.

Réponse : (D)

13. Les quatre premiers termes de la suite sont $1, 4, 2, 3$.
Or, à partir du cinquième terme, chaque terme est égal à la somme des quatre termes précédents.
Le cinquième terme est donc égal à $1 + 4 + 2 + 3$, ou 10.
Le sixième terme est égal à $4 + 2 + 3 + 10$, ou 19 ; le septième terme est égal à $2 + 3 + 10 + 19$, ou 34 ; le huitième terme est égal à $3 + 10 + 19 + 34$, ou 66.

Réponse : (A)

14. On prolonge le côté RS jusqu'au point X sur le côté PU.



Puisque le quadrilatère $PQRX$ a trois angles droits, son quatrième angle doit être droit. $PQRX$ est donc un rectangle.
Puisque $PQ = QR$, alors $PQRX$ est un carré.
Les segments PQ, XS et UT sont parallèles, à cause des angles droits. Donc, $XSTU$ est un rectangle. Il mesure 2 m sur 8 m. Il a donc une aire de 16 m^2.
Puisque le jardin a une aire de 97 m^2, $PQRX$ a une aire de 97 m^2 − 16 m^2, ou 81 m^2.
Puisque $PQRX$ est un carré, ses côtés ont une longueur 9 m.
Donc $PQ = QR = RX = XP = 9$ m.
Puisque $XSTU$ est un rectangle, alors $XS = UT = 8$ m et $XU = ST = 2$ m.
Donc $PU = PX + XU$, d'où $PU = 9 \text{ m} + 2 \text{ m}$, ou $PU = 11$ m. De plus, $SR = XR - XS$, d'où $SR = 9 \text{ m} - 8 \text{ m}$, ou $SR = 1$ m.
On calcule le périmètre en commençant au point P et en procédant dans le sens des aiguilles d'une montre. On a $9 + 9 + 1 + 2 + 8 + 11 = 40$.
Donc, le clôture qui entoure le jardin a une longueur de 40 m.

Réponse : (C)

15. Puisque chacune des cinq amies a payé 3 \$ de plus pour couvrir la part de Ludivine, alors la part de Ludivine était de 5×3 \$, ou 15 \$.
Puisque l'addition est partagée de façon équitable, chacune paie 15 \$. L'addition totale est donc de 6×15 \$, ou 90 \$.

Réponse : (A)

16. L'ensemble S contient 25 multiples de 2, soit les entiers pairs.
Lorsqu'on a enlevé ces nombres, il ne reste plus dans l'ensemble S que les entiers impairs de 1 à 49. L'ensemble S ne contient plus que 25 nombres, car on en a enlevé 25.
On doit aussi enlever les multiples de 3 de l'ensemble S.
Puisque S ne contient plus que des entiers impairs, il faut enlever les multiples impairs de 3 situés entre 1 et 49, soit 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 et 45. Il y en a 8.
Il reste 17 entiers dans l'ensemble S, car $25 - 8 = 17$.

Réponse : (D)

17. *Solution 1*
On procède de droite à gauche, comme pour le calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $L - 4 = 1$. Donc $L = 5$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & K & 0 & 5 \\ - & M & 9 & N & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des dizaines, on a $0 - N = 1$. Il faut donc décomposer 1 centaine en 10 dizaines de manière à obtenir $10 - N = 1$, d'où $N = 9$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle K-1} & {\scriptstyle 10} & \\ & 6 & \cancel{K} & \cancel{0} & 5 \\ - & M & 9 & 9 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a $(K - 1) - 9 = 0$.
Cela semble indiquer que $K = 10$. Puisque K est un chiffre, il est égal à 0 et pour effectuer la soustraction, il faut décomposer un millier en 10 centaines de manière que la soustraction, dans la colonne des centaines, soit $10 + (K - 1) - 9 = 0$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & {\scriptstyle 5} & & & \\ & \cancel{6} & 0 & 0 & 5 \\ - & M & 9 & 9 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des milliers, on a $5 - M = 2$, d'où $M = 3$.
La soustraction devient donc $6005 - 3994 = 2011$, ce qui est exact.
Donc, $K + L + M + N$ a une valeur de $0 + 5 + 3 + 9$, ou 17.

Solution 2
Puisque $6K0L - M9N4 = 2011$, alors $M9N4 + 2011 = 6K0L$.
On procède de droite à gauche, comme pour le calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $4 + 1 = L$. Donc $L = 5$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & M & 9 & N & 4 \\ + & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & K & 0 & 5 \end{array}$$

Dans la colonne des dizaines, la somme de $N+1$ indique un 0. On doit donc avoir « N dizaines$+$ 1 dizaine $=$ 10 dizaines ». Donc $N = 9$. Il y a donc une retenue de 1 dans la colonne des centaines. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 1} & & \\ & M & 9 & 9 & 4 \\ + & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & K & 0 & 5 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a « 10 centaines + 0 centaine = 10 centaines ». Donc $K = 0$ et il y a une retenue de 1 dans la colonne des milliers. On a donc :

$$\begin{array}{cccccc} & \scriptstyle 1 & & & \\ & M & 9 & 9 & 4 \\ + & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

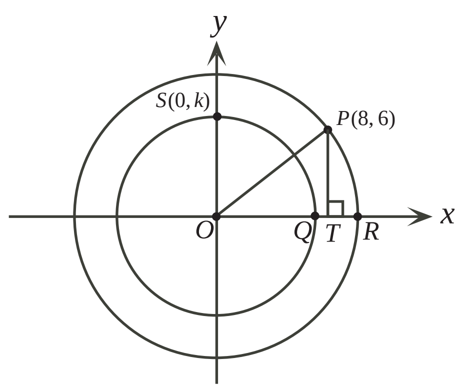
Dans la colonne des milliers, on a « 1 millier + M milliers + 2 milliers = 6 milliers », d'où $M = 3$.
L'addition devient donc $3994 + 2011 = 6005$, d'où $6005 - 3994 = 2011$, ce qui est exact.
Donc, $K + L + M + N$ a une valeur de $0 + 5 + 3 + 9$, ou 17.

Réponse : (A)

18. La différence entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$ est égale à $\frac{1}{6} - \frac{1}{12}$, ou $\frac{2}{12} - \frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{12}$. Donc $LP = \frac{1}{12}$.
Puisque le segment LP est divisé en trois parties égales, chaque partie aura une longueur égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{12}$, ce qui est égal à $\frac{1}{36}$.
Donc, M est situé à une distance de $\frac{1}{36}$ à la droite de L.
Donc, le nombre qui correspond au point M est égal à $\frac{1}{12} + \frac{1}{36}$, ou $\frac{3}{36} + \frac{1}{36}$, ce qui est égal à $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$.

Réponse : (C)

19. Pour déterminer la distance de O à P (le rayon du grand cercle), on abaisse une perpendiculaire PT à l'axe des abscisses au point P.



Dans le triangle rectangle OPT, on a $OT = 8$ et $PT = 6$. D'après le théorème de Pythagore :

$$OP^2 = OT^2 + PT^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

Puisque $OP > 0$, alors $OP = 10$.
Le grand cercle a donc un rayon de 10. Donc $OR = 10$.
Puisque $OR = 10$ et $QR = 3$, alors $OQ = 7$.
Le petit cercle a donc un rayon de 7.
Le point S est situé sur la partie positive de l'axe des ordonnées, à une distance de 7 de l'origine.
Il a donc pour coordonnées $(0, 7)$. Donc $k = 7$.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
On considère le triangle UPV.
Puisque $PU = PV$, le triangle est isocèle et les angles PUV et PVU sont donc congrus.
Puisque $180° - 24° = 156°$ et que $156° \div 2 = 78°$, alors $\angle PUV = \angle PVU = 78°$.
Puisque l'angle PVS est plat, alors $\angle QVS = 180° - 78°$, d'où $\angle QVS = 102°$.

On considère le triangle QVS.
La somme des mesures d'angles de ce triangle est égale à 180°. Donc $102 + x + y = 180$, d'où $x + y = 78$.

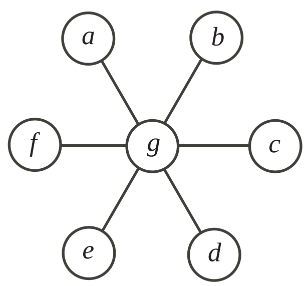
Solution 2
On considère le triangle UPV.
Puisque $PU = PV$, le triangle est isocèle et les angles PUV et PVU sont donc congrus.
Puisque $180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$ et que $156^\circ \div 2 = 78^\circ$, alors $\angle PUV = \angle PVU = 78^\circ$.
Puisque l'angle PVU est extérieur au triangle QVS, alors $\angle PVU = \angle VQS + \angle VSQ$.
Donc $78^\circ = y^\circ + x^\circ$, d'où $x + y = 78$.

Réponse : (D)

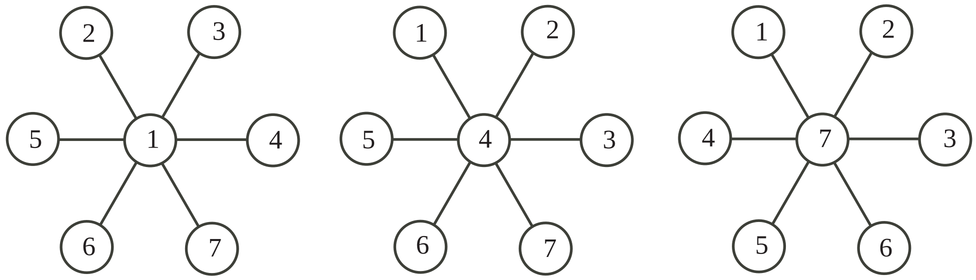
21. Au niveau C, il y a le même nombre de points qu'au niveau B ; au niveau D, il y a deux fois plus de points qu'au niveau C. Donc au niveau D, il y a deux fois plus de points qu'au niveau B.
De même, il y a deux fois plus de points au niveau F qu'au niveau D, il y a deux fois plus de points au niveau H qu'au niveau F, et ainsi de suite.
On peut donc dire que le nombre de points double lorsqu'on passe du niveau B au niveau D, du niveau D au niveau F, du niveau F au niveau H, et ainsi de suite.
Puisqu'il y a 26 niveaux, il y a 24 niveaux après le niveau B.
Puisque $24 \div 2 = 12$, le nombre de points double 12 fois du niveau B au niveau Z.
Donc, le nombre de points au niveau Z est égal à 2×2^{12}, ou 2^{13}, ou 8192.

Réponse : (D)

22. On place les entiers a, b, c, d, e, f et g comme dans la figure suivante.



Soit S la somme des entiers dans l'importe quelle ligne droite.
Donc $S = a + g + d = b + g + e = c + g + f$.
Donc $3S = (a + g + d) + (b + g + e) + (c + g + f)$, ou $3S = a + b + c + d + e + f + 3g$.
Puisque les variables de a à g prennent pour valeurs les entiers de 1 à 7, dans un certain ordre, alors $a + b + c + d + e + f + g = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, d'où $a + b + c + d + e + f + g = 28$.
On a donc $3S = (a + b + c + d + e + f + g) + 2g$, d'où $3S = 28 + 2g$.
Puisque S est un entier, $3S$ est un entier divisible par 3. Donc, $28 + 2g$ est un entier divisible par 3.
Puisque g est un entier de 1 à 7, on on lui attribue successivement ces valeurs pour constater que $28 + 2g$ est divisible par 3 lorsque g est égal à 1, 4 ou 7.
On vérifie qu'il est possible de compléter la figure avec ces valeurs :



Il y a donc 3 façons de remplir le cercle au milieu.

Réponse : (C)

23. On comptera d'abord le nombre de quadruplets (p, q, r, s) d'entiers non négatifs qui vérifient l'équation $2p + q + r + s = 4$. On déterminera ensuite combien de ces quadruplets vérifient l'équation $p + q + r + s = 3$. Cela nous donnera le nombre de choix possibles et le nombre de choix favorables, ce qui nous permettra de calculer la probabilité.
Puisque p, q, r et s sont tous des entiers non négatifs et que $2p+q+r+s = 4$, il n'y a que trois valeurs possibles de p, soit $p = 2$, $p = 1$ et $p = 0$.
Dans chaque cas, on peut dire que $q + r + s = 4 - 2p$.

1er cas : $p = 2$
Dans ce cas, on a $q + r + s = 4 - 2(2)$, ou $q + r + s = 0$.
Puisque q, r et s sont tous non négatifs, alors $q = r = s = 0$. Donc $(p, q, r, s) = (2, 0, 0, 0)$.
Donc dans ce cas, l'équation $2p + q + r + s = 4$ admet 1 solution.

2e cas : $p = 1$
Dans ce cas, on a $q + r + s = 4 - 2(1) = 2$.
Puisque q, r et s sont tous non négatifs, alors q, r et s doivent avoir pour valeurs 0, 0 et 2, dans un ordre quelconque, ou 1, 1 et 0, dans un ordre quelconque.
Or, il y a trois façons de placer trois nombres en ordre lorsque deux des nombres sont identiques. (Étant donné les nombres a, a et b, on peut les placer en ordre pour former aab, aba et baa.)
Donc, les quadruplets possibles sont :

$$(p, q, r, s) = (1, 2, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)$$

Donc dans ce cas, l'équation $2p + q + r + s = 4$ admet 6 solutions.

3e cas : $p = 0$
Dans ce cas, on a $q + r + s = 4$.
On cherche d'abord les entiers non négatifs q, r et s, $q \geq r \geq s$, qui vérifient l'équation. On déterminera ensuite les autres solutions en changeant l'ordre des nombres.
Si $q = 4$, alors $r + s = 0$, d'où $r = s = 0$.
Si $q = 3$, alors $r + s = 1$, d'où $r = 1$ et $s = 0$.
Si $q = 2$, alors $r + s = 2$, d'où $r = 2$ et $s = 0$, ou bien $r = s = 1$.
La valeur de q ne peut être égale à 1 ou à 0, car si elle l'était, $r + s$ aurait une valeur supérieure ou égale à 3, selon l'équation, et r ou s aurait alors une valeur supérieure ou égale à 2, ce qui contredirait $r \leq q$.
Donc, l'équation $q + r + s = 4$ admet comme solutions les nombres 4, 0 et 0 dans un ordre quelconque, les nombres 3, 1 et 0 dans un ordre quelconque, les nombres 2, 2 et 0 dans un ordre quelconque, et les nombres 2, 1 et 1 dans un ordre quelconque.
Dans le 2e cas, ci-haut, on a vu qu'il y avait 3 façons de placer trois nombres en ordre lorsque deux des nombres sont identiques.

Aussi, il y a 6 façons de placer trois nombres en ordre lorsque les nombres sont différents les uns des autres. (Étant donné les nombres a, b et c, on peut les placer en ordre pour former abc, acb, bac, bca, cab et cba.)
La solution $(p, q, r, s) = (0, 4, 0, 0)$ génère 3 arrangements.
La solution $(p, q, r, s) = (0, 3, 1, 0)$ génère 6 arrangements.
La solution $(p, q, r, s) = (0, 2, 2, 0)$ génère 3 arrangements.
La solution $(p, q, r, s) = (0, 2, 1, 1)$ génère 3 arrangements.
(Dans chacun de ces cas, on sait que $p = 0$. Les arrangements viennent donc en changeant les valeurs de q, de r et de s les unes pour les autres.)
Dans ce cas, l'équation $2p + q + r + s = 4$ admet 15 solutions.

En tout, le nombre de solutions de l'équation $2p + q + r + s = 4$ est égal à $1 + 6 + 15$, ou 22.
Lorsqu'on choisira des solutions au hasard, il y aura donc un total de 22 possibilités.
Il reste à déterminer les solutions qui vérifient l'équation $p + q + r + s = 3$.
Les quadruplets qui vérifient cette équation sont ceux du 2^e cas.
En effet, si un quadruplet vérifie l'équation $2p + q + r + s = 4$ et l'équation $p + q + r + s = 3$, alors on doit avoir :

$$p = (2p + q + r + s) - (p + q + r + s) = 4 - 3 = 1$$

Donc parmi les 22 solutions de l'équation $2p + q + r + s = 4$, il y en a 6 qui vérifient aussi l'équation $p + q + r + s = 3$. Il y a donc 6 choix favorables sur 22. La probabilité est donc de $\frac{6}{22}$, ou $\frac{3}{11}$.

Réponse : (B)

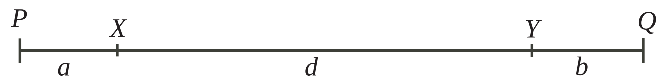
24. Le plus grand entier de 100 chiffres est le nombre formé de 100 fois le chiffre 9. Cet entier est égal à $10^{100} - 1$.
On cherche donc le plus grand entier n pour lequel $14n \leq 10^{100} - 1$.
Puisque $14n$ est un entier, on cherche le plus grand entier n pour lequel $14n < 10^{100}$.
On cherche donc le plus grand entier n pour lequel $n < \dfrac{10^{100}}{14} = \dfrac{10}{14} \times 10^{99} = \dfrac{5}{7} \times 10^{99}$.
Cela équivaut à calculer au long le nombre $\dfrac{5}{7} \times 10^{99}$ et à le tronquer à l'unité près, c'est-à-dire en coupant ses décimales après la virgule.
On peut exprimer la fraction $\dfrac{5}{7}$ sous forme décimale. On obtient $0{,}\overline{714285}$. (On peut le voir en utilisant une calculatrice ou en divisant au long.)
On obtient donc l'entier que l'on cherche en multipliant le nombre $0{,}\overline{714285}$ par 10^{99} et en tronquant la réponse à la virgule décimale.
Pour le faire, on doit déplacer de 99 places vers la gauche les décimales du nombre $0{,}\overline{714285}$ et ensuite ignorer les décimales qui restent à la droite de la virgule.
Puisque les chiffres du développement décimal ont une période de 6, il y aura 16 copies des chiffres 714285, suivies des chiffres 714. (Le nombre de chiffres sera donc égal à $16 \times 6 + 3$, ou 99.)
Il faut maintenant déterminer le 68^e chiffre en comptant de droite à gauche.
Le nombre ressemble à 714 285714. . .285714 285714 285714. Si on écrit les chiffres à partir de la droite, on aura 11 copies des chiffres 285714, pour un total de 66 chiffres, suivies des chiffres 14, ce qui donne 68 chiffres en tout.
Le 68^e chiffre, en comptant de droite à gauche, est donc un 1.

Réponse : (A)

25. On remarque que l'on peut changer des personnes l'une pour l'autre. Il n'est pas important de spécifier qui marche et qui se promène en moto. On nomme les trois personnes A, D et E.
Le point de départ est nommé P et le point d'arrivée est nommé Q.
Voici une stratégie dans laquelle les trois personnes avancent à tous moments et arrivent au point P en même temps :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent en moto à un point Y situé avant le point Q.
A laisse D et retourne en moto, tandis que D et E marchent vers le point Q.
A rencontre E au point X.
E monte sur la moto et avec A, se déplace vers le point Q de manière à arriver au point Q en même temps que D.
Le point Y est choisi de manière que A, D et E arrivent en même temps au point Q.

Soit a km la distance de P à X, d km la distance de X à Y et b km la distance de Y à Q.



Pendant que E marche de P à X à une vitesse de 6 km/h, A se déplace en moto de P à Y et de retour jusqu'à X à une vitesse de 90 km/h. Or, la distance de P à X est de a km, tandis que la distance de P à Y, puis de Y à X est de $(a+d+d)$ km, ou $(a+2d)$ km.
Puisque E et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\frac{a}{6} = \frac{a+2d}{90}$, d'où $15a = a + 2d$, ou $7a = d$.

Pendant que D marche de Y à Q à une vitesse de 6 km/h, A se rend de Y à X et de X à Q à une vitesse de 90 km/h.
Or, la distance de Y à Q est de b km, tandis que la distance de Y à X et de X à Q est de $(d+d+b)$ km, ou $(b+2d)$ km.
Puisque D et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\frac{b}{6} = \frac{b+2d}{90}$, d'où $15b = b + 2d$, ou $7b = d$.

Donc $d = 7a = 7b$. On peut conclure que $b = a$.
La distance totale de P à Q est égale à $(a+d+b)$ km, ou $(a+7a+a)$ km, ou $9a$ km.
Or, on sait que cette distance est de 135 km. Donc $9a = 135$, ou $a = 15$.
On rappelle que A se déplace de P à Y à X à Q, une distance de $[(a+7a)+7a+(7a+a)]$ km, ou $23a$ km.
Puisque $a = 15$ km et que A se déplace à une vitesse de 90 km/h, le temps qu'elle met pour effectuer cette stratégie est égal à $\frac{23 \times 15}{90}$ h, ou $\frac{23}{6}$ h, ou environ 3,83 h.
Puisque cette stratégie prend 3,83 h, alors la plus petite valeur possible de t ne peut dépasser 3,83 h. Peux-tu expliquer pourquoi il s'agit bien de la plus petite valeur possible de t ?

Si on n'avait pas pensé à la stratégie précédente, on aurait pu penser à la suivante :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent jusqu'au point Q.
A laisse D au point Q et retourne rencoutrer E qui marche toujours.
D laisse E monter sur la moto et les deux se rendent à Q. (D se repose au point Q.)

Cette stratégie met 4,125 h, ce qui est supérieur au temps requis par la stratégie précédente, car D ne bouge pas pendant un certain temps.

Réponse : (A)