Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Hypatie 2011

le mercredi 13 avril 2011

Solutions

1. (a) Puisque D est le milieu du segment AB, ses coordonnées sont $(\frac{1}{2}(0+0), \frac{1}{2}(0+6))$, ou $(0, 3)$.
La droite qui passe aux points C et D a pour pente $\frac{3-0}{0-8}$, ou $-\frac{3}{8}$.
L'ordonnée à l'origine de la droite est l'ordonnée du point D, soit 3.
La droite qui passe aux points C et D a pour équation $y = -\frac{3}{8}x + 3$.

(b) Puisque E est le milieu du segment BC, ses coordonnées sont $(\frac{1}{2}(8+0), \frac{1}{2}(0+0))$, ou $(4, 0)$.
La droite qui passe aux points A et E a pour pente $\frac{6-0}{0-4}$, ou $-\frac{6}{4}$, ou $-\frac{3}{2}$.
L'ordonnée à l'origine de la droite est l'ordonnée du point A, soit 6.
Donc, la droite qui passe aux points A et E a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 6$.
Le point F est le point d'intersection des droites d'équations $y = -\frac{3}{8}x + 3$ et $y = -\frac{3}{2}x + 6$.
Au point d'intersection F, les deux équations ont la même valeur de y :

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{8}x + 3 &= -\tfrac{3}{2}x + 6 \\ 8(-\tfrac{3}{8}x + 3) &= 8(-\tfrac{3}{2}x + 6) \\ -3x + 24 &= -12x + 48 \\ 9x &= 24 \end{aligned}$$

Le point F a donc pour abscisse $\frac{24}{9}$, ou $x = \frac{8}{3}$.
On reporte $x = \frac{8}{3}$ dans l'équation $y = -\frac{3}{2}x + 6$ et on obtient $y = -\frac{3}{2} \times \frac{8}{3} + 6$, ou $y = 2$.
Les coordonnées du point F sont $(\frac{8}{3}, 2)$.

(c) Le triangle DBC a une base BC de longueur 8 et une hauteur correspondante BD de longueur 3.
Donc, le triangle DBC a une aire de $\frac{1}{2} \times 8 \times 3$, ou 12.

(d) L'aire du quadrilatère $DBEF$ est égale à l'aire du triangle DBC moins celle du triangle FEC.
Le triangle FEC a une base EC de longueur 4, puisque $BC = 8$ et $BE = 4$. De plus, sa hauteur correspondante est égale à l'ordonnée du point F, soit 2.
Donc, l'aire du triangle FEC est égale à $\frac{1}{2} \times 4 \times 2$, ou 4.
L'aire du quadrilatère $DBEF$ est égale à $12 - 4$, ou 8.

2. (a) Puisque le chiffre des dizaines est 3, on considère les possibilités pour le chiffre des unités.
Puisque le 0 et le 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des unités.
Or, si le chiffre des unités est un 3, le nombre obtenu, 33, est un multiple de 11, ce qui est interdit.
Puisque 33 est le seul multiple de 11 parmi les nombres de 31 à 38, chacun des 7 autres choix pour le chiffre des unités est permis.
Il y a 7 nombres dans S qui ont un chiffre des dizaines égal à 3.
On remarque que cet argument peut être utilisé pour montrer qu'il y a 7 nombres dans S pour chacun des chiffres des dizaines de 1 à 8.
Ce sera utile pour résoudre la partie (d).

(b) Puisque le chiffre des unités est 8, on considère les possibilités pour le chiffre des dizaines.
Puisque le 0 et le 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des dizaines.
Or, si le chiffre des dizaines est un 8, le nombre obtenu, 88, est un multiple de 11, ce qui interdit.
Puisque 88 est le seul multiple de 11 parmi les nombres ayant un chiffre des unités égal à 8, chacun des 7 autres choix pour le chiffre des dizaines est permis.
Il y a 7 nombres dans S qui ont un chiffre des unités égal à 8.

On remarque que cet argument peut être utilisé pour montrer qu'il y a 7 nombres dans S pour chacun des chiffres des unités de 1 à 8.
Ce sera utile pour résoudre la partie (d).

(c) *Solution 1*
Puisque les chiffres 0 et 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des dizaines. Pour chacun de ces choix, il y a 8 choix pour le chiffre des unités, pour un total de 64 nombres. Or, lorsque les deux chiffres sont égaux, le nombre est divisible par 11. Les nombres 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77 et 88 doivent donc être exclus. Il reste 56 nombres ($64 - 8 = 56$).
Il y a donc 56 nombres dans S.

Solution 2
Puisque les chiffres 0 et 9 ne peuvent pas être utilisés, il y a 8 choix pour le chiffre des dizaines. Pour chacun de ces choix, il semble y avoir 8 choix pour le chiffre des unités, mais on ne doit pas choisir le même chiffre que le chiffre des dizaines, car on obtiendrait un nombre divisible par 11.
Donc pour chaque choix du chiffre des dizaines, on doit exclure le 0, le 9 et le chiffre des dizaines lorsqu'on choisit le chiffre des unités. Pour chaque choix du chiffre des dizaines, il y a 7 choix pour le chiffre des unités.
Le nombre total de choix est donc égal à 8×7, ou 56.
Il y a 56 nombres dans S.

(d) *Solution 1*
Dans la partie (a), on a vu que pour chacun des chiffres des dizaines de 1 à 8, il y a 7 nombres dans S qui ont ce chiffre des dizaines.
Donc parmi les 56 nombres de S, il y en a 7 qui ont un chiffre des dizaines égal à 1, 7 qui ont un chiffre des dizaines égal à 2, et ainsi de suite.
Dans la partie (b), on a vu que pour chacun des chiffres des unités de 1 à 8, il y a 7 nombres dans S qui ont ce chiffre des unités.
Donc parmi les 56 nombres de S, il y en a 7 qui ont un chiffre des unités égal à 1, 7 qui ont un chiffre des unités égal à 2, et ainsi de suite.
On déterminera la somme des 56 nombres de S en additionnant les chiffres des unités et les chiffres des dizaines séparément.
On considère d'abord les chiffres des unités des nombres de S.
Chacun des nombres de 1 à 8 paraît 7 fois comme chiffre des unités.
La somme des entiers de 1 à 8, soit $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, est égale à $\frac{(8)(9)}{2}$, ou 36.
Puisque chacun de ces nombres paraît 7 fois, la somme des chiffres des unités des nombres de S est égale à 7×36, ou 252.
On considère maintenant les chiffres des dizaines des nombres de S.
Chacun des entiers de 1 à 8 paraît 7 fois comme chiffre des dizaines. La somme des entiers de 1 à 8 est égale à 36.
Puisque chacun de ces nombres paraît 7 fois, la somme des chiffres des dizaines des nombres de S est égale à 252.
Puisque ces chiffres représentent des dizaines, ils contribuent 10×252, ou 2520, au total.
Les chiffres des unités contribuent 252 au total et les chiffres des dizaines contribuent 2520 au total. En tout, cela fait 2772.
Donc, la somme de tous les nombres dans S est égale à 2772.

Solution 2
On laisse de côté la deuxième restriction qui exclut les multiples de 11. On cherche donc la somme des nombres du tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & 83 & 84 & 85 & 86 & 87 & 88 \end{array}$$

La somme des nombres de la 1re rangée est égale à $8 \times \frac{11+18}{2}$, ou 116.
Chaque nombre de la 2e rangée est 10 de plus que le nombre correspondant de la 1re rangée. La somme des nombres de la 2e rangée est donc égale à $116 + 80$, ou 196.
De même, la somme des nombres de chaque rangée est 80 de plus que celle de la rangée précédente. La somme des nombres du tableau est donc égale à
$116 + 196 + 276 + 356 + 436 + 516 + 596 + 676$, ou $8 \times \frac{116+676}{2}$, ou 3168.
On doit maintenant exclure les multiples de 11.
Or, $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88$ est égal à $8 \times \frac{11+88}{2}$, ou 396.
Donc, la somme des nombres de S est égale à $3168 - 396$, ou 2772.

3. (a) *Solution 1*
Puisque $(50, y, z)$ est un triplet Trenti, alors $3(50) = 5y = 2z$, ou $150 = 5y = 2z$.
Puisque $150 = 5y$, alors $y = 30$. Puisque $150 = 2z$, alors $z = 75$.
Le triplet Trenti est $(50, 30, 75)$.

Solution 2
Soit $3x = 5y = 2z = k$.
Puisque x, y et z sont des entiers strictement positifs, alors k est un entier strictement positif qui est divisible par 3, par 5 et par 2.
Tout entier strictement positif qui est divisible par 3, par 5 et par 2 est divisible par le plus petit commun multiple de ces nombres, soit 30.
Puisque k est divisible par 30, il existe un entier strictement positif m tel que $k = 30m$.
Donc $3x = 5y = 2z = 30m$, d'où $x = 10m$, $y = 6m$ et $z = 15m$.
Puisque $x = 50$, alors $50 = 10m$, d'où $m = 5$.
Donc $y = 6 \times 5$ et $z = 15 \times 5$, d'où $y = 30$ et $z = 75$.
Le triplet Trenti est $(50, 30, 75)$.

(b) *Solution 1*
Puisque $3x = 5y$, $x = \frac{5}{3}y$.
Puisque x est un entier strictement positif, $\frac{5}{3}y$ l'est aussi.
Puisque 5 n'est pas divisible par 3, alors y est divisible par 3.
Puisque $5y = 2z$, $z = \frac{5}{2}y$.
Puisque z est un entier strictement positif, $\frac{5}{2}y$ l'est aussi.
Puisque 5 n'est pas divisible par 2, y est divisible par 2.
Puisque y est divisible par 2 et par 3, il est divisible par 6.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), y doit être divisible par 6.

Solution 2
Dans la Solution 2 de la partie (a), on a vu que $y = 6m$, m étant un entier strictement positif. Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), y doit être divisible par 6.

(c) *Solution 1*
D'après la partie (b), on sait que dans tout triplet Trenti (x, y, z), y est divisible par 6.
On utilise la méthode de la Solution 1 de la partie (b) pour montrer que dans tout triplet

Trenti (x, y, z), x est divisible par 10.
Puisque $3x = 5y$, $y = \frac{3}{5}x$.
Puisque y est un entier strictement positif, $\frac{3}{5}x$ l'est aussi.
Puisque 3 n'est pas divisible par 5, x est divisible par 5.
Puisque $3x = 2z$, $z = \frac{3}{2}x$.
Puisque z est un entier strictement positif, $\frac{3}{2}x$ l'est aussi.
Puisque 3 n'est pas divisible par 2, x est divisible par 2.
Puisque x est divisible par 2 et par 5, il est divisible par 10.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), x est divisible par 10.
De la même manière, on montre que dans tout triplet Trenti (x, y, z), z est divisible par 15.
Puisque $3x = 2z$, $x = \frac{2}{3}z$.
Puisque x est un entier strictement positif, $\frac{2}{3}z$ l'est aussi.
Puisque 2 n'est pas divisible par 3, z est divisible par 3.
Puisque $5y = 2z$, $y = \frac{2}{5}z$.
Puisque y est un entier strictement positif, $\frac{2}{5}z$ l'est aussi.
Puisque 2 n'est pas divisible par 5, z est divisible par 5.
Puisque z est divisible par 3 et par 5, il est divisible par 15.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), z est divisible par 15.
Puisque dans tout triplet Trenti (x, y, z), y est divisible par 6, x est divisible par 10 et z est divisible par 15, alors leur produit xyz est divisible par $6 \times 10 \times 15$, ou 900.

Solution 2
Dans la Solution 2 de la partie (b), on a vu qu'il existe un entier strictement positif m tel que $x = 10m$, $y = 6m$ and $z = 15m$.
Le produit xyz est égal à $(10m)(6m)(15m)$, ou $900m^3$. Il est donc divisible par 900.
Donc dans tout triplet Trenti (x, y, z), le produit xyz est divisible par 900.

4. (a) $F(8) = 6$, puisque :

$$\begin{aligned} 8 &= 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1+3 \\ &= 1+1+3+3 \\ &= 1+1+1+5 \\ &= 3+5 \\ &= 1+7 \end{aligned}$$

(b) Toute façon d'exrimer un nombre n comme somme d'entiers positifs impairs sera appelée une *représentation* de n.
Il y a donc $F(n)$ représentations de n.
Étant donné une représentation de n, on peut y ajouter « $+1$ » pour obtenir une représentation de $n + 1$.
Par exemple, $3 + 3 + 1$ est une représentation de 7 ; si on ajoute « $+1$ », on obtient $3 + 3 + 1 + 1$, qui est une représentation de 8.
Puisqu'on peut utiliser chaque représentation de n pour créer une représentation de $n+1$, le nombre de représentations de $n + 1$ est supérieur ou égal au nombre de représentations de n. Donc $F(n + 1) \geq F(n)$.
On montrera que $F(n + 1) \geq F(n) + 1$ en trouvant une représentation de $n + 1$ qui n'est pas décrite par la méthode précédente.
On considère les cas où $n + 1$ est impair, puis les cas où $n + 1$ est pair.

<u>1^{er} cas : $n+1$ est impair</u>
Puisque $n+1$ est impair, le nombre $n+1$ est une représentation de lui-même.
Puisque $n > 3$, cette représentation de $n+1$ ne contient qu'un entier et il est supérieur à 1. Elle ne peut donc pas provenir de la méthode où l'on ajoute « $+1$ » à une représentation de n.
Donc si $n+1$ est impair, alors $F(n+1) \geq F(n)+1$, d'où $F(n+1) > F(n)$.

<u>2^{e} cas : $n+1$ est pair</u>
Puisque $n+1$ est pair, alors n est impair.
Puisque n est impair et que $n > 3$, alors $n \geq 5$.
Puisque n est impair et que $n \geq 5$, alors $n-2$ est impair et $n-2 \geq 3$.
Puisque $n+1 = (n-2)+3$ et que $n-2 \geq 3$, alors le l'expression $(n-2)+3$ est une représentation de $n+1$ qui ne contient pas de termes 1. Elle ne peut donc pas provenir de la méthode où l'on ajoute « $+1$ » à une représentation de n.
Donc si $n+1$ est pair, alors $F(n+1) \geq F(n)+1$, d'où $F(n+1) > F(n)$.

Donc pour tout entier n supérieur à 3, $F(n+1) > F(n)$.

(c) Soit a_n la représentation de n comme somme de n fois le nombre 1.
Par exemple, $a_8 = 1+1+1+1+1+1+1+1$.
Soit b_n la représentation de n de la forme $(n-1)+1$ si n est pair et de la forme $(n-2)+1+1$ si n est impair. Par exemple, $b_8 = 7+1$ puisque 8 est pair.
Soit S_n la liste des autres représentations de n.
D'après la solution de la partie (a), voici la liste S_8 :

$$\begin{aligned} 8 &= 1+1+1+1+1+3 \\ &= 1+1+3+3 \\ &= 1+1+1+5 \\ &= 3+5 \end{aligned}$$

Puisque a_n et b_n sont chacune une représentation de n, il y a $F(n)-2$ représentations dans la liste S_n.
On remarquera que lorsque $n=4$, la liste S_n ne contient aucune représentation de n.
On considère la liste de représentations de $2n$ de la forme $a_n + S_n$. Ces représentations de $2n$ ont la forme de n fois le nombre 1 ajouté à chaque représentation de la liste S_n.
On utilise de nouveau les représentations de 8 de la solution de la partie (a) pour montrer les représentations de 16 qui se trouvent dans la liste $a_8 + S_8$:

$$\begin{aligned} 16 &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1+3) \\ &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+3+3) \\ &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+1+5) \\ &= (1+1+1+1+1+1+1+1)+(3+5) \end{aligned}$$

On considère maintenant les représentations de $2n$ formées par les listes suivantes :
- $a_n + S_n$ (Cette liste contient $F(n)-2$ représentations. Lorsque $n=4$, elle est vide.)
- $b_n + S_n$ (Cette liste contient $F(n)-2$ représentations. Lorsque $n=4$, elle est vide.)
- $a_n + a_n$
- $a_n + b_n$
- $b_n + b_n$
- $(2n-1)+1$
- $(2n-3)+3$

Le nombre de représentations dans cette liste est égal à $2 \times [F(n) - 2] + 5$, ou $2F(n) + 1$. Si ces représentations sont distinctes, alors $F(2n) \geq 2F(n) + 1 > 2F(n)$, ce qu'il faut démontrer.
Puisque $n > 3$, alors $n - 3 > 0$, d'où $2n - 3 > n$. Si on ajoute 2 à chaque membre, on obtient $2n - 1 > n + 2$. Donc $2n - 1 > n$.
Puisque $2n - 3$ et $2n - 1$ sont chacun supérieur à n, il n'y a aucun chevauchement entre les deux dernières listes et les cinq premières listes ci-dessus.
D'après les définitions de a_n et de b_n, il n'y a aucun chevauchement entre les troisième, quatrième ou cinquième listes de représentations ci-dessus.
D'après les définitions de a_n, b_n et S_n, il n'y a aucun chevauchement entre les deux premières listes et les troisième, quatrième et cinquième listes ci-dessus.
Il reste à explorer la possibilité de chevauchement entre les deux premières listes seulement.

Supposons qu'il existe une représentation de $2n$ qui fait partie de la liste $a_n + S_n$ et de la liste $b_n + S_n$. $(\star)$
Puisque cette représentation fait partie de la liste $a_n + S_n$, elle contient n fois le nombre 1.
Puisque cette représentation fait partie de la liste $b_n + S_n$, alors elle contient l'expression $(n - 1) + 1$ ou l'expression $(n - 2) + 1 + 1$ selon que n est pair ou impair. Or, puisque la représentation contient déjà des 1 (à cause de la partie a_n), on ne peut pas inclure automatiquement le 1 ou le $1 + 1$ qui provient de b_n.
Donc, la représentation contient n fois le nombre 1 et soit le nombre $n - 1$, soit le nombre $n - 2$.
Puisque cette représentation a une somme de $2n - 1$ ou de $2n - 2$, on doit inclure le 1 ou le $1 + 1$.
Donc, la représentation est formée de n fois le nombre 1 et de l'expression $(n - 1) + 1$ si n est pair, ou de n fois le nombre 1 et de l'expression $(n - 2) + 1 + 1$ si n est impair.
Donc, la représentation doit faire partie de la liste $a_n + b_n$.
On a une contradiction, puisqu'on sait déjà qu'il n'y a aucun chevauchement entre cette liste et la liste $a_n + S_n$ ou la liste $b_n + S_n$.
Donc, la supposition $(\star)$ est fausse.

Il n'y a donc aucun chevauchement entre les listes de représentations.
Donc $F(2n) \geq 2F(n) + 1 > 2F(n)$, ce qu'il fallait démontrer.