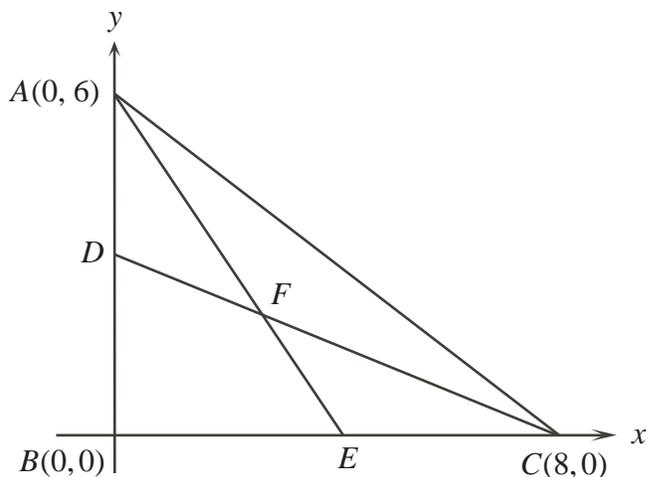


Concours Hypatie 2011 (11^e année – Sec. V)
le mercredi 13 avril 2011

1. Dans la figure suivante, D et E sont les milieux respectifs de AB et de BC .



- (a) Déterminer une équation de la droite qui passe aux points C et D .
- (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection F de AE et de CD .
- (c) Déterminer l'aire du triangle DBC .
- (d) Déterminer l'aire du quadrilatère $DBEF$.
2. Un ensemble S est formé de tous les entiers positifs de deux chiffres tels que :
- aucun des nombres ne contient un chiffre 0 ou un chiffre 9 et
 - aucun nombre n'est un multiple de 11.
- (a) Déterminer combien de nombres dans S ont un chiffre des dizaines égal à 3.
- (b) Déterminer combien de nombres dans S ont un chiffre des unités égal à 8.
- (c) Déterminer combien il y a de nombres dans S .
- (d) Déterminer la somme de tous les nombres dans S .
3. On dit que trois entiers strictement positifs x , y et z forment un *triplet Trenti* (x, y, z) si $3x = 5y = 2z$.
- (a) Déterminer la valeur de y et celle de z dans le triplet Trenti $(50, y, z)$.
- (b) Démontrer que dans tout triplet Trenti (x, y, z) , y doit être divisible par 6.
- (c) Démontrer que dans tout triplet Trenti (x, y, z) , le produit xyz doit être divisible par 900.

4. Soit $F(n)$ le nombre de façons dont l'entier strictement positif n peut être exprimé comme somme d'entiers positifs impairs. Par exemple :

– $F(5) = 3$, car

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

– $F(6) = 4$, car

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 3 \\ &= 3 + 3 \\ &= 1 + 5 \end{aligned}$$

- (a) Déterminer $F(8)$ et écrire toutes les façons d'exprimer 8 comme somme d'entiers positifs impairs.
- (b) Démontrer que pour tout entier n supérieur à 3, $F(n+1) > F(n)$.
- (c) Démontrer que pour tout entier n supérieur à 3, $F(2n) > 2F(n)$.