Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2011

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 11 mai 2011

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Terry Bae
Steve Brown
Ersal Cahit
Karen Cole
Jennifer Couture
Serge D'Alessio
Frank DeMaio
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Barb Forrest
Judy Fox
Steve Furino
John Galbraith
Sandy Graham
Angie Hildebrand
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Bev Marshman
Dean Murray
Jen Nissen
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Nottawa, ON
Chris Wu, Amesbury M.S., Toronto, ON

7e année

1. On a : $5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 9 - 3 + 2 - 1 = 6 + 2 - 1 = 8 - 1 = 7$

   Réponse : (E)

2. On doit d'abord additionner 9 et 16. Donc $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$, ce qui est égal à 5.

   Réponse : (E)

3. D'après le diagramme, un seul élève a choisi le printemps.
   Puisqu'il y avait 10 élèves en tout, l'élève qui a choisi le printemps représente $\frac{1}{10}$ des élèves, c'est-à-dire $\frac{10}{100}$ des élèves, ou 10 % des élèves.

   Réponse : (B)

4. Puisque le bœuf haché se vend 5,00 \$ le kilo, alors 12 kg de bœuf coûtent $12 \times 5{,}00$ \$, ou 60,00 \$.

   Réponse : (C)

5. Puisque chaque nombre est entre 1 et 2, on considère les chiffres des dixièmes.
   Les nombres 1,0101, 1,0011 et 1,0110 sont entre 1 et 1,1, tandis que les nombres 1,1001 et 1,1100 sont supérieurs à 1,1.
   On peut donc éliminer ces deux derniers choix de réponse.
   On considère ensuite les chiffres des centièmes.
   Les nombres 1,0101 et 1,0110 ont 1 pour chiffre des centièmes, tandis que le nombre 1,0011 a un 0. Ce dernier nombre est donc le plus petit.
   Voici les nombres en ordre croissant : $\{1{,}0011; 1{,}0101; 1{,}0110; 1{,}1001; 1{,}1100\}$

   Réponse : (B)

6. Puisque vous choisissez un des cinq choix *au hasard*, chacun des cinq choix a la même chance d'être choisi. Il y a un choix favorable sur cinq choix possibles. La probabilité est donc égale à $\frac{1}{5}$.

   Réponse : (A)

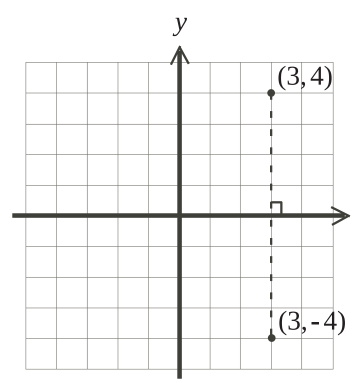
7. Puisqu'on additionne la fraction $\frac{1}{3}$ sept fois, la somme est égale à $7 \times \frac{1}{3}$.

   Réponse : (E)

8. Avant le repas, Karl a parcouru 12 km du voyage de 36 km.
   Puisque $36 - 12 = 24$, il lui reste 24 km à parcourir après le repas.
   La fraction du voyage au complet qu'il lui reste à parcourir après le repas est égale à $\frac{24}{36}$, ou $\frac{2}{3}$.

   Réponse : (D)

9. Après une réflexion par rapport à l'axe des abscisse, l'image du point $(3, 4)$ est le point $(3, -4)$, car les deux points auront la même abscisse 3, mais l'image sera au-dessous de l'axe et son ordonnée sera négative. De plus, les deux points seront à une distance de 4 de l'axe de réflexion.



   Réponse : (D)

10. Anika dit que la plante est une rose *rouge* et Carla dit que c'est une dahlia *rouge*.
La couleur rouge est correcte ou incorrecte. Si elle est incorrecte, alors chaque fille a donné le bon nom, ce qui ne peut être vrai, car la plante ne peut être une rose et une dahlia en même temps.
Donc, la couleur est correcte, c'est-à-dire que les deux filles ont donc donné la couleur rouge correctement. Elles ont donc donné le nom incorrect. La plante n'est donc ni une rose, ni une dahlia. Elle est donc une pâquerette.
La plante est donc une pâquerette rouge.
On peut vérifier que Bertrand a donné le bon nom et la mauvaise couleur.

Réponse : (E)

11. L'angle de $2x^\circ$ et l'angle de $3x^\circ$ sont complémentaires. La somme des mesures est donc de 90°.
Donc $2x + 3x = 90$, ou $5x = 90$. Donc $x = 18$, car $5 \times 18 = 90$.

Réponse : (D)

12. Puisque les quatre côtés ont la même longueur et que le carré a un périmètre de 28 cm, chaque côté a une longueur de 7 cm, car 4×7 cm $= 28$ cm.
Le carré a donc une base de 7 cm et une hauteur de 7 cm.
Son aire, en cm^2, est égale à 7×7, ou 49.

Réponse : (D)

13. Karine a mangé moins que Max qui a mangé moins que Cédric.
Or, Ben et Tanya ont mangé moins que Karine.
Donc, Max a mangé la 2$^{\text{e}}$ plus grande quantité de nourriture.

Réponse : (D)

14. Le plus petit palindrome de trois chiffres est 101.
Le plus grand palindrome de trois chiffres est 999.
La différence entre le plus grand et le plus petit est égale à $999 - 101$, ou 898.

Réponse : (B)

15. Puisque 10 minutes correspondent à $\frac{10}{60}$, ou $\frac{1}{6}$ d'une heure, le skieur se déplace de 2 km, car 12 km $\div 6 = 2$ km.

Réponse : (C)

16. Peu importe leur nombre, les tiges de 2 cm donnent un nombre pair de cm.
Pour obtenir une longueur totale impaire de 51 cm, il faut donc utiliser un nombre impair de tiges de 5 cm.
On procède par essais systématiques au moyen d'un tableau.

Nombre de tiges de 5 cm	Longueur totale (en cm) des tiges de 5 cm	Longueur totale (en cm) des tiges de 2 cm	Nombre de tiges de 2 cm
1	5	$51 - 5 = 46$	$46 \div 2 = 23$
3	15	$51 - 15 = 36$	$36 \div 2 = 18$
5	25	$51 - 25 = 26$	$26 \div 2 = 13$
7	35	$51 - 35 = 16$	$16 \div 2 = 8$
9	45	$51 - 45 = 6$	$6 \div 2 = 3$

Si on tente d'utiliser 11 tiges ou plus de 5 cm, on dépasse la longueur totale de 51 cm.
Il y a donc 5 façons différentes de construire la tige de 51 cm.

Réponse : (A)

17. *Solution 1*
En choisissant une viande et un fruit, les repas possibles sont : poulet et pomme, poulet et poire, poulet et banane, boeuf et pomme, boeuf et poire, bœuf et banane.
Deux des six repas comprennent une banane.
Si la viande et le fruit sont choisis au hasard, la probabilité pour qu'un repas comprenne une banane est donc de $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.

Solution 2
Chaque repas qu'Éric peut recevoir contient un fruit.
La viande choisie n'a aucun effet sur le choix du fruit. Donc, la probabilité pour que le repas comprenne une banane est indépendante du choix de la viande.
Puisqu'il y a 3 fruits possibles, la probabilité pour que le repas comprenne une banane est de $\frac{1}{3}$.

Réponse : (A)

18. *Solution 1*
Supposons que les citrouilles A et B ont contribué au poids de 12 kg, que les citrouilles A et C ont contribué au poids de 13 kg et que les citrouilles B et C ont contribué au poids de 15 kg.
On voit que chaque citrouille a contribué deux fois. Donc si on additionne ces poids pour obtenir un poids total de 40 kg, on obtient deux fois le poids total des trois citrouilles. Les trois citrouilles ont donc un poids total de 20 kg.
On compare le poids des citrouilles A et B (12 kg) au poids total des trois citrouilles (20 kg). La citrouille C pèse donc 8 kg.
On compare le poids des citrouilles A et C (13 kg) au poids total des trois citrouilles (20 kg). La citrouille B pèse donc 7 kg.
Puisque la citrouille A pèse 8 kg, que la citrouille B pèse 7 kg et que les trois citrouilles ont un poids total de 20 kg, la citrouille C pèse 5 kg. Donc, la citrouille la moins lourde pèse 5 kg.

Solution 2
Soit A, B et C le poids, en kilogrammes, des trois citrouilles *en ordre croissant*.
Le poids combiné le moins lourd, de 12 kg, doit provenir des deux citrouilles les moins lourdes. Donc $A + B = 12$.
Le poids combiné le plus lourd, de 15 kg, doit provenir des deux citrouilles les plus lourdes. Donc $B + C = 15$.
Donc, le troisième poids combiné, de 13 kg, provient de la citrouille la moins lourde et de la citrouille la plus lourde. Donc $A + C = 13$.
Puisque $A + B = 12$ et $A + C = 13$, alors C est 1 de plus que B.
Puisque $B + C = 15$ et que C est 1 de plus que B, alors $B = 7$ et $C = 8$.
L'équation $A + B = 12$ devient $A + 7 = 12$, d'où $A = 5$.
On vérifie que lorsque $A = 5$, $B = 7$ et $C = 8$, les paires de citrouilles pèsent bien 12 kg, 13 kg et 15 kg.
Donc, la citrouille la moins lourde pèse 5 kg.

Réponse : (B)

19. Au début, la somme des quatre nombres est égale à T. Lorsqu'on augmente chaque nombre de 1, il y a une augmentation totale de 4.
La somme des quatre nouveaux nombres est donc 4 de plus que la somme T. Elle est donc égale à $T + 4$.
Lorsqu'on triple cette somme, on obtient $3 \times (T + 4)$, ou $(T + 4) + (T + 4) + (T + 4)$, ou $3T + 12$.

Réponse : (C)

20. Le prisme à base rectangulaire a une base de (6×4) cm^2, ou 24 cm^2.
Puisqu'il a une hauteur de 2 cm, son volume est égal à (24×2) cm^3, ou 48 cm^3.
Le prisme à base triangulaire a une hauteur de 4 cm. Le triangle qui forme la base du prisme a une base de 3 cm (car 6 cm − 3 cm = 3 cm) et une hauteur de 3 cm (car 5 cm − 2 cm = 3 cm).
L'aire du triangle est égale à $(3 \times 3 \div 2)$ cm^2, ou 4,5 cm^2.
Le volume du prisme à base triangulaire est donc égal à $(4{,}5 \times 4)$ cm^3, ou 18 cm^3.
Le volume du solide combiné est donc égal à 48 cm^3 + 18 cm^3, ou 66 cm^3.

Réponse : (E)

21. Sylvio compte à rebours à partir de 7 en augmentant de 3 à chaque fois. Chaque nombre qu'il mentionne est donc 7 de plus qu'un multiple de 3.
On vérifie chaque choix de réponse en soustrayant 7 et en vérifiant si le résultat est divisible par 3. On inscrit les résultats à l'aide du tableau suivant.

Choix de réponse	Résultat après avoir soustrait 7	Divisible par 3 ?
1009	1002	Oui
1006	999	Oui
1003	996	Oui
1001	994	Non
1011	1004	Non

Parmi les choix de réponse, Sylvio a seulement mentionné 1009, 1006 et 1003.
Damien compte à rebours à partir de 2001, en diminuant de 5 à chaque fois : 2001, 1996, 1991, 1986, ...
Puisqu'il soustrait 5 à chaque fois, les nombres qu'il mentionne se terminent tous par 1 ou par 6.
Parmi les choix de réponse, Damien mentionne seulement 1006, 1001 et 1011.
Donc, 1006 est le seul nombre qui est mentionné par les deux garçons.

Réponse : (B)

22. Pendant les 20 premières minutes, Sophie ajoute de l'eau au taux de 20 L/min. Elle ajoute donc 20×20 L, ou 400 L d'eau.
Puisque la piscine peut contenir 4000 L et que 4000 L − 400 L = 3600 L, il faut ajouter 3600 L d'eau pour remplir la piscine.
Or, après 20 minutes, l'eau se met à s'échapper au taux de 2 L/min.
Puisque Sophie continue à verser de l'eau dans la piscine au taux de 20 L/min, la quantité d'eau dans la piscine augmente de 18 L/min, car 20 L/min − 2 L/min = 18 L/min.
Il faut 3600 L d'eau pour remplir la piscine et la quantité d'eau augmente de 18 L à chaque minute. Puisque 3600 min ÷ 18 = 200 min, il faut 200 minutes pour remplir la piscine.
En tout, il faut $(20 + 200)$ minutes, ou 220 minutes, c'est-à-dire 3 heures et 40 minutes.

Réponse : (B)

23. La somme des chiffres dans la colonne des unités est égale à $E + E + E$, ou $3E$.
Puisque E est un chiffre et que $3E$ se termine par un 1, il faut que $E = 7$.
Donc $3E = 3 \times 7$, ou $3E = 21$. Il y a donc une retenue de 2 dizaines qui est ajoutée à la colonne des dizaines. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

On examine la colonne des dizaines. Chacun des chiffres B, C et D est inférieur à 10 et la somme $2 + B + C + D$ ne peut donc pas dépasser 29 (c'est-à-dire $2 + 9 + 9 + 9$). Cette somme produira donc une retenue égale à 0, à 1 ou à 2. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & A & B & 7 \\ & A & C & 7 \\ & A & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

On examine la colonne des centaines dont la somme, avec la retenue, est égale à 20.
On cherche une valeur de A de manière que $0 + A + A + A = 20$ ou $1 + A + A + A = 20$ ou $2 + A + A + A = 20$.

- On voit que équation $0 + A + A + A = 20$ n'admet aucune solution, puisque 20 n'est pas divisible par 3.
- Par tâtonnements (on essaie $A = 1$ jusqu'à $A = 9$), on voit que équation $1 + A + A + A = 20$ n'admet aucune solution.
- Par tâtonnements (on essaie $A = 1$ jusqu'à $A = 9$), on voit que équation $2 + A + A + A = 20$ admet une seule solution, $A = 6$ $(2 + 6 + 6 + 6 = 20)$.

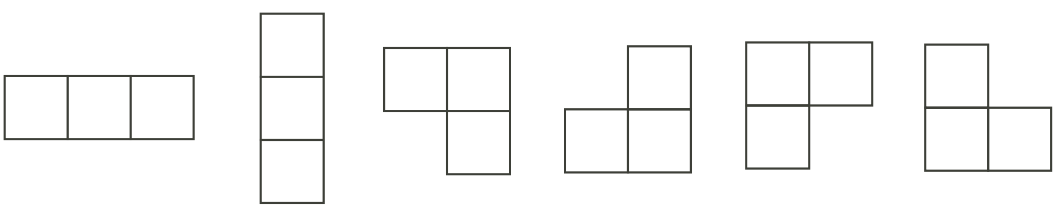
On a donc :

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & 6 & B & 7 \\ & 6 & C & 7 \\ & 6 & D & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

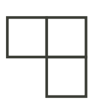
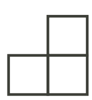
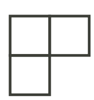
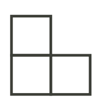
On remarque que l'on ne connaît pas B, C et D, mais on sait que $B + C + D = 19$, car $2 + B + C + D = 21$.
Puisque $A = 6$ et que $E = 7$, alors $A+B+C+D+E = 6+19+7$, d'où $A+B+C+D+E = 32$.

Réponse : (C)

24. Étant donné la condition imposée aux trois carreaux choisis, les trois carreaux choisis doivent former une des 6 formes possibles suivantes.



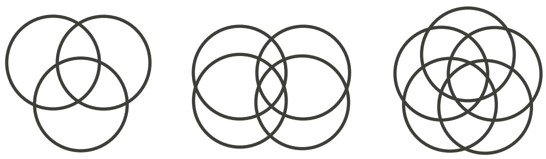
Pour déterminer le nombre de façons de choisir les trois carreaux, on détermine le nombre de façons de choisir chacune des 6 formes possibles. Les résultats paraissent dans le tableau suivant.

Forme						
Nombre de façons	3	2	4	3	3	4

Le nombre total de façons est égal à $3 + 2 + 4 + 3 + 3 + 4$, ou 19.

Réponse : (A)

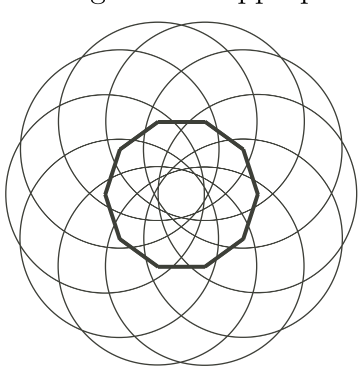
25. On remarque d'abord qu'un cercle peut couper un autre cercle en un maximum de deux points.
On trace le premier cercle.
On trace ensuite le deuxième cercle de manière qu'il coupe le premier cercle en deux points.
Puisque n'importe quels deux cercles doivent se chevaucher partiellement (mais aucun cercle ne doit chevaucher un autre cercle au complet), on peut tracer le troisième cercle de manière qu'il coupe chaque cercle précédent en deux points.
On continue de tracer chaque nouveau cercle de manière qu'il coupe chaque cercle précédent en deux points.
Donc, le quatrième cercle coupe chacun des trois cercles précédents en deux points, le cinquième cercle coupe chacun des quatre précédents en deux points, et ainsi de suite.
Voici des façons possibles de placer 3 cercles, 4 cercles et 5 cercles.



Le tableau suivant indique les nombres de points d'intersection.

Numéro du cercle tracé	Nombre de nouveaux points d'intersection	Nombre total de points d'intersection
1	0	0
2	2	2
3	$2 \times 2 = 4$	$2 + 4$
4	$3 \times 2 = 6$	$2 + 4 + 6$
5	$4 \times 2 = 8$	$2 + 4 + 6 + 8$
6	$5 \times 2 = 10$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10$
7	$6 \times 2 = 12$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$
8	$7 \times 2 = 14$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$
9	$8 \times 2 = 16$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$
10	$9 \times 2 = 18$	$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$

Le plus grand nombre total possible de points d'intersection est égal à $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$, ou 90.
Pour fin de précision, on montre qu'il est vraiment possible de tracer tous ces points d'intersection. La figure suivante montre un positionnement possible des dix cercles qui produit le nombre maximum de 90 points d'intersection.
Chaque cercle coupe chaque autre cercle à exactement deux endroits et tous les points d'intersection sont distincts.
On a construit la figure en choisissant comme centres des cercles les sommets d'un décagone régulier de grandeur appropriée.



Réponse : (D)

8e année

1. Les fractions $\frac{8}{12}$ et $\frac{\square}{3}$ sont équivalentes.
Pour réduire la première fraction, on a divisé son dénominateur par 4. Le numérateur est donc divisé par 4 pour obtenir un 2.
On a donc $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Donc, $\square$ a une valeur de 2.
Réponse : (D)

2. Puisque le bœuf haché se vend 5,00 \$ le kilogramme, alors 12 kg de bœuf haché coûtent $12 \times 5{,}00$ \$, ou 60,00 \$.
Réponse : (C)

3. L'angle qui mesure y° et l'angle droit qui mesure 90° forment un angle plein de 360°. On a donc $y^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, d'où $y = 270$.
Réponse : (E)

4. *Solution 1*
Pour comparer les fractions, on les écrit avec un dénominateur commun de 100.
La liste $\left\{\frac{3}{10}, \frac{9}{20}, \frac{12}{25}, \frac{27}{50}, \frac{49}{100}\right\}$ devient $\left\{\frac{30}{100}, \frac{45}{100}, \frac{48}{100}, \frac{54}{100}, \frac{49}{100}\right\}$.
Le plus grand nombre de cette liste est $\frac{54}{100}$. Donc, le plus grand nombre de la liste donnée est $\frac{27}{50}$.

Solution 2
On remarque que toutes les fractions de la liste, à l'exception de $\frac{27}{50}$, sont inférieures à $\frac{1}{2}$, car leur numérateur est inférieur à la moitié de leur dénominateur.
Or, la fraction $\frac{27}{50}$ est supérieure à $\frac{1}{2}$.
Donc, le plus grand nombre de la liste donnée est $\frac{27}{50}$.
Réponse : (D)

5. Il y a 3 résultats favorables (balles rouges) sur 15 résultats possibles. Donc, la probabilité pour que la balle choisie soit rouge est de $\frac{3}{15}$, ou $\frac{1}{5}$.
Réponse : (A)

6. *Solution 1*
Clara a doublé un nombre et elle a ajouté 3 au résultat pour obtenir 23. Donc, avant d'ajouter 3, le double du nombre devait être 20.
Puisque 20 est le double de 10, le nombre initial devait être 10.

Solution 2
On représente le nombre initial par l'inconnue x.
Lorsqu'on double ce nombre, on obtient $2x$ et lorsqu'on ajoute 3 à ce résultat, on obtient $2x+3$.
On a donc $2x + 3 = 23$. Puisque $20 + 3 = 23$, alors $2x = 20$. Puisque $2 \times 10 = 20$, alors $x = 10$.
Réponse : (B)

7. La recette demande $4\frac{1}{2}$ tasses de farine, soit 4 tasses plus $\frac{1}{2}$ tasse.
Or, la moitié de 4 tasses, c'est 2 tasses. La moitié de $\frac{1}{2}$ tasse, c'est $\frac{1}{4}$ tasse.
Donc, pour une demi-recette, il faut $2\frac{1}{4}$ tasses de farine.
Réponse : (B)

8. Puisque $\angle PQR = \angle PRQ$, le triangle PQR est isocèle et on a donc $PQ = PR = 7$.
Le triangle PQR a donc un périmètre de $7 + 5 + 7$, ou 19.
Réponse : (E)

9. Puisque 15 des 27 élèves de la classe sont des filles, il y a 12 garçons dans la classe, car $27 - 15 = 12$.
Le rapport du nombre de garçons au nombre de filles est égal à 12 : 15, ou 4 : 5.

Réponse : (A)

10. Karine a mangé moins que Max qui a mangé moins que Cédric.
Or, Ben et Tanya ont mangé moins que Karine.
Donc, Max a mangé la 2ᵉ plus grande quantité de nourriture.

Réponse : (D)

11. On évalue chaque expression :
(A) : $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$
(B) : $3 + 2^2 = 3 + 4 = 7$
(C) : $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
(D) : $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$
(E) : $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$
Seule l'expression (D) est égale à 5.

Réponse : (D)

12. Pour chaque heure de gardiennage, Nico reçoit 10 $ si on ne tient pas compte des frais de voyage.
Donc, pour y heures de gardiennage, Nico reçoit $10y$ dollars, sans compter les frais de voyage.
En plus de cet argent, Nico reçoit une somme de 7 $ pour voyager.
Donc, si on inclut les frais de voyage, l'expression $10y + 7$ repésente le nombre de dollars que Nico reçoit pour y heures de gardiennage.

Réponse : (A)

13. La fenêtre de Karim mesure 50 cm sur 80 cm. L'aire de la fenêtre est doublée si une des dimensions est doublée.
Or, dans le choix de réponse (C), les dimensions sont 50 cm sur 160 cm. La première dimension est identique à celle de la fenêtre, tandis que la deuxième dimension est le double de celle de la fenêtre.
Donc, les dimensions de 50 cm sur 160 cm donnent une aire qui est le double de l'aire de la fenêtre.

Réponse : (C)

14. Le numéro du jour et le numéro du mois doivent être identiques pour qu'ils soient une racine carrée.
Puisque $3^2 = 9$ et $10^2 = 100$, ces deux nombres doivent être supérieurs à 3 et inférieurs à 10 pour permettre à la date d'être située de 2012 à 2099.
On procède par essais systématiques en inscrivant les résultats dans le tableau suivant.

Jour et mois	Deux derniers chiffres de l'année	Date
4	$4^2 = 16$	4/4/2016
5	$5^2 = 25$	5/5/2025
6	$6^2 = 36$	6/6/2036
7	$7^2 = 49$	7/7/2049
8	$8^2 = 64$	8/8/2064
9	$9^2 = 81$	9/9/2081

Puisque ces dates sont des journées racine carrée du 1ᵉʳ janvier 2012 au 31 décembre 2099, on voit qu'il y en a 6.

Réponse : (E)

15. Le triangle CDE est rectangle et on sait que $CE = 5$ et $DE = 3$.
D'après le théorème de Pythagore, $CE^2 = CD^2 + DE^2$, ou $5^2 = CD^2 + 3^2$. Donc $25 = CD^2 + 9$, d'où $CD^2 = 16$, ou $CD = 4$.
Puisque $BD = 16$ et $CD = 4$, alors $BC = 12$. Le triangle ABC est rectangle et on sait que $AB = 9$ et que $BC = 12$. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, ou $AC^2 = 9^2 + 12^2$. Donc $AC^2 = 81 + 144$, ou $AC^2 = 225$, d'où $AC = 15$.

Réponse : (C)

16. La taille de Béatrice est 2 fois celle de Viola et la taille de Viola est $\frac{2}{3}$ de la taille de Gaby. Donc, la taille de Béatrice est $2 \times \frac{2}{3}$ de la taille de Gaby, ou $\frac{4}{3}$ de la taille de Gaby.

Réponse : (C)

17. Puisque x peut être n'importe quel nombre entre 0 et 1, on peut choisir une valeur particulière de x. On choisit $x = \frac{1}{4}$, car on peut calculer sa racine carrée. On évalue ensuite chacune des expressions données dans les choix de réponse.
On a $x = \frac{1}{4}$; $x^2 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$; $2x = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$; $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.
Puisque la plus petite valeur est $\frac{1}{16}$, x^2 produit la plus petite valeur.
Il est possible de démontrer que peu importe la valeur de x entre 0 et 1, la valeur de l'expression x^2 est toujours la plus petite des cinq expressions.

Réponse : (B)

18. On suppose que chaque carré a des côtés de longueur 2. Chacun a donc une aire de 4.
La diagonale AC coupe le carré $ABCD$ en deux triangles identiques.
L'aire du triangle ACD est donc la moité de l'aire du carré $ABCD$. Elle est donc égale à 2.
Puisque AC est la diagonale du carré $ABCD$, $\angle ACD = 45°$.
Or, le prolongement de la diagonale forme aussi un angle de 45° avec le côté EH du carré $EFGH$. (On peut s'en convaincre en additionnant les angles ACD, DCH et HCJ qui forment un angle plat. Le premier mesure 45°, le deuxième mesure 90° et le troisième doit donc mesurer 45°.) Le triangle CHJ a un angle de 45° et un angle de 90°. Son troisième angle doit donc mesurer 45°, car la somme des mesures de ses angles est égale à 180°. Le triangle CHJ est donc isocèle et $CH = HJ = 1$, car J est le milieu de GH.
L'aire du triangle CHJ est donc égale à $1 \times 1 \div 2$, ou $\frac{1}{2}$.
L'aire totale des deux parties ombrées est donc égale à $2 + \frac{1}{2}$, ou $2\frac{1}{2}$.
Puisque les deux carrés ont une aire totale de 8, la fraction des deux carrés qui est ombrée est égale à $\frac{2\frac{1}{2}}{8}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 2 pour obtenir $\frac{5}{16}$.

Réponse : (D)

19. Les entiers que l'on peut former peuvent être des entiers de 1 chiffre, de 2 chiffres ou de 3 chiffres.
Avec les chiffres 1, 2 ou 3, on peut former 3 entiers de 1 chiffre, soit 1, 2 et 3.
On considère les entiers de 2 chiffres.
Le 1$^{\text{er}}$ chiffre peut être 1, 2 ou 3. Pour chacun de ces choix, le 2$^{\text{e}}$ chiffre peut être 1, 2 ou 3, ce qui donne 3×3 possibilités, ou 9 possibilités en tout, soit 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.
On considère les entiers de 3 chiffres.
Il y a 3 choix pour le premier chiffre, soit 1, 2 ou 3. Pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour le deuxième chiffre, soit 1, 2 ou 3. Il y a donc 3×3 possibilités, ou 9 possibilités pour les deux premiers chiffres. Pour chaque possibilité, il y a 3 choix pour le troisième chiffre, soit 1, 2 ou 3. En tout, il y a 9×3 possibilités, ou 27 possibilités pour les trois chiffres. (Tous ces entiers sont inférieurs à 400, car le plus grand est 333.)

En tout, le nombre d'entiers positifs inférieurs à 400 que l'on peut former en utilisant seulement les chiffres de 1 à 3, les chiffres pouvant être répétés, est égal à $3 + 9 + 27$, ou 39.

Réponse : (D)

20. Puisque la taille moyenne des 22 élèves de la classe est de 103 cm, alors la somme des tailles de ces élèves est égale à 22×103 cm, ou 2266 cm.
Puisque la taille moyenne des 12 garçons de la classe est de 108 cm, alors la somme des tailles des garçons est égale à 12×108 cm, ou 1296 cm.
Donc, la somme des tailles des filles de la classe est égale 2266 cm − 1296 cm, ou 97 cm.
Puisqu'il y a 10 filles dans la classe, leur taille moyenne est égale à 970 cm ÷ 10, ou 97 cm.

Réponse : (B)

21. On considère d'abord le nombre minimal de pièces de monnaie qu'il faut pour obtenir 99 ¢, la plus grande quantité d'argent que l'on doit pouvoir former.
On peut former 75 ¢ avec un nombre minimal de pièces en utilisant 3 pièces de 25 ¢.
Il nous faut 24 ¢ de plus pour atteindre 99 ¢. On peut le faire en utilisant 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.
Donc pour former 99 ¢, il nous faut au moins 9 pièces, soit 3 pièces de 25 ¢, 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.
(De fait, il s'agit du seul groupe possible de 9 pièces de monnaie que l'on peut utiliser pour former 99 ¢. En effet, on doit avoir 4 pièces de 1 ¢ et 3 pièces de 25 ¢, mais ces 7 pièces ensemble ne forment que 79 ¢. Pour former 20 ¢ de plus, les deux autres pièces doivent donc être des pièces de 10 ¢. Donc, le seul groupe de 9 pièces de monnaie possible que l'on peut utiliser pour former 99 ¢ doit comprendre 3 pièces de 25 ¢, 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.)
On vérifie s'il est possible de former n'importe quelle quantité d'argent inférieure à un dollar avec ces 9 pièces.
Avec les pièces de 1 ¢, on peut former les quantités 1 ¢, 2 ¢, 3 ¢ et 4 ¢.
Or, il est impossible de former une quantité de 5 ¢ avec notre collection de 9 pièces. Il faut donc ajouter une 10e pièce de monnaie. On pourrait ajouter une pièce de 1 ¢ ou une pièce de 5 ¢. Or, seule la pièce de 5 ¢ nous permettrait aussi de former une quantité de 9 ¢.
On ajoute donc une pièce de 5 ¢ à notre collection qui contient maintenant 10 pièces, soit 3 pièces de 25 ¢, 2 pièces de 10 ¢, 1 pièce de 5 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.
Notre collection de 10 pièces nous permet maintenant de former :

- n'importe quelle quantité de 1 ¢ à 4 ¢ en utilisant 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 5 ¢ à 9 ¢ en utilisant 1 pièce de 5 ¢ et 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 10 ¢ à 14 ¢ en utilisant 1 pièce de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 15 ¢ à 19 ¢ en utilisant 1 pièce de 5 ¢, 1 pièce de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢ ;
- n'importe quelle quantité de 20 ¢ à 24 ¢ en utilisant 2 pièces de 10 ¢ et 4 pièces de 1 ¢.

Si on ajoute une pièce de 25 ¢, on peut former n'importe quelle quantité de 25 ¢ à 49 ¢.
Si on ajoute deux pièces de 25 ¢, on peut former n'importe quelle quantité de 50 ¢ à 74 ¢.
Si on ajoute deux pièces de 25 ¢, on peut former n'importe quelle quantité de 75 ¢ à 99 ¢.
Donc, il nous faut un minimum de 10 pièces de monnaie pour former n'importe quelle quantité d'argent inférieure à un dollar.

Peux-tu vérifier qu'il existe une combinaison différente de 10 pièces de monnaie qui nous permettrait de former n'importe quelle quantité d'argent inférieure à un dollar ?

Réponse : (A)

22. On considère d'abord toutes les façons possibles de former une somme de 18 en utilisant trois nombres différents de 1 à 9. On a $1+8+9$, $2+7+9$, $3+6+9$, $3+7+8$, $4+5+9$, $4+6+8$ et $5+6+7$.
On considère ensuite la ligne $1+d+f$ dans la figure 1. Puisque la somme des trois nombres est égale à 18, alors $d+f=17$. On a donc $d=8$ et $f=9$ ou bien $d=9$ et $f=8$.
On considère ensuite les trois lignes qui contiennent x. On a donc $a+x+d$, $b+x+f$ et $c+x+6$. Puisque x paraît dans trois sommes distinctes, on cherche dans les sept sommes possibles pour constater que seuls les nombres 6, 7 et 8 paraissent dans trois sommes distinctes. Donc, x doit être égal à 6, 7 ou 8.
Puisque le nombre 6 paraît déjà dans la figure, x est égal à 7 ou à 8. Or, on a déjà conclu que d ou f est égal à 8. Donc $x=7$.
La figure 2 montre la position finale des nombres.

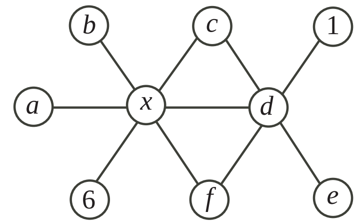


Fig.1

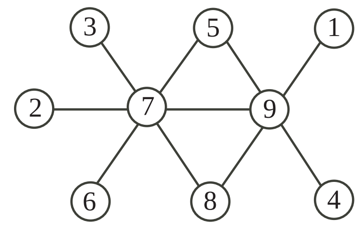
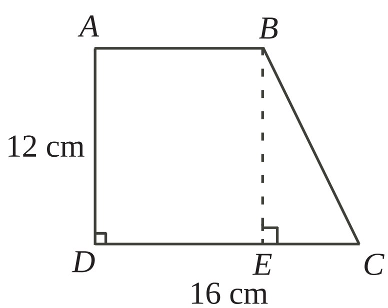


Fig.2

Réponse : (C)

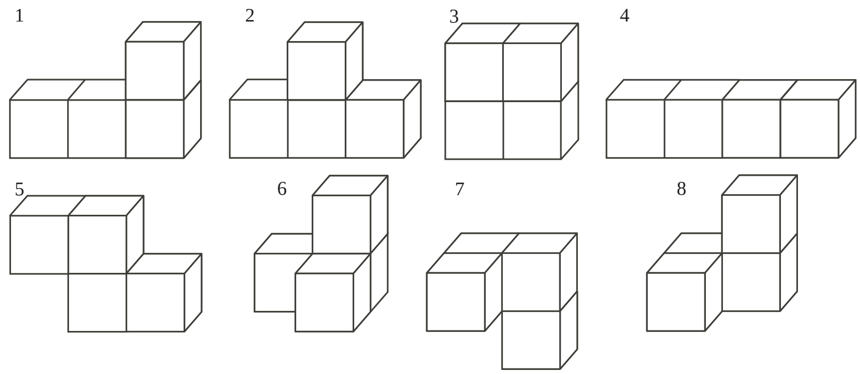
23. On nomme le trapèze $ABCD$ comme dans la figure ci-dessous.
Puisque le trapèze a une aire de 162 cm^2, alors $\frac{1}{2}(12)(AB+16)=162$, ou $(6)(AB+16)=162$.
Puisque $6\times 27=162$, alors $AB+16=27$, d'où $AB=11$.
Au point B, on abaisse une perpendiculaire BE au côté DC.
Puisque AB est parallèle à DE et que AD et BE sont tous deux perpendiculaires à DE, alors $ABED$ est un rectangle.
Donc $DE=AB=11$, $BE=AD=12$ et $EC=16-11$, ou $EC=5$.
Le triangle BEC est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2=12^2+5^2$.
Donc $BC^2=169$, d'où $BC=13$.
Le trapèze a donc un périmètre, en cm, égal à $11+13+16+12$, ou 52.



Réponse : (B)

24. Lorsque les faces de deux cubes sont collées l'une sur l'autre, elles doivent coïncider. De plus, chacun des 4 cubes doit avoir une face qui coïncide avec une face d'au moins un des 3 autres cubes.
Dans la figure 1, ci-dessous, on voit le solide qui paraissait dans la question. On essaie ensuite de déplacer un des cubes pour former un autre solide. À chaque fois, on vérifie qu'il est différent des solides précédents.
On peut ainsi obtenir les figures 2 à 5 dont les solides ont la même épaisseur (du devant à l'arrière) que celui de la figure 1.
Les solides des figures 1 à 5 sont les seuls qui ont une épaisseur de 1 cube. On peut s'en convaincre en tentant d'en construire un sixième et en lui faisant subir des rotations pour vérifier s'il est différent des cinq premiers.
On tente ensuite de construire des solides qui ont une épaisseur de 2 (du devant à l'arrière).

Les trois seuls solides possibles sont illustrés dans les figures 6, 7 et 8. Bien que les solides 7 et 8 paraissent identiques, il est impossible de faire subir une rotation à un de ces solides pour obtenir l'autre.
Si on tente d'obtenir un solide ayant une épaisseur de 3, on obtient toujours un des solides déjà illustrés dans les figures de 1 à 5.
Les seuls solides qu'Aïda peut construire sont les 8 solides illustrés.



Réponse : (D)

25. Il est possible de regrouper les termes de manière à découvrir plusieurs régularités intéressantes. Par exemple, on peut regrouper les termes en groupes de 4 termes consécutifs. On pourrait ainsi calculer la somme S en écrivant :

$$S = [1 + (-4) + (-9) + 16] + [25 + (-36) + (-49) + 64] + [81 + (-100) + (-121) + 144] + \dots$$

On constate alors que chaque groupe de 4 termes consécutifs a une somme de 4. On a ainsi $1 + (-4) + (-9) + 16 = 4$, $25 + (-36) + (-49) + 64 = 4$, $81 + (-100) + (-121) + 144 = 4$, et ainsi de suite.
On suppose que cette régularité continue. Pour ceux et celles que cela intéresse, on présente une preuve de la régularité à la fin de cette solution. La preuve fait appel à de l'algèbre avancée.
Puisque chaque groupe de 4 termes a une somme de 4, la somme des 8 premiers termes est égale à 8, la somme des 12 premiers termes est égale à 12 et ainsi de suite. Donc, la somme des n premiers termes est égale à n si n est un multiple de 4.
Donc, la somme des 2008 premiers termes est égale à 2008, car 2008 est un multiple de 4.
Donc, la somme des 2011 premiers termes de la suite est égale à $1008 + [2009^2 - 2010^2 - 2001^2]$, ou $-4\,046\,132$.

Vérification de la régularité

On ne s'attend pas que les candidats du concours Gauss puissent suivre le raisonnement suivant, car il fait appel au produit de binômes qui est enseigné dans les cours plus avancés.
Si n représente le premier de quatre entiers consécutifs, alors les trois entiers suivants sont $n+1$, $n+2$ et $n+3$.
Puisque les termes de la suite sont des carrés, alors les carrés des quatre entiers consécutifs sont n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$ et $(n+3)^2$.
Puisque les premier et quatrième termes sont positifs, tandis que les deuxième et troisième termes sont négatifs, la somme des quatre termes consécutifs est égale à $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2$. (Par exemple, si $n = 5$, on a $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2$.)
Pour simplifier l'expression algébrique, on voit d'abord comment simplifier chaque partie.
L'expression $(n+1)^2$ signifie $(n+1) \times (n+1)$. Le terme n de la 1^re^ parenthèse multiplie chaque terme de la 2^e^ parenthèse, puis le 1 de la 1^re^ parenthèse multiplie chaque terme de la 2^e^ parenthèse.

Les produits sont additionnés. On a donc :

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= (n+1)\times(n+1)\\ &= n\times n+n\times 1+1\times n+1\times 1\\ &= n^2+n+n+1\\ &= n^2+2n+1\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}(n+2)^2 &= (n+2)\times(n+2)\\ &= n\times n+n\times 2+2\times n+2\times 2\\ &= n^2+2n+2n+4\\ &= n^2+4n+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n+3)^2 &= (n+3)\times(n+3)\\ &= n\times n+n\times 3+3\times n+3\times 3\\ &= n^2+3n+3n+9\\ &= n^2+6n+9\end{aligned}$$

La somme des quatre termes consécutifs est donc égale à :

$$\begin{aligned}n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2 &= n^2-(n^2+2n+1)-(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)\\ &= n^2-n^2-2n-1-n^2-4n-4+n^2+6n+9\\ &= n^2-n^2-n^2+n^2-2n-4n+6n+9-1-4\\ &= 4\end{aligned}$$

Réponse : (E)