Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Galois 2011

le mercredi 13 avril 2011

Solutions

1. (a) Selon la règle de Jacques, le 2^e terme de la suite de Fabien est $\dfrac{1}{1-2}$, ou $\dfrac{1}{-1}$, ou -1.

   (b) Puisque le 2^e terme est -1, le 3^e terme est $\dfrac{1}{1-(-1)}$, ou $\dfrac{1}{1+1}$, ou $\dfrac{1}{2}$.

   Puisque le 3^e terme est $\frac{1}{2}$, le 4^e terme est $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$, ou $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$, ou 2.

   Puisque le 4^e terme est 2, le 5^e terme est $\dfrac{1}{1-2}$, ou $\dfrac{1}{-1}$, ou -1.

   (c) Puisque le 4^e terme est 2, comme le 1er terme, et que chaque terme ne dépend que du terme précédent, les nombres se répètent à tous les trois termes dans la suite.
   La suite est donc $2, -1, \frac{1}{2}, 2, -1, \frac{1}{2}, 2, \ldots$
   Puisque les termes $2, -1, \frac{1}{2}$ se répètent à tous les trois termes, il faut connaître le nombre de groupes de trois termes qu'il y a dans les 2011 termes.
   Puisque $2011 = 670 \times 3 + 1$, les termes $2, -1, \frac{1}{2}$ se répètent 670 fois (ce qui donne 2010 termes), et le 2011^e terme est un 2.
   Il y a donc 671 termes qui égalent 2 dans la suite de Fabien.

   (d) Le cycle de trois termes, dans la partie (c), a une somme de $2 + (-1) + \frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$.
   Or, ce cycle est répété 670 fois. La somme des 2010 premiers termes est donc égale à $670 \times \frac{3}{2}$, ou 1005.
   Puisque le 2011^e terme est 2, la somme des termes de la suite de Fabien est égale à $1005+2$, ou 1007.

2. (a) Dans le tableau suivant, on considère toutes les façons pour les jetons de tomber.

Jeton 5	Jeton 7	Jeton 10	Somme
0	0	0	0
5	0	0	5
0	7	0	7
0	0	10	10
5	7	0	12
5	0	10	15
0	7	10	17
5	7	10	22

   Les autres sommes possibles sont 0, 5, 7, 10, 12, 15 et 22.

   (b) *Solution 1*
   Puisque les trois sommes sont différentes les unes des autres, il doit y avoir une pièce différente, à chaque lancer, qui indique un 0.
   Donc à la fin des trois lancers, chaque pièce a indiqué 0 une fois et son autre nombre deux fois.
   Donc le total des trois sommes, $60 + 110 + 130$, ou 300, représente deux fois la somme des nombres non nuls des trois jetons.
   Donc les trois nombres non nuls ont une somme de 150 ($300 \div 2 = 150$).
   Or, la somme maximale que l'on peut obtenir en lançant les trois jetons correspond à la somme des trois nombres non nuls. Elle est donc égale à 150.

Solution 2
Soit a, b et c les trois nombres non nuls.
Puisque les trois sommes sont différentes les unes des autres, il doit y avoir une pièce différente, à chaque lancer, qui indique un 0. On peut donc supposer que $a + b = 60$, $a + c = 110$ et $b + c = 130$.
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $2a + 2b + 2c = 300$, d'où $2(a + b + c) = 300$, ou $a + b + c = 150$.
Cette dernière équation indique que la somme des trois nombres non nuls est égale à 150.
Or, la somme maximale que l'on peut obtenir en lançant les trois jetons correspond à la somme des trois nombres non nuls. Elle est donc égale à 150.

(c) On considère toutes les possibilités par rapport aux deux premiers jetons, ce qui fixe alors les valeurs possibles du troisième jeton, puisque la somme des résultats est de 170. On utilise un tableau :

Jeton 25	Jeton 50	3^e jeton
0	0	$170 - 0 = 170$
25	0	$170 - 25 = 145$
0	50	$170 - 50 = 120$
25	50	$170 - 75 = 95$

Les nombres possibles, en plus du zéro, qui pourraient paraître sur le troisième jeton sont 170, 145, 120 et 95.

3. (a) Puisque $\angle ABP = 90°$, le triangle ABP est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $BP^2 = AP^2 - AB^2$, d'où $BP^2 = 20^2 - 16^2$, ou $BP^2 = 144$. Puisque $BP > 0$, alors $BP = 12$.
Puisque $\angle QTP = 90°$, le triangle QTP est rectangle. De plus, $PT = 12$, car $PT = BP$.
D'après le théorème de Pythagore, $QT^2 = QP^2 - PT^2$, d'où $QT^2 = 15^2 - 12^2$, ou $QT^2 = 81$.
Puisque $QT > 0$, alors $QT = 9$.

(b) Dans les triangles PQT et DQS, $\angle PTQ = \angle DSQ = 90°$.
De plus, les angles PQT et DQS sont congrus, puisqu'ils sont opposés par le sommet.
Puisque $\angle PTQ = \angle DSQ$, que $\angle PQT = \angle DQS$ et que les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les troisièmes angles de ces triangles, soit QPT et QDS, sont congrus.
Puisque les angles des triangles PQT et DQS sont congrus deux à deux, les triangles sont semblables.

(c) Puisque $ABCD$ est un rectangle et que TS est perpendiculaire à BC, alors $ABTS$ est un rectangle.
On a donc $TS = BA = 16$ et $QS = TS - QT$, d'où $QS = 16 - 9$, ou $QS = 7$.
Comme on l'a vu dans la partie (b), les triangles PQT et DQS sont semblables.
Donc dans ces triangles, les rapports des longueurs de côtés correspondants sont égaux.
Donc $\dfrac{SD}{TP} = \dfrac{QS}{QT}$, ou $\dfrac{SD}{12} = \dfrac{7}{9}$, d'où $SD = 12 \times \dfrac{7}{9}$, ou $SD = \dfrac{28}{3}$.

(d) *Solution 1*
Les triangles QAS et RAD ont un angle commun en A.
Puisque $ABCD$ et $ABTS$ sont des rectangles, alors $\angle RDA = \angle QSA = 90°$.
Puisque $\angle QAS = \angle RAD$, que $\angle RDA = \angle QSA$ et que les mesures des trois angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les troisièmes angles de ces triangles, soit $\angle SQA$ et $\angle DRA$, sont congrus.

Puisque les angles des triangles QAS et RAD sont congrus deux à deux, ces triangles sont semblables.
Donc dans ces triangles, les rapports des longueurs de côtés correspondants sont égaux.
Donc $\dfrac{RD}{QS} = \dfrac{DA}{SA}$, ou $RD = QS \times \dfrac{DA}{SA}$.
Or, $DA = AS + SD$, d'où $DA = 24 + \dfrac{28}{3}$, ou $DA = \dfrac{100}{3}$. Donc $RD = 7 \times \dfrac{(\frac{100}{3})}{24}$, d'où $RD = 7 \times \dfrac{100}{72}$, ou $RD = \dfrac{175}{18}$.

Puisque les triangles QAS et RAD sont semblables, alors $\dfrac{RA}{QA} = \dfrac{RD}{QS}$, ou $RA = QA \times \dfrac{RD}{QS}$.
Donc $RA = 25 \times \dfrac{(\frac{175}{18})}{7}$, d'où $RA = 25 \times \dfrac{25}{18}$, ou $RA = \dfrac{625}{18}$.
Puisque $QR = RA - QA$, alors $QR = \dfrac{625}{18} - 25$, d'où $QR = \dfrac{625 - 450}{18}$, ou $QR = \dfrac{175}{18}$.
Donc $QR = RD$.

Solution 2
Dans les triangles PQA et TQP, les rapports des longueurs de côtés correspondants sont égaux, c'est-à-dire que $\dfrac{PA}{TP} = \dfrac{PQ}{TQ} = \dfrac{QA}{QP}$. En effet, $\dfrac{20}{12} = \dfrac{15}{9} = \dfrac{25}{15} = \dfrac{5}{3}$.
Ces triangles sont donc semblables et leurs angles correspondants sont congrus deux à deux.
Soit $\angle PQA = \angle TQP = \alpha$.
Puisque les angles RQD et PQA sont opposés par les sommets, $\angle RQD = \angle PQA = \alpha$.
Puisque les segments CD et TS sont parallèles, alors $\angle RDQ = \angle TQP = \alpha$ (angles correspondants par rapports aux segments parallèles).
Donc $\angle RDQ = \angle RQD$. Le triangle RQD est donc isocèle, d'où $QR = RD$.

4. (a) Puisque $T(4) = 10$ et que $T(10) = 55$, alors $T(a) = T(10) - T(4)$, d'où $T(10) = 45$.
On a donc $\dfrac{a(a+1)}{2} = 45$, d'où $a^2 + a = 90$, ou $a^2 + a - 90 = 0$.
Donc $(a-9)(a+10) = 0$, d'où $a = 9$ ou $a = -10$. Puisque a est un entier positif, la dernière racine est rejetée.
Donc $a = 9$.

(b) Le membre de gauche de l'équation, soit $T(b+1) - T(b)$, est égal à $\dfrac{(b+1)(b+2)}{2} - \dfrac{b(b+1)}{2}$, que l'on simplifie pour obtenir $\dfrac{b^2 + 3b + 2 - b^2 - b}{2}$, ou $\dfrac{2b+2}{2}$, ou $b + 1$.
L'équation nous dit donc que $b + 1$ est égal au nombre triangulaire $T(x)$.
Puisque $b > 2011$, on cherche le plus petit nombre triangulaire supérieur à 2012.
Par tâtonnements, on obtient $T(62) = 1953$ et $T(63) = 2016$.
L'équation devient $b + 1 = 2016$, d'où $b = 2015$.
La plus petite valeur de b est 2015.

(c) Puisque $T(28) = 406$, la deuxième équation est $c + d + e = 406$, ou $e = 406 - (c + d)$.

On simplifie la première équation :

$$\begin{array}{rcl} T(c)+T(d) & = & T(e) \\ \dfrac{c(c+1)}{2}+\dfrac{d(d+1)}{2} & = & \dfrac{e(e+1)}{2} \\ c(c+1)+d(d+1) & = & e(e+1) \end{array}$$

On reporte $e = 406-(c+d)$ dans cette équation :

$$\begin{array}{rcl} c(c+1)+d(d+1) & = & e(e+1) \\ c(c+1)+d(d+1) & = & (406-(c+d))(407-(c+d)) \\ c^2+c+d^2+d & = & 406\times 407-406(c+d)-407(c+d)+(c+d)^2 \\ c^2+c+d^2+d & = & 406\times 407-813(c+d)+(c+d)^2 \\ c^2+c+d^2+d & = & 406\times 407-813(c+d)+c^2+2cd+d^2 \\ c+d & = & 406\times 407-813(c+d)+2cd \\ 2cd & = & c+d+813(c+d)-406\times 407 \\ 2cd & = & 814(c+d)-406\times 407 \\ cd & = & 407(c+d)-203\times 407 \\ cd & = & 407(c+d-203), \end{array}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(d) On utilise le résultat de la partie (c). On cherche donc tous les triplets (c, d, e) d'entiers strictement positifs pour lesquels $c \le d \le e$, tels que $cd = 407(c+d-203)$.
Puisque le membre de droite est divisible par 407, le membre de gauche doit l'être également.
Or $407 = 37 \times 11$.
Puisque cd est divisible par 407 et que 407 est divisible par 37, alors cd est divisible par 37.
Puisque 37 est un nombre premier, c ou d doit être divisible par 37.
Supposons que d est divisible par 37. Il existe donc un entier strictement positif n tel que $d = 37n$.
(On considérera un peu plus loin la possibilité que c'est l'entier c qui est divisible par 37.)
Puisque $c + d + e = 406$ et que c, d et e sont des entiers strictement positifs, alors $1 \le d \le 404$, d'où $1 \le n \le 10$.
On reporte $d = 37n$ dans l'équation $cd = 407(c+d-203)$.
On obtient $37cn = 407(c+37n-203)$. On divise chaque membre par 37 pour obtenir $cn = 11(c+37n-203)$, ou $cn-11c = 11\times 37n-11\times 203$.
On isole c pour obtenir $c(n-11) = 407n-2233$, ou $c = \dfrac{407n-2233}{n-11}$.
On écrit le numérateur $407n-2233$ sous la forme $407n-4477+2244$, ou $407(n-11)+2244$.
Donc $c = \dfrac{407(n-11)+2244}{n-11}$, ou $c = \dfrac{407(n-11)}{n-11}+\dfrac{2244}{n-11}$, ou $c = 407+\dfrac{2244}{n-11}$.
Puisque c est un entier strictement positif, alors $n-11$ doit être un diviseur de 2244.
Puisque $1 \le n \le 10$, alors $-10 \le n-11 \le -1$.
Les seules valeurs possibles de $n-11$ sont donc $-1, -2, -3, -4$ et -6.
Parmi ces valeurs possibles, seule $n-11 = -6$ donne une valeur positive de c.
Puisque $n-11 = -6$, alors $n = 5$, $d = 37\times 5$, ou $d = 185$, $c = 33$ et $e = 406-(c+d)$, ou $e = 188$.
On a trouvé un triplet (c, d, e), pour lequel $c \le d \le e$, tel que $cd = 407(c+d-203)$, soit

$(33, 185, 188)$.

On a supposé, un peu plus haut, que d était divisible par 37. Supposons maintenant que c'est c qui est divisible par 37. Il existe donc un entier strictement positif n tel que $c = 37n$.
Puisque $c + d + e = 406$ et que c, d et e sont des entiers strictement positifs, alors $1 \leq c \leq 404$, d'où $1 \leq n \leq 10$.
On reporte $c = 37n$ dans l'équation $cd = 407(c + d - 203)$ qui devient
$37dn = 407(37n + d - 203)$.
On divise chaque membre par 37 pour obtenir $dn = 11(37n + d - 203)$, ou
$dn - 11d = 11 \times 37n - 11 \times 203$.
On isole d pour obtenir $d(n - 11) = 407n - 2233$, ou $d = \dfrac{407n - 2233}{n - 11}$.
On écrit le numérateur $407n-2233$ sous la forme $407n-4477+2244$, ou $407(n-11)+2244$.
Donc $d = \dfrac{407(n - 11) + 2244}{n - 11}$, ou $d = \dfrac{407(n - 11)}{n - 11} + \dfrac{2244}{n - 11}$, ou $d = 407 + \dfrac{2244}{n - 11}$.
Puisque d est un entier strictement positif, alors $n - 11$ doit être un diviseur de 2244.
Puisque $1 \leq n \leq 10$, alors $-10 \leq n - 11 \leq -1$.
Les seules valeurs possibles de $n - 11$ sont donc $-1, -2, -3, -4$ et -6.
Parmi ces valeurs possibles, seule $n - 11 = -6$ donne une valeur positive de d.
Puisque $n - 11 = -6$, alors $n = 5$, $c = 37 \times 5$, ou $c = 185$, $d = 33$ et $e = 406 - (c + d)$, ou $e = 188$.
Puisqu'on doit avoir $c \leq d \leq e$, cette solution est rejetée.

Le seul triplet (c, d, e) pour lequel $c \leq d \leq e$, tel que $cd = 407(c+d-203)$ est $(33, 185, 188)$.