Concours Galois 2011 (10^{e} année – Sec. IV)

le mercredi 13 avril 2011

1. Jacques énonce la règle suivante pour créer des suites :
   « Si x représente un terme de ta suite, alors le terme suivant de la suite est $\dfrac{1}{1-x}$. »
   Par exemple, Marie utilise le nombre 3 pour commencer sa suite.
   Le 2^{e} terme de sa suite est $\dfrac{1}{1-3}$, ce qui est égal à $\dfrac{1}{-2}$, ou $-\dfrac{1}{2}$. Sa suite est alors $3, -\frac{1}{2}$.

   Le 3^{e} terme de sa suite est $\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})}$, ce qui est égal à $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{2}{3}$. Sa suite est alors $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

   Le 4^{e} terme de sa suite est $\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}$, ce qui est égal à $\frac{1}{\frac{1}{3}}$, ou 3. Sa suite est alors $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3$.

   Fabien utilise le nombre 2 pour commencer sa suite. Il utilise la règle de Jacques jusqu'à ce que sa suite contienne 2011 termes.

   (a) Quel est le 2^{e} terme de sa suite ?

   (b) Quel est le 5^{e} terme de sa suite ?

   (c) Dans la suite de Fabien, combien des 2011 termes égalent 2 ? Expliquer.

   (d) Déterminer la somme de tous les termes de cette suite.

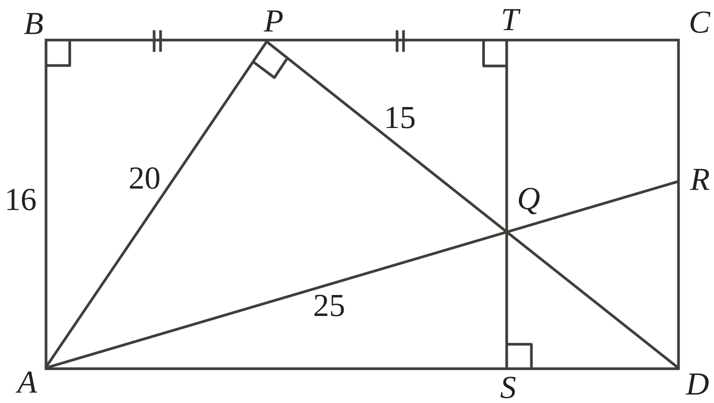
2. Alia a un seau rempli de jetons. Chaque jeton porte le numéro 0 d'un côté et un nombre entier supérieur à 0 de l'autre côté. Elle choisit trois jetons au hasard, les lance et calcule une somme en additionnant les trois nombres qui paraissent.

   (a) Lundi, Alia choisit des jetons portant un 7, un 5 et un 10. Elle les lance et les nombres $7, 0$ et 10 paraissent pour une somme de 17. Quelles autres sommes peut-elle obtenir en utilisant les trois mêmes jetons ?

   (b) Mardi, Alia choisit trois jetons, les lance trois fois et obtient des sommes de $60, 110$ et 130. Après chaque lancer, exactement un des jetons indique un 0. Déterminer la somme maximale que l'on peut obtenir en lançant ces trois jetons.

   (c) Mercredi, Alia choisit un jeton portant un 25, un jeton portant un 50 et un troisième jeton. Elle lance les trois jetons et obtient une somme de 170. Déterminer tous les nombres possibles, en plus du zéro, qui pourraient paraître sur le troisième jeton.

3. On considère le rectangle $ABCD$ suivant. P est un point sur BC de manière que $\angle APD = 90°$. TS est perpendiculaire à BC et $BP = PT$. PD coupe TS en Q. Le point R est sur CD de manière que RA passe au point Q. Dans le triangle PQA, $PA = 20$, $AQ = 25$ et $QP = 15$.



(a) Déterminer la longueur de BP et celle de QT.

(b) Démontrer que les triangles PQT et DQS sont semblables ; c'est-à-dire démontrer que les angles correspondants des deux triangles sont congrus.

(c) Déterminer la longueur de QS et celle de SD.

(d) Démontrer que $QR = RD$.

4. On considère un entier strictement positif n.

Le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire est le nombre $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Par exemple, $T(3) = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{3(4)}{2} = 6$. Donc, le 3^{e} nombre triangulaire est 6.

(a) Il existe un entier positif a pour lequel $T(4) + T(a) = T(10)$. Déterminer a.

(b) Déterminer le plus petit entier b supérieur à 2011 de manière que $T(b+1) - T(b) = T(x)$, x étant un entier strictement positif quelconque.

(c) Si $T(c) + T(d) = T(e)$ et $c + d + e = T(28)$, démontrer que $cd = 407(c + d - 203)$.

(d) Déterminer tous les triplets (c, d, e) d'entiers strictement positifs pour lesquels $c \leq d \leq e$, tels que $T(c) + T(d) = T(e)$ et $c + d + e = T(28)$.